

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0160

**LOG Titel:** b) Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe.

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## b) Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. Von L. Prandtl.

Vorbemerkung. Die *Bezeichnung der Formelgrößen* ist gemäss der Zusammenstellung von p. 235 gewählt. Folgende Größen kommen neu hinzu:

| Zeichen               | Benennung  | Dimension                  |
|-----------------------|--|----------------------------|
| $w$                   | Geschwindigkeit  | $\frac{m}{sec}$            |
| $a$                   | Schallgeschwindigkeit  | $\frac{m}{sec}$            |
| $g$                   | Erdbeschleunigung  | $= 9,81 \frac{m}{sec^2}$   |
| $\rho = \frac{1}{gv}$ | Dichtigkeit, Masse der Volumeinheit                          | $\frac{kg \ sec^3}{m^4}$   |
| $G$                   | Sekundliche Gewichtsmenge,<br>„Ausflussgewicht“              | $\frac{kg}{sec}$           |
| $F$                   | Strömungsquerschnitt   | $m^2$                      |
| $\alpha$              | Kontraktionsziffer   | unbenannt                  |
| $\mu$                 | Ausflussziffer   | „                          |
| $z$                   | Widerstandsarbeit pro 1 kg Flüssigkeit,<br>„Widerstandshöhe“ | $m$                        |
| $\xi, \xi_1$          | Widerstandskoeffizienten                                     | unbenannt, $\frac{1}{m}$ . |

*Masseinheiten.* Als Masssystem ist ebenso wie in dem ersten Teil des Artikels das „technische“ benutzt, d. h. jenes, in dem Länge, Zeit und Kraft die Fundamenteinheiten sind. Es bedeuten hiermit also die Größen  $u, v$  die innere Energie und das Volumen der *Gewichtseinheit*. Die Formeln sind fast durchgängig in den Dimensionen homogen, wo nicht, sind als Einheiten das Meter, die Sekunde und das Kilogramm gewählt; die Wärmemengen sind in der Regel im Arbeitsmass gemessen, d. h. das Wärmeäquivalent  $A$  ist  $= 1$  gesetzt (vgl. V 3, 2, *Bryan*); nur in den für den numerischen Gebrauch bestimmten Formeln ist das Wärmeäquivalent besonders bezeichnet.

*Abkürzungen* in den Zitaten:

*Zeuner*, Therm. = Technische Thermodynamik, 1. und 2. Aufl. (Leipzig 1887, 1900).

*Grashof*, Masch.-L. = Theoretische Maschinenlehre (Leipzig 1875).

*Stodola*, Dampfturb. = Die Dampfturbinen, 3. Aufl. (Berlin 1905); (in Klammern sind die §§ der 1. Aufl. beigelegt).

Forschungsarb. = Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (herausgeg. vom Ver. deutscher Ing., Berlin).

*Anmerkung.* Eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Gebietes findet sich in Nr. 18.

**15. Abgrenzung des Stoffes.** Die Bewegungserscheinungen der Gase zeigen, so lange die Geschwindigkeiten und die Druckdifferenzen in mässigen Grenzen bleiben, wesentlich dasselbe Gepräge, wie die der volumenbeständigen Flüssigkeiten<sup>29)</sup>, deren Theorie im Band IV dieser Encyclopädie in den Artikeln 15 und 16 (Hydrodynamik) von *Love*, und 20 (Hydraulik) von *Forchheimer* behandelt ist. Handelt es sich indes um grosse Druckdifferenzen und Geschwindigkeiten<sup>30)</sup>, so ist die Veränderlichkeit des Volumens von grossem Einfluss auf die Bewegungserscheinungen. Der Umstand, dass diese Druck- und Volumen-Änderungen nur im Zusammenhalt mit den thermischen Vorgängen in dem Gase oder Dampfe richtig beurteilt werden können, gab die Veranlassung dazu, diesen Abschnitt in Band V in die Wärmetheorie einzuordnen, während derjenige Teil, der sich mit den mässigen Geschwindigkeiten befasst, die sogenannte Aërodynamik, sich als Artikel 17 von *Finsterwalder* in Band IV bei den hydrodynamischen Abhandlungen befindet.

