

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0127

**LOG Titel:** 22. Methode von Angström (1861)

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

und durch Strahlung

$$Q_S = 4\pi\sigma R^2(T^4 - T_0^4).$$

Für die Längeneinheit eines Cylinders in einem umgebenden Hohlzylinder betragen die entsprechenden Mengen

$$Q_L = \frac{2\pi\kappa(T - T_0)}{\log \frac{R_0}{R}} \quad \text{und} \quad Q_S = 2\pi\sigma R(T^4 - T_0^4).$$

Bei abnehmendem Radius  $R$  verschwindet  $Q_S$  schneller als  $Q_L$ . Sehr kleine Körper in luftverdünnter Umgebung verlieren also ihre Wärme vornehmlich durch Leitung<sup>101)</sup>, sehr grosse durch Strahlung. Als Zahlenwerte kann man annehmen: für  $\sigma$  nach den absoluten Messungen von *Kurlbaum*<sup>102)</sup> bei einer Oberfläche, deren Reflexionsvermögen  $r$  beträgt,  $\sigma = (1 - r) 1,28 \cdot 10^{-12} \frac{\text{gr. cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$  und für  $\kappa$  bei Luft von der Temperatur  $u^0$  Cels.  $\kappa = 50 \cdot 10^{-6} (1 + 0,002 u) \frac{\text{gr. cal}}{\text{cm sec} \times \text{Grad}}$ .

**22. Methode von Angström (1861)**<sup>103)</sup>. Die erste Methode, welche keinen stationären Zustand, sondern die zeitliche Änderung der Temperaturverteilung benutzt, rührt von *Angström* her. Ein langer Stab in einer Umgebung von der Temperatur 0 wird an einem Ende ( $x = 0$ ) periodisch erwärmt und abgekühlt (Periodendauer  $T$ ). Der Vorgang wird dargestellt durch das Integral der Gleichung (IX)

$$(XI) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n x} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} - \beta_n x + \gamma_n\right),$$

wo die  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  aus den Gleichungen

$$(XII) \quad \alpha_n \beta_n = \frac{n\pi}{kT}; \quad \alpha_n^2 - \beta_n^2 = \frac{h}{k}$$

zu berechnen und die  $A_n$  und  $\gamma_n$  von dem zeitlichen Ablauf der dem einen Ende zugeführten Erwärmung abhängen.

Für zwei Stellen ( $x$  und  $x + l$ ) wird der Temperaturverlauf als Funktion der Zeit beobachtet und als Kosinusreihe mit der Periode  $T$  dargestellt:

101) Hiernach lässt sich erwarten, dass die von *Schleiermacher* u. a. benutzte Methode, die Wärmeleitung eines Gases aus der Temperatur und dem Energieverbrauch eines elektrisch erwärmten Drahtes zu finden, bei Anwendung sehr dünner Drähte bis zu relativ hohen Temperaturen brauchbar bleibt.

102) *F. Kurlbaum*, Ann. Phys. Chem. 65 (1898), p. 753.

103) *A. J. Angström*, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 513; 123 (1864), p. 628.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + b_n\right),$$

$$u(x+l) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + b'_n\right).$$

Für die so gefundenen Koeffizienten  $a, b, a', b'$  gelten, da die Reihen in der Form (XI) enthalten sein müssen, die Gleichungen

$$\frac{a'_n}{a_n} = e^{\alpha n t}; \quad b_n - b'_n = \beta_n l.$$

Sind hieraus für irgend ein  $n$  die Werte  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  gefunden, so erhält man aus (XII) die Grössen  $h$  und  $k$ .

Eine Abänderung der *Angström'schen* Methode in der Weise, dass beide Stabenden abwechselnd erwärmt und abgekühlt werden, hat *Fr. Neumann* in seinen Vorlesungen gegeben und *H. Weber*<sup>104)</sup> durchgeführt. Hier ist jedoch die nicht zutreffende Annahme gemacht, dass die Endflächen durch Wasserspülung plötzlich auf eine andere Temperatur gebracht werden (vgl. Nr. 18), die bei *Angström* nicht zu Grunde gelegt ist.

Die Unabhängigkeit von unsicheren Voraussetzungen bildet einen wesentlichen Vorzug der *Angström'schen* Methode. Den Temperaturverlauf als Funktion der Zeit zu bestimmen ist mit Thermoelement, Spiegelgalvanometer und Chronograph, ev. photographisch, leicht und genau ausführbar. Bei der Berechnung können die harmonischen Analysatoren (s. II A 2, Nr. 60) gute Dienste leisten.

**23. Methoden von Fr. Neumann (1862)**<sup>105)</sup>. Gute Leiter untersucht *Neumann* in Stabform. Der Stab wird an Fäden aufgehängt, an einem Ende erwärmt und dann sich selbst überlassen. Durch die Endflächen findet ebenso wie durch die Seitenflächen Ausstrahlung statt. Darnach treten zu Differentialgleichung (IX) die Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } x \frac{\partial u}{\partial x} = Hu,$$

$$\text{„ } x = l \text{ „ } x \frac{\partial u}{\partial x} = -Hu.$$

Ein Integral, welches diesen Bedingungen genügt und sich einem beliebigen Anfangszustande anpassen lässt, ist (s. Nr. 5g)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n t} \left( \cos \lambda_n x + \frac{b}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right),$$

104) *H. Weber*, Ann. Phys. Chem. 146 (1872), p. 257.

105) *F. Neumann*, Ann. chim. phys. 66 (1862), p. 183; *Kirchhoff*, Vorl., p. 35.