bekannt ist, sodass selbst eine sorgfältige chemische Analyse zur Definition häufig nicht ausreicht (vgl. Nr. **31**). Im allgemeinen sind daher solche Methoden vorzuziehen, welche es gestatten, alle für die Theorie in Betracht kommenden, insbesondere also die elektrischen Eigenschaften, an demselben Stück und in möglichst weiten Temperaturgrenzen zu bestimmen.

Im Zusammenhang mit den physikalischen Untersuchungen über Wärmeleitung stehen manche aus Anforderungen der Technik entstandene Fragen, wie die nach dem Wärmedurchgang durch Heizflächen (s. Nr. **18**), nach dem Wärmeschutz von Dampfrohren, auch wohl das Problem der Wärmeverluste im Cylinder der Dampfmaschine, die vor allem auf einer nicht gewünschten periodischen Condensation und Wiederverdampfung an der Cylinderwand beruhen[85]).

15. Grundlagen und Voraussetzungen. Wie in Nr. **2** dargelegt ist, kann der Übergang der Wärme in dem zu untersuchenden Medium durch Strahlung, Leitung und Konvektion erfolgen. Die innere Ausstrahlung erreicht nun bei den gewöhnlichen Wärmeleitungsproblemen keinen bemerkenswerten Betrag; daher lässt sich die durchgehende Strahlung, sofern nicht bei manchen Gasen Absorption in Frage kommt, als einfach superponierter Vorgang behandeln[86]). Die Wärmeübertragung durch Konvektion wird, wo dies nötig ist, durch die Versuchsanordnung auf einen nicht mehr störenden Betrag herabgemindert. So kann man im allgemeinen und insbesondere stets bei festen Körpern den Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit einen reinen Leitungsvorgang zu Grunde legen.

Der bequemeren Bezugnahme wegen stellen wir die Grundlagen der Wärmeleitungstheorie, die in Nr. **2** und **3** entwickelt wurden, hier nach den Gesichtspunkten zusammen, die für das Folgende maassgebend sind.

Nach dem grundlegenden *Biot-Fourier'schen Ansatze* fliesst in einem homogenen isotropen Medium in der Zeit dt durch das auf der Richtung n senkrechte Flächenelement dF, wenn u die Temperatur angiebt, eine Wärmemenge

$$\text{(I)} \qquad dQ = -\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} dF\,dt;$$

(s. Gl. (1) und (2) in Nr. **2**). Durch diesen Ansatz ist die Wärmeleitungskonstante $\varkappa$ (Wärmeleitfähigkeit, Wärmeleitvermögen) definiert.

85) *H. L. Callendar* und *J. T. Nicolson*, Engineering 64 (1897), p. 678.

86) Ein Versuch zur Aufstellung einer gemeinsamen Theorie der Leitung und Strahlung ist von *R. A. Sampson* und ausführlicher von *A. Schuster* unternommen (Phil. Mag. 5 (1903), p. 243).

Durch Hinzunahme des Begriffs der spezifischen Wärme γ erhält man aus (I) mit *Fourier* die Differentialgleichung der Wärmeleitung (Gl. (5) in Nr. **3**)

$$\text{(II)} \qquad \gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

wo ϱ die Dichte bedeutet. Zur Vereinfachung der Rechnung werden meist, aber keineswegs immer, die Konstanten $\varkappa$, γ und ϱ als unabhängig von der Temperatur angenommen, wodurch die Differentialgleichung unter Einführung des Temperaturleitvermögens (Gl. (7) in Nr. **3**)

$$\text{(III)} \qquad k = \frac{\varkappa}{\gamma\varrho}$$

die Form erhält (Gl. (6) in Nr. **3**)

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}.$$

Die Annahme der Konstanz von $\varkappa$ und γ ist für genauere Untersuchungen nicht ohne weiteres zulässig. Während sie bei reinen Metallen meist ziemlich nahe zutrifft, kann bei Legierungen die Änderung von $\varkappa$ leicht 2 bis 3 Tausendstel pro 1^0 betragen (vgl. Nr. **31**). Häufig führt man für beide Grössen eine lineare Abhängigkeit von der Temperatur in die Rechnung ein. Dagegen kann die Berücksichtigung der Wärmeausdehnung wohl stets ohne merklichen Fehler unterbleiben.

Bei der praktischen Durchführung kann man im allgemeinen nicht verhindern, dass Wärmeströmung aus der Umgebung den zu messenden Vorgang stört. Man ist deswegen genötigt, über den Wärmeaustausch zwischen dem Versuchskörper und seiner Umgebung eine neue Voraussetzung zu machen, was gewöhnlich durch die Annahme des *Newton*'schen Abkühlungsgesetzes geschieht. Darnach wird die von dem Körper an das umgebende Medium (etwa eine lebhaft bewegte Flüssigkeit) abgegebene Wärme proportional der Temperaturdifferenz zwischen der Oberfläche des Körpers und dem Medium gesetzt. Die Proportionalitätskonstante und eventuell eine genauere Beziehung muss durch besondere Hülfsmessungen ermittelt werden. Durch Verbindung mit dem *Biot-Fourier*'schen Ausdruck für den Wärmefluss liefert das *Newton*'sche Abkühlungsgesetz die Oberflächenbedingung (Gl. (4) in Nr. **2**)

$$\text{(V)} \qquad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial n} = H(u - u_0),$$

wo n die Richtung der Normale von der Oberfläche nach aussen, u_0 die Aussentemperatur und H die äussere Wärmeleitfähigkeit ist.