Viele von den hier behandelten Aufgaben gehen in der Problemstellung, wie in der Art der Behandlung völlig parallel mit entsprechenden Aufgaben der Hydraulik. An derartigen Stellen des Textes finden sich Hinweise auf die entsprechenden Abschnitte des Artikels von *Forchheimer*.

Mit Ausnahme von Nr. 22 beziehen sich die nachstehend zu behandelnden Aufgaben nur auf *stationäre* Bewegungen; die Ergebnisse sind indes ohne grossen Fehler auch für langsam veränderliche Bewegungen verwendbar<sup>31)</sup>, wie sie sich z. B. beim Ausströmen aus einem Gefäss mit einer nicht zu grossen Öffnung ergeben.

---

29) Zur Illustration dieser Bemerkung sei erwähnt, dass für Luft zur Erzeugung einer Geschwindigkeit von  $40 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  eine Druckdifferenz von 1% des absoluten Druckes genügt; die entsprechende Dichtigkeitsdifferenz ist dann (unter Zugrundelegung der Adiabate) 0,7%. Rechnet man statt mit der veränderlichen Dichte mit einer mittleren konstanten Dichte, so wird bei der obigen, etwa einem starken Sturme entsprechenden Geschwindigkeit dieser Fehler gegenüber anderen, schwerer zu berücksichtigenden Einflüssen ganz bedeutungslos.

30) Eine Geschwindigkeit oder Druckdifferenz kann als gross oder klein angesehen werden, je nachdem sie im Vergleich mit der Schallgeschwindigkeit bezw. mit dem absoluten Druck in Betracht kommt oder nicht.

31) Als langsam veränderlich kann eine Bewegung so lange gelten, als  $\frac{\partial w}{\partial t}$

Die *Helmholtz'schen* Wirbelgesetze<sup>32)</sup>, insbesondere der Satz, dass eine anfänglich ruhende Flüssigkeitsmasse sich dauernd wirbelfrei bewegt, sind unter Annahme der Reibungslosigkeit auch auf Gase anwendbar; ausgenommen sind allerdings diejenigen Bewegungsformen, bei denen endliche Drucksprünge<sup>33)</sup> auftreten. Diese Überlegung ist von Nutzen, wenn man sich Rechenschaft darüber ablegen will, in wie weit man berechtigt ist, die Aufgaben über Gasströmung — wie das bisher durchaus üblich war — als eindimensionale Probleme zu behandeln<sup>34)</sup>. Man kann die Sache so auffassen, dass man aus der ganzen Strömung *einen* „Stromfaden“, etwa den mittelsten, willkürlich zur Behandlung herausgreift, und hernach Druck und Geschwindigkeit für die korrespondierenden (im selben „Querschnitt“ gelegenen) Punkte der übrigen Stromfäden gleich den gefundenen Werten setzt. Für ein Rohr von veränderlichem Querschnitt enthalten die hierdurch begangenen Vernachlässigungen bei Wirbelfreiheit die Krümmung der Rohrwand in der Strömungsrichtung in der ersten Potenz, die Neigung der Rohrwand gegen die Achse in der zweiten Potenz. Bei den turbulenten Bewegungen<sup>35)</sup>, die bei längeren Rohren die Regel bilden, ist man von vornherein zur Einführung von Mittelwerten gezwungen, so dass man hier von selbst auf das eindimensionale Problem geführt wird.

**16. Allgemeine Theorie der stationären Strömungen.** — *Problemstellung.* Eine zusammendrückbare („elastische“) Flüssigkeit sei in stationärer Bewegung begriffen. Untersucht wird der Bewegungszustand eines mittleren Stromfadens, der als Repräsentant für alle übrigen Stromfäden betrachtet wird. Es soll, unter Berücksichtigung der Wirkung von äusseren Kräften, von Strömungswiderständen und Wärmemitteilung durch die Wandungen, das Verhalten von Druck, Volumen und Geschwindigkeit in der strömenden Flüssigkeit untersucht werden, unter der Voraussetzung, dass für irgend einen Querschnitt diese Grössen ( $p, v, w$ ) gegeben sind. Die thermodynamischen Eigenschaften der Flüssigkeit werden dabei als gegeben vorausgesetzt, ebenso die — meist durch feste Wände gebildete — Begrenzung des Flüssigkeitsstromes.

gegen  $w \frac{\partial w}{\partial x}$  u. s. w. und  $gv \frac{\partial p}{\partial x}$  u. s. w. (Euler'sche Gleichungen IV 15, 8) nicht in Betracht kommt.

