Kirchhoff und *Hansemann* benutzten, um den Einfluss der äusseren Wärmeleitung herabzudrücken, als Versuchskörper einen Würfel von 14 cm Kantenlänge, der zu Anfang ~~die gleich~~ Null gesetzte Temperatur der Umgebung besass. Die eine Seite wurde der plötzlichen Temperaturänderung unterworfen, für die anderen Seiten gilt die Oberflächenbedingung (V). Die zugehörige Lösung der Differentialgleichung (IV) kann man sich als Reihe nach Potenzen von h entwickelt denken. *Kirchhoff* und *Hansemann* beschränkten sich auf die beiden ersten Glieder, setzten also

$$u = U_0 + h\,U_1 .$$

U_0 ist die Lösung ohne Rücksicht auf äussere Wärmeleitung und hängt nur von der einen Koordinate x ab. Man erhält U_0 durch eine Superposition von Lösungen des idealen Problems nach der Spiegelungsmethode (vgl. Nr. **6**)

$$U_0 = U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + U\left(\frac{2l-x}{2\sqrt{kt}}\right) - U\left(\frac{2l+x}{2\sqrt{kt}}\right) - U\left(\frac{4l-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \cdots,$$

wobei

$$U(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

gesetzt ist. U_1 wird in Näherung durch ein System von Reihen dargestellt. Mittels der Ausdrücke für U_0 und U_1 wird ein beobachteter Temperaturverlauf $u = f(t)$ auf den Fall des idealen Problems reduziert und aus der Darstellung $f(t)_{\text{red}} = U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)$ der Koeffizient k berechnet.

Die vorausgesetzte Grenzbedingung einer plötzlichen Temperaturänderung der Grenzfläche suchten *Kirchhoff* und *Hansemann* durch Anspritzen mit Wasser zu verwirklichen, überzeugten sich aber, dass dies nicht gelang, und führten dann als Temperatur der Grenzfläche $C + \varphi(t)$ in die Rechnung ein, indem sie $\varphi(t)$ als klein gegen die Konstante C annahmen. Durch Hinzufügen einer Beobachtungsreihe in einem der Grenzfläche nahe gelegenen Punkte wurde $\varphi(t)$ eliminiert.

Im allgemeinen genügt freilich die Annahme, dass $\varphi(t)$ klein sei, dem wirklichen Vorgang an der Grenzfläche nicht (vgl. Nr. **18** und **21**).

25. Methode von L. Lorenz (1881)[111]. *Lorenz* gründete seine Methode nicht auf ein explicites Integral der Wärmeleitungsgleichung, sondern führte an dem untersuchten Stabe experimentell eine mecha-

111) *L. Lorenz*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 422 u. 582.

nische Quadratur derselben aus, indem er eine grosse Anzahl von Thermoelementen verwandte. Das untersuchte Stück des Stabes werde in n Teile von der Länge l zerlegt gedacht; ferner werde die Gleichung (IX) mit dx multipliziert und an ihr die doppelte Integration $\int\limits_0^{(n-1)l} dx \int\limits_x^{x+l} dx$ ausgeführt. Benutzt man dabei, dass für eine beliebige Funktion $f(x)$

$$\int\limits_0^{(n-1)l} dx \int\limits_x^{x+l} f(x)\,dx = l^2\{f(l) + f(2l) + \cdots + f((n-1)l)\}$$
$$+ \tfrac{1}{12} l^2 \{f(0) - f(l) - f((n-1)l) + f(nl)\} + \cdots,\text{[112]}$$

oder auch

$$= l^2\{f(\tfrac{11}{12}l) + f(2l) + \cdots + f((n-2)l) + f((n-\tfrac{11}{12})l)\} + \cdots$$

ist, und setzt

$$\Sigma = u_{\frac{11}{12}l} + u_{2l} + \cdots + u_{(n-2)l} + u_{\left(n-\frac{11}{12}\right)l},$$
$$\Delta = u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl},$$

wo u_a die Temperatur im Querschnitt $x = a$, so erhält man

$$l^2 \frac{d\Sigma}{dt} = k\Delta - hl^2\Sigma.$$

Σ und Δ sind durch geeignete Kombination von Thermoelementen direkt messbar. Nun führt man zwei verschiedene Vorgänge herbei, indem man zunächst die Stange von einem Ende aus erwärmt und dann mit der Erwärmung aufhört, sodass im ersten Teil Σ wächst und im zweiten die früheren Werte rückwärts durchläuft, während Δ nach Aufhören der Erwärmung bald in einen sehr kleinen Wert Δ' übergeht. Für den ersten Vorgang gilt die letzte Gleichung; für den zweiten folgt ebenso

$$l^2 \frac{d\Sigma'}{dt} = k\Delta' - hl^2\Sigma'$$

und durch Subtraktion für je zwei Werte $\Sigma = \Sigma'$

$$l^2\left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}\right) = k(\Delta - \Delta'),$$

woraus k berechnet wird.

Lorenz bildete die Methode noch weiter aus, indem er die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Temperatur berücksichtigte. Die Erwärmung des Stabes leitete er so, dass Δ während der Beobachtung konstant blieb.

---

112) Die Formel ergiebt sich, wenn $f(x)$ in jedem der Intervalle $(0, l)$ $(l, 2l) \cdots ((n-2))\,l$, $(n-1)l)$ mittels Differenzenreihen durch die in I D 3 (Art. *Bauschinger,* Interpolation) Gl. (5) gegebene Interpolationsformel dargestellt und die Integration ausgeführt wird.