In einem wichtigen Fall, nämlich wenn der Leiter die zur Messung der Wärmeleitfähigkeit und zugleich des elektrischen Leitvermögens besonders günstige Stabform besitzt, ist zumeist mit grosser Näherung eine Voraussetzung erfüllt, welche es ermöglicht, das *Newton*sche Abkühlungsgesetz direkt in die Differentialgleichung der Wärmeleitung aufzunehmen, sodass keine besondere Oberflächenbedingung für die Seiten des Stabes zu erfüllen bleibt. Diese Voraussetzung ist, dass innerhalb des Stabquerschnittes nur geringe Temperaturunterschiede vorkommen. Man erhält dann aus der ursprünglichen die neue Differentialgleichung auf folgende Weise[87]).

Die Axe des Stabes sei die x-Axe des Koordinatensystems. Man multipliziere die Gleichung (IV) mit $dy\,dz$ und integriere über den Stabquerschnitt q, dessen Randelement ds ist. Dabei wird

$$\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dy\,dz=\int\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=-\frac{H}{\varkappa}\int(u-u_0)\,ds$$

und, wenn u' die Mitteltemperatur im Querschnitt, u'' die Mitteltemperatur auf dem Umfang p des Querschnitts, $h=\frac{Hp}{\gamma\varrho q}$ eine Konstante bedeutet,

$$\frac{\partial u'}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}-h(u''-u_0)\,.$$

Wenn angenähert $u''=u'$ ist, kann für die Mitteltemperatur des Querschnitts die Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung (s. Nr. **5**, Gl. (15)) angenommen werden:

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0)\,,$$

wobei sich die Konstante

$$\text{(VII)}\qquad h=\frac{Hp}{\gamma\varrho q}$$

als „äussere Temperaturleitfähigkeit eines linearen Leiters“ definieren lässt[88]). Der relative Einfluss der äusseren Wärmeleitung (und damit zugleich der erforderliche Grad der Annäherung $u''=u'$) wird um so geringer, je grösser das erste Glied auf der rechten Seite von (VI) gegen das zweite ist, und dies ist unter sonst gleichen Bedingungen um so mehr der Fall, je grösser $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist, je mehr also der augenblick-

87) *Kirchhoff,* Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig 1894, p. 33.

88) In Teil I ist dafür h' gesetzt zur Unterscheidung von der äusseren Temperaturleitfähigkeit eines körperlichen Leiters $h=\frac{H}{\varkappa}$.

liche Zustand vom stationären Endzustand abweicht. Bei den Messungen ist dieser Umstand wohl zu beachten.

Zu diesen Grundlagen der nachfolgenden Methoden treten da, wo die Grenzfläche zweier Leiter (1) nnd (2) in Betracht kommt, die *Fourier*'schen Stetigkeitsbedingungen (Gl. (3) in Nr. 2), dass längs der Grenzfläche (mit der Normalen n) gilt:

$$\text{(VIII)} \qquad u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad \varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}.$$

Für nicht isotrope Medien endlich bilden den Ausgangspunkt die allgemeineren Gesetze der Wärmebewegung, welche *Duhamel* aufgestellt hat (vgl. Nr. **4**).

16. Allgemeine Übersicht über die Methoden. Die Definition der Wärmeleitungskonstante vermittelst der *Biot-Fourier*'schen Grundannahme enthält vier verschiedene Grössen: Wärmemenge, Temperatur, Länge und Zeit. Zur absoluten Bestimmung des Wärmeleitvermögens sind diese vier Grössen absolut zu messen. Will man nur das Verhältnis der Leitfähigkeiten zweier Medien haben, so brauchen die genannten vier Grössen bei beiden Substanzen ebenfalls nur relativ zueinander bekannt zu sein.

Die Methoden schliessen sich an spezielle Lösungen der Gleichung (II) bezw. (IV) oder (VI) an. Eine Gruppe entspricht den Lösungen für $\partial u / \partial t = 0$, d. h. dem stationären Zustand. Da hier die Wärmeleitungskonstante aus der Gleichung (IV) fortfällt, müssen diese Methoden zugleich auf die Definition von $\varkappa$ (Gl. I) zurückgehen (*Péclet*), oder von $\varkappa$ abhängige Grenzbedingungen, wie (V), bezw. die dadurch entstandene Gleichung (VI) benutzen (*Despretz*). Bei den hierher gehörenden absoluten Methoden werden die vier Definitionsgrössen direkt gemessen.

Eine zweite Gruppe von Methoden (*Forbes*, *Angström*, *Neumann* u. a.) benutzt von der Zeit abhängende Lösungen, welche den Vorteil geringer Abhängigkeit von der äusseren Wärmeleitung selbst bei Stabform besitzen (vgl. Nr. **15**). Die absolute Bestimmung liefert dabei aus Temperatur-, Zeit- und Längenmessung das Temperaturleitvermögen $k = \varkappa / \gamma \varrho$. Die direkte Messung der Wärmemenge fällt fort und an ihre Stelle tritt eine gesonderte Bestimmung der spezifischen Wärme, wenn man aus dem Temperaturleitvermögen das Wärmeleitvermögen erhalten will. Auch die Temperaturmessung ist bei diesen Methoden vereinfacht, da man zur Berechnung von k nur das Verhältnis zweier Temperaturen zu kennen braucht, also irgend eine der Temperatur proportionale Grösse, wie die elektromotorische Kraft eines Thermo-