32) IV 16, 3, auch 2, (*Love*).

33) Vgl. Nr. 20 u. IV 19, 11 (*Zemplén*).

34) Diese Behandlungsart ist auch hier in Nr. 16—20 festgehalten.

35) IV 15, 17 (*Love*).

Zur Behandlung des vorstehenden Problems dienen die im Folgenden zu gewinnenden Gleichungen.

Im stationären Strömungszustand muss durch jeden Querschnitt des Stromes in der Zeiteinheit dasselbe Flüssigkeitsgewicht  $G$  hindurchtreten; es muss also sein:

$$(a) \quad \frac{F \cdot w}{v} = G = \text{const.}$$

(*kinematische* oder *Kontinuitäts-Gleichung*).

Die Aussage, dass jedes Massenelement in der Bewegungsrichtung nach Massgabe der dort wirkenden äusseren Kräfte beschleunigt wird, führt zu der *mechanischen Gleichung*:

$$(b) \quad \frac{w \, dw}{g} + v \, dp + dh + dz = 0.$$

Hierin bedeutet  $dh$  eine der Schwerkraft entgegengesetzte, also nach oben positive Höhenveränderung,  $dz$  einen durch Reibung u. dgl. verursachten Bewegungswiderstand, gemessen durch die sog. Widerstandshöhe. Die einzelnen Terme der Gl. (b), wie auch der folgenden Gleichungen stellen Energieänderungen (Arbeiten) pro Gewichtseinheit des Gases vor.

Als dritte Gleichung hat man die Aussage, welche der erste Hauptsatz der Thermodynamik (Gl. 3, p. 243) für den Zustand im Innern des Massenelements liefert. Zu beachten ist dabei, dass die Widerstandsarbeit  $dz$  in Gl. (b) hier als zugeführte Wärme neben der von aussen zugeführten Wärme  $dq$  wieder auftritt. Die *Wärme-gleichung* lautet also:

$$(c) \quad dq + dz = du + p \, dv.$$

Durch Verbindung von Gl. (c) mit (b) erhält man die Gleichung

$$du + d(pv) + \frac{w \, dw}{g} + dh = dq,$$

die integrierbar ist und in dieser Form:

$$(d) \quad u + pv + \frac{w^2}{2g} + h = \text{const.} + q$$

als *Gleichung der Gesamtenergie* angesprochen werden darf. (Mit  $G = F \frac{w}{v}$  multipliziert, giebt die linke Seite der Gl. den gesamten sekundlichen Energietransport durch den Querschnitt  $F$ ;  $Gq$  ist dabei die bis zum Querschnitt  $F$  dem Gas zugeführte Wärme.) Die Widerstandsarbeit  $z$  kommt in dieser Gleichung nicht vor, da die verschwundene Arbeit als Wärme in der Gesamtenergie enthalten bleibt.

Durch Einführung der „Erzeugungswärme“  $i = u + pv$  (thermo-

dynam. Potential  $\mathfrak{F}$ , in Art. V 3)<sup>36)</sup> gewinnt Gl. (d) die im folgenden gebrauchte, etwas einfachere Gestalt

$$i + \frac{w^2}{2g} + h = \text{const.} + q.$$

Ist von der strömenden Flüssigkeit das Gesetz der inneren Energie

$$u = f(p, v)$$

bekannt, ferner das Gesetz für den Bewegungswiderstand  $z$  und die Wärmemitteilung  $q$ , so reichen die Gleichungen (a) bis (d) aus, um für vorgegebene geometrische Verhältnisse der Strömung (Angabe über  $F$  und  $h$  an jeder Stelle des Stromfadens) die Lösung des Problems völlig bestimmt zu machen, falls ein Anfangszustand  $(p_0, v_0, w_0)$  oder äquivalente Daten gegeben sind. Wird die Wärmemitteilung als von Temperaturdifferenzen abhängig dargestellt, so muss zur Festlegung der Temperatur in der strömenden Flüssigkeit noch die „Zustandsgleichung“

$$F(p, v, T) = 0$$

hinzugenommen werden.

Die vorstehende strenge Grundlegung des Problems findet sich — allerdings nicht genau in obiger Fassung, und gleich für permanente Gase spezialisiert — bei *F. Grashof* 1863<sup>37)</sup>. Ausführliche Darstellungen finden sich in *Grashof*, Masch.-L. § 75; *Zeuner*, Therm. § 40.

Wirklich durchgeführte Rechnungen mit diesen allgemeinen Voraussetzungen existieren nicht. Die Höhenunterschiede  $h$ , die praktisch sehr wenig Bedeutung besitzen, sind durchweg vernachlässigt. Meist bleibt auch die Wärmemitteilung unberücksichtigt. (Eine Lösung mit Wärmeleitung bei Rohrleitungen von konstantem Querschnitt giebt *Grashof*<sup>38)</sup>, eine Behandlung des Ausflussproblems *Fliegner*<sup>39)</sup>).

Eine graphische Darstellung der in Gl. (b) bis (d) enthaltenen Beziehungen, die sich zuerst bei *Zeuner*<sup>40)</sup> findet, möge in der etwas veränderten Fassung, die ihr *Stodola*<sup>41)</sup> und *Büchner*<sup>42)</sup> gegeben haben, hier Erwähnung finden.

36) Vgl. p. 243, Ziff. 5, ferner p. 254 und 260.

37) „Über die Bewegung der Gase im Beharrungszustande in Röhrenleitungen und Kanälen“, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 7 (1863), p. 243, 273, 335.

38) Masch.-L. § 109 u. 115.

39) *Civiling.* 23 (1877), p. 433.

40) *Civiling.* 17 (1871), p. 71.

41) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 47 (1903), p. 1 u. f. = Dampfturb. § 21 u. 22 (§ 2 u. 3).

42) Zur Frage der Laval'schen Turbinendüsen. Diss. Dresden 1903 =

In Fig. 53 soll in einem  $p$ - $v$ -Koordinatensystem die Geschwindigkeitserzeugung in einem Gase (oder Dampfe) verfolgt werden, das von dem Zustand  $p_1, v_1$ , wo die Geschwindigkeit  $w = 0$  ist, beginnend, längs der Kurve 1-2 expandiert. Höhendifferenzen und Wärmemitteilung sollen ausser Betracht bleiben. Gleichung (b) und (d) lauten somit in der Integralform

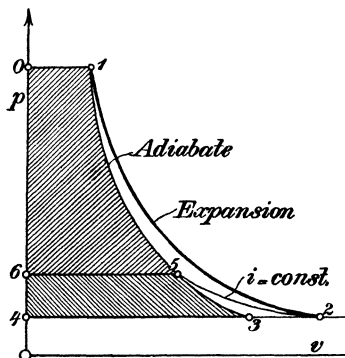


Fig. 53.

$$(b) \quad \frac{w^2}{2g} = \int_2^1 v dp - z;$$

$$(d) \quad \frac{w^2}{2g} = i_1 - i_2.$$

Zieht man durch 1 eine Adiabate bis zum Druck  $p_2$  herab (1-3), so hat man, da diese das Zustandsgesetz bei widerstandsloser Bewegung ist (vgl. den nächsten Abschnitt), in der Fläche 0-1-3-4-0 ein Mass für die verfügbare kinetische Energie:

$$(b'') \quad \frac{w^2}{2g} = \int_3^1 v dp.$$

Die wirklich erreichte kinetische Energie ergibt sich, wenn man durch 2 eine Kurve  $i = \text{const.}$  bis zum Schnittpunkt 5 mit der Adiabate legt; nach (d') und (b'') wird sie durch die Fläche 0-1-5-6-0 dargestellt. Somit repräsentiert die Fläche 5-6-4-3-5 den durch die Widerstände verursachten Energieverlust.

Durch Vergleich von (b') mit (b'') findet man, dass die Widerstandsarbeit  $z$  durch die Fläche 1-2-4-6-5-1 dargestellt ist; dass diese Fläche um den nicht schraffierten Teil 1-2-3-1 grösser ist als die des Energieverlustes, ist damit zu erklären, dass ein Teil der in Wärme verwandelten Widerstandsarbeit zur weiteren Expansion nutzbringend Verwendung findet.

Eine ähnliche Darstellung lässt sich in Temperatur-Entropiekoordinaten (dem sog. Wärmediagramm) durchführen (Fig. 54). Die Flächen  $\infty$ -1-1'- $\infty$  und  $\infty$ -2-2'- $\infty$  stellen  $i_1$  und  $i_2$  dar, 1-3 ist die Adiabate, die verfügbare Energie  $\frac{w'^2}{2g} = i_1 - i_3$  ist durch  $\infty$ -1-3- $\infty$  dargestellt, der Energieverlust durch 1'-3-2-2'-1', die Widerstandsarbeit  $z$  durch 1'-1-2-2'-1'.

Noch einfacher, aber weniger eindrucksvoll wird die Darstellung im  $i$ - $s$ -System (Fig. 55); die Strecke 1-3 stellt die verfügbare, 1-5 die erreichte kinetische Energie, 5-3 den Verlust dar.

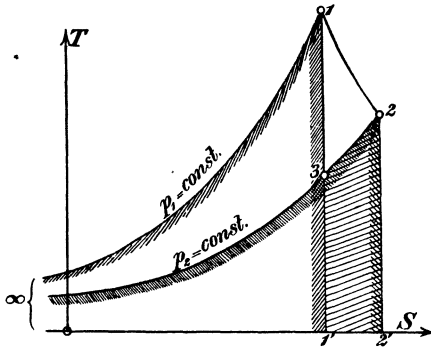


Fig. 54.

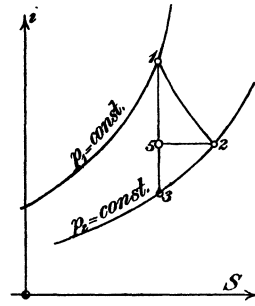


Fig. 55.

Ist am Ende des Strömungsvorgangs die Geschwindigkeit wieder  $= 0$ , so ist nach (d')  $i_1 = i_2$ . Dies ist die Beziehung, welche beim Überströmen mit Vernichtung der Strömungsgeschwindigkeit eintritt (vgl. Nr. 22).

**17. Bewegung ohne Widerstände und Wärmemitteilung.**

Gleichung (c) lautet hier:  $du + pdv = 0$ ; sie liefert mit  $u = f(p, v)$  einfach das Gesetz einer adiabatischen Zustandsänderung:

$$v = \varphi(p, p_1, v_1),$$

hiermit wird Gl. (b) integrierbar; es wird

$$(b_1) \quad \frac{w^2 - w_1^2}{2g} = \int_p^{p_1} v dp;$$

$p_1, v_1, w_1$  sind dabei die Werte von  $p, v$  und  $w$  in einem gegebenen Anfangsquerschnitt. Gleichung (a) ordnet jetzt mit Hilfe der vorstehenden Beziehungen jedem Querschnitt  $F$  eine bestimmte Geschwindigkeit und einen bestimmten Druck zu.

