$$u = A \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2}\, dz$$

einerseits der partiellen Differentialgleichung der Wärmebewegung, andererseits lässt er sich bei geeigneter Bestimmung von A und α den Nebenbedingungen unseres Problems anpassen, wobei das vom Wasser erfüllte Gebiet durch die Bedingung $0 \leqq \frac{x}{2\sqrt{kt}} \leqq \alpha$ zu umgrenzen ist. Da $u = U$ für $x = 0$ und $u = 0$ für $x = h$, so ist zu setzen:

$$h = 2\alpha\sqrt{kt}, \qquad U = A\int\limits_0^{\alpha} e^{-z^2}\, dz,$$

und die obige Bedingung für die Stelle $x = h$ giebt

$$A\varkappa e^{-\alpha^2} = 2k\alpha\lambda.$$

Die Höhe $h = 2\alpha\sqrt{kt}$ lässt sich daher aus der Gleichung

$$\alpha e^{\alpha^2}\int\limits_0^{\alpha} e^{-z^2}\, dz = \frac{\varkappa U}{2k\lambda}$$

bestimmen; es ist dies eine transcendente Gleichung für α, deren Wurzeln mit Hülfe von numerischen Tafeln[77]) berechnet werden können.

Wenn die Ebene $x = 0$ eine gegebene unter dem Gefrierpunkt liegende Temperatur U_1 hat, und in unendlicher Tiefe die über dem Gefrierpunkt liegende Temperatur U_2 gleichfalls gegeben ist[78]), so dringt der Frost in das Wasser allmählich vor; die Geschwindigkeit, mit welcher dieses geschieht, lässt sich alsdann durch eine ähnliche Methode bestimmen, wie die soeben angedeutete.

12. Wärmeleitung und innere Reibung in einer bewegten Flüssigkeit. Sind die Teilchen einer Flüssigkeit in relativer Bewegung, so wird Wärme durch die innere Reibung erzeugt und in der Flüssigkeit fortgeleitet. In diesem Fall[79]) muss noch besonders festgesetzt werden, was man unter der Temperatur in einem Punkt der Flüssigkeit zu verstehen hat, da die Temperatur hier nicht auf die gleiche Weise gemessen werden kann, wie bei einem Körper, dessen Teilchen

---

77) Vgl. Anm. 46.

78) Die Lösung dieser Aufgabe befindet sich im *Riemann-Weber*'schen Buch 2, p. 118—122.

79) Diese Theorie hat *Kirchhoff* aufgestellt, siehe seine „Vorlesungen über die Theorie der Wärme", Leipzig 1894, p. 113.

sich in relativer Ruhe befinden. Die Temperatur wird nun durch den Satz definiert, dass die Energie einer bewegten unendlich kleinen Flüssigkeitsmasse gleich ist ihrer lebendigen Kraft plus der Energie, die sie in der Ruhe bei gleicher Dichtigkeit und gleicher Temperatur haben würde. Es sei ϱ die Dichtigkeit, u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens an der Stelle (x, y, z), T die Temperatur daselbst, γ_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, M eine Konstante der Flüssigkeit, die wir „Dilatationswärme" nennen können und die das Verhältnis $dQ/d\varrho$ bei konstant gehaltener Temperatur bedeutet; dann besteht die Gleichung

$$-M\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\gamma_v\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{\varrho}\Big[\mu\Big\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\Big\}-2\mu'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\Big],$$

worin μ, μ' zwei von der Beschaffenheit der Flüssigkeit (Viskosität und Kompressibilität) abhängende Konstanten bedeuten; ist die Flüssigkeit inkompressibel, so verschwindet μ' aus der Gleichung; $\varkappa$ bezeichnet wie sonst die Wärmeleitungsfähigkeit.

An der Grenzfläche, wo zwei Flüssigkeiten, oder eine Flüssigkeit und ein fester Körper sich berühren, müssen Grenzbedingungen durch besondere Voraussetzungen aufgestellt werden; diese bestehen zum Teil aus Annahmen über die Druckkomponenten in den beiden Substanzen und die Art und Weise, wie sie von der relativen Bewegung der beiden Substanzen an der Grenzfläche abhängen. Die Temperaturbedingungen, die an der Grenzfläche zu erfüllen sind, lauten

$$T=T',$$
$$\varkappa\frac{\partial T}{\partial n}-\varkappa'\frac{\partial T'}{\partial n}=-\lambda\{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2\},$$

worin λ eine Konstante, welche die sogenannte äussere Reibung misst, und dn ein zur Grenzfläche senkrechtes Linienelement bezeichnet. Die Theorie der Wärmeleitung in Gasen hat ihre Stelle in der kinetischen Gastheorie.

13. Diffusion. Wenn sich zwei verschiedene Flüssigkeiten oder Gase in demselben Gefässe befinden, und die beiden Substanzen anfangs getrennt waren, so durchdringen sie sich allmählich, so dass nach theoretisch unendlicher Zeit eine homogene Mischung der beiden Substanzen entstanden ist; dieser Vorgang heisst Diffusion.

Die Theorie der Diffussion zweier Flüssigkeiten, von welchen die