Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0127
LOG Titel: 22. Methode von Angström (1861)
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

und durch Strahlung

$$Q_S = 4\pi\sigma R^2 (T^4 - T_0^4).$$

Für die Längeneinheit eines Cylinders in einem umgebenden Hohlcylinder betragen die entsprechenden Mengen

$$Q_L = \frac{2\pi\varkappa(T - T_0)}{\log\frac{R_0}{R}} \quad \text{und} \quad Q_S = 2\pi\sigma R(T^4 - T_0^4).$$

Bei abnehmendem Radius R verschwindet Q_S schneller als Q_L. Sehr kleine Körper in luftverdünnter Umgebung verlieren also ihre Wärme vornehmlich durch Leitung[101]), sehr grosse durch Strahlung. Als Zahlenwerte kann man annehmen: für σ nach den absoluten Messungen von *Kurlbaum*[102]) bei einer Oberfläche, deren Reflexionsvermögen r beträgt, $\sigma = (1 - r)\,1{,}28 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{gr. cal}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}$ und für $\varkappa$ bei Luft von der Temperatur u^0 Cels. $\varkappa = 50 \cdot 10^{-6}(1 + 0{,}002\,u)\frac{\text{gr. cal}}{\text{cm sec} \times \text{Grad}}$.

22. Methode von Angström (1861)[103]). Die erste Methode, welche keinen stationären Zustand, sondern die zeitliche Änderung der Temperaturverteilung benutzt, rührt von *Angström* her. Ein langer Stab in einer Umgebung von der Temperatur 0 wird an einem Ende ($x = 0$) periodisch erwärmt und abgekühlt (Periodendauer T). Der Vorgang wird dargestellt durch das Integral der Gleichung (IX)

$$\text{(XI)} \qquad u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n x} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} - \beta_n x + \gamma_n\right),$$

wo die α_n und β_n aus den Gleichungen

$$\text{(XII)} \qquad \alpha_n\beta_n = \frac{n\pi}{kT}; \quad \alpha_n^2 - \beta_n^2 = \frac{h}{k}$$

zu berechnen und die A_n und γ_n von dem zeitlichen Ablauf der dem einen Ende zugeführten Erwärmung abhängen.

Für zwei Stellen (x und $x + l$) wird der Temperaturverlauf als Funktion der Zeit beobachtet und als Kosinusreihe mit der Periode T dargestellt:

---

101) Hiernach lässt sich erwarten, dass die von *Schleiermacher* u. a. benutzte Methode, die Wärmeleitung eines Gases aus der Temperatur und dem Energieverbrauch eines elektrisch erwärmten Drahtes zu finden, bei Anwendung sehr dünner Drähte bis zu relativ hohen Temperaturen brauchbar bleibt.

102) *F. Kurlbaum,* Ann. Phys. Chem. 65 (1898), p. 753.

103) *A. J. Angström,* Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 513; 123 (1864), p. 628.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + b_n\right),$$

$$u(x+l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n' \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + b_n'\right).$$

Für die so gefundenen Koeffizienten a, b, a', b' gelten, da die Reihen in der Form (XI) enthalten sein müssen, die Gleichungen

$$\frac{a_n}{a_n'} = e^{\alpha_n l}; \quad b_n - b_n' = \beta_n l.$$

Sind hieraus für irgend ein n die Werte α_n und β_n gefunden, so erhält man aus (XII) die Grössen h und k.

Eine Abänderung der *Angström*'schen Methode in der Weise, dass beide Stabenden abwechselnd erwärmt und abgekühlt werden, hat *Fr. Neumann* in seinen Vorlesungen gegeben und *H. Weber*[104]) durchgeführt. Hier ist jedoch die nicht zutreffende Annahme gemacht, dass die Endflächen durch Wasserspülung plötzlich auf eine andere Temperatur gebracht werden (vgl. Nr. **18**), die bei *Angström* nicht zu Grunde gelegt ist.

Die Unabhängigkeit von unsicheren Voraussetzungen bildet einen wesentlichen Vorzug der *Angström*'schen Methode. Den Temperaturverlauf als Funktion der Zeit zu bestimmen ist mit Thermoelement, Spiegelgalvanometer und Chronograph, ev. photographisch, leicht und genau ausführbar. Bei der Berechnung können die harmonischen Analysatoren (s. II A 2, Nr. **60**) gute Dienste leisten.

23. Methoden von Fr. Neumann (1862)[105]). Gute Leiter untersucht *Neumann* in Stabform. Der Stab wird an Fäden aufgehängt, an einem Ende erwärmt und dann sich selbst überlassen. Durch die Endflächen findet ebenso wie durch die Seitenflächen Ausstrahlung statt. Darnach treten zu Differentialgleichung (IX) die Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \varkappa \frac{\partial u}{\partial x} = Hu,$$

$$\text{„} \quad x = l \quad \text{„} \quad \varkappa \frac{\partial u}{\partial x} = -Hu.$$

Ein Integral, welches diesen Bedingungen genügt und sich einem beliebigen Anfangszustande anpassen lässt, ist (s. Nr. **5**g)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n t}\left(\cos \lambda_n x + \frac{b}{\lambda_n} \sin \lambda_n x\right),$$

104) *H. Weber,* Ann. Phys. Chem. 146 (1872), p. 257.

105) *F. Neumann,* Ann. chim. phys. 66 (1862), p. 183; *Kirchhoff,* Vorl., p. 35.