Ist  $p_1$  der Druck in dem Raume, von dem die Flüssigkeitsströmung ausgeht, und kann dort  $w_1^2 = 0$  gesetzt werden, so wird

$$\frac{w^2}{2g} = \int_p^{p_1} v dp.$$

Betrachtet man für diesen Fall den Verlauf des Strömungsquerschnitts

$F = \frac{Gv}{w}$ , der zu einem bestimmten sekundlichen Gewicht  $G$  gehört, als



Funktion von  $p$ , so findet man, dass nicht nur für  $p = p_1$  (wegen  $w = 0$ ), sondern auch für  $p = 0$  (wegen  $v = \infty$ )  $F = \infty$  ist (vgl. Fig. 56). Für das zwischen beiden Grenzen liegende Minimum von  $F$  findet man die Bedingung

$$w^2 = -gv^2 \cdot \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{d\rho},$$

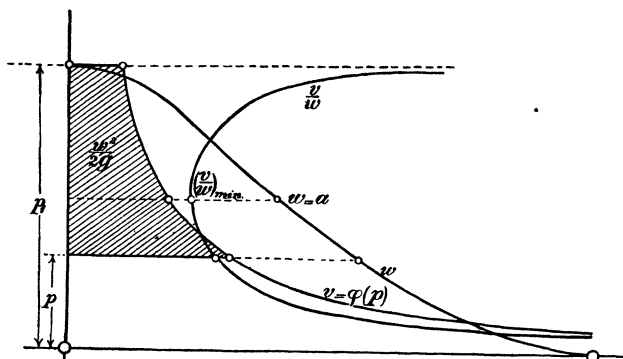


Fig. 56.

wo  $\rho$  die Dichte ist. Diese Gleichung besagt nichts anderes, als dass die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt des Stromfadens gleich der dem dortigen Zustande entsprechenden Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  (43) ist.

Dieses Ergebnis scheint zuerst von *Hugoniot*<sup>44)</sup> allgemein bewiesen worden zu sein, nachdem es etwas früher *O. Reynolds*<sup>45)</sup> für permanente Gase als zutreffend erkannt hatte.

Der innere Grund dieses eigenartigen Resultates lässt sich etwa folgendermassen einsehen: Eine mässige Druckschwankung irgend welcher Art rollt in einem cylindrischen Rohr mit Schallgeschwindigkeit über die darin befindliche Flüssigkeit hinweg; lässt man die Flüssigkeit mit Schallgeschwindigkeit fliessen, so wird es dadurch möglich, dass die Druckdifferenzen an Ort und Stelle stehen bleiben. Da man den Stromfaden an der engsten Stelle (Stetigkeit von  $\frac{dF}{dx}$  vorausgesetzt) als Cylinder ansehen darf, fordern hier die stationären Pressungsunterschiede eine Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit.

Nach dem Vorstehenden giebt es für jeden Querschnitt, der

43) Vgl. Encykl. IV, Art. 24 Akustik, von *Lamb*.

44) Paris C. R. 103 (1886), p. 1178.

45) Phil. Mag. V, 21 (1886), p. 185. = Pap. II, p. 311.

grösser ist, als der engste Querschnitt, je zwei Werte von  $p$  und  $w$ . Für den Verlauf von  $p$  ist dies in Fig. 57 angedeutet (die stark gezeichneten Linien). Welche Kombination der Kurvenzweige in einem bestimmten Fall eintreten wird, richtet sich nach dem Druck an den Enden des Rohres.

Untersucht man für eine fest vorgegebene Röhre die den verschiedenen Strömungsvorgängen mit gleichem  $p_1$  und  $v_1$  entsprechende sekundliche Ausflussmenge  $G$ , so zeigt sich als Folgerung aus dem Vorstehenden, dass diese einen Grösstwert erreicht, wenn im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit eintritt.

Verschiedene Druckverteilungen, die kleineren Werten von  $G$  entsprechen, sind in Fig. 57 durch die dünn ausgezogenen Linien dargestellt. Die gestrichelten Linien beziehen sich auf Ausflussmengen grösser als  $G_{\max.}$ ; sie führen nicht von einem Rohrende zum andern, entsprechen daher keiner hier möglichen Strömung.

**18. Ausströmen aus Öffnungen und Mundstücken.** Die Beantwortung der Frage, welche Luftmenge bei vorgegebener Druckdifferenz pro Zeiteinheit durch eine gegebene Öffnung hindurchtritt, entspricht einem alten Bedürfnis der Technik. Dies ist offenbar der Grund dafür, dass sich die älteren Arbeiten aus dem Gebiete des vorliegenden Referates gerade um diese Frage gruppieren. Es mag also wohl passend erscheinen, an dieses Thema eine Schilderung der historischen Entwicklung der hier auftretenden Gedankenreihen anzuknüpfen.

Die älteste Notiz über den Ausfluss „elastischer Flüssigkeiten“ scheint bei *Daniel Bernoulli*<sup>46)</sup> 1738 zu stehen. Er giebt die Anweisung, die Berechnung wie bei einer inkompressiblen Flüssigkeit vorzunehmen; die Geschwindigkeit sei zu setzen:

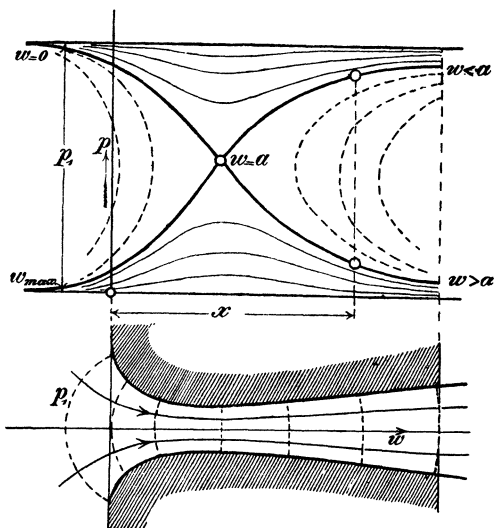


Fig. 57.

46) Hydrodynamica, Strassburg 1738, p 224.

$$w = \sqrt{2g(p_1 - p_2)v_1};^{48)}$$

die Ausflussmenge wird mit  $G = F \cdot \frac{w}{v_1}$  berechnet. Diese Berechnungsweise, der die Vorstellung zu Grunde lag, dass die Geschwindigkeit gemäss dem *Torricelli'schen* Theorem einfach durch die im Ausflussgefäss „vorhandene“ Druckhöhe  $h = v_1(p_1 - p_2)$  erzeugt werde, und dass die Geschwindigkeitserzeugung für jedes Teilchen plötzlich beim Verlassen des Gefässes erfolge, findet sich bei *d'Alembert*<sup>49)</sup> und anderen wieder; sie schien auch durch verschiedene Versuchsreihen<sup>50)</sup>, die freilich alle mit kleinen Pressungen angestellt waren, bestätigt zu werden. Erst *Navier*<sup>51)</sup> fand 1829 den richtigen Weg, die unter allmählicher Expansion des Gases stattfindende Geschwindigkeitserteilung mit Hilfe von Differentialbetrachtungen zu berechnen. Er besitzt die Beziehung (b) in ihrer einfachsten Form (vgl. p. 293) und erhält aus ihr mit der Annahme, dass der Druck in der Mündung gleich dem äusseren Druck  $p_2$  ist, unter Voraussetzung des *Mariotte'schen* Gesetzes:

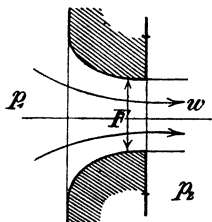


Fig. 58.

$p v = C$  für eine der Fig. 58 entsprechende Mündung

$$G = \frac{F w}{v_2} = \frac{F}{v_2} \sqrt{2g C \log \frac{p_1}{p_2}}.^{52)}$$

Er diskutiert die Gleichung nach verschiedenen Richtungen, zeigt auch, dass sie für sehr kleine Pressungsunterschiede in die bei inkompressiblen Flüssigkeiten gebräuchliche übergeht. Er findet auch bereits, dass (für konstantes  $G$ ) der Querschnitt  $F$  als Funktion von  $p$  ein Minimum besitzt, zieht aber daraus falsche Schlussfolgerungen. Des

48) Im folgenden bezeichnet der Index 1 immer die Zustände in dem Raume, aus dem die Flüssigkeit ausfliesst; der Index 2 die Zustände in dem Raume, in den sie eintritt.

49) *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Paris 1744, p. 165 u. f.

50) Die bemerkenswerteren Arbeiten über Ausflussversuche bei geringem Überdruck sind *G. Schmidt*, *Ann. Phys. Chem.* (1) 66 (1820), p. 39; *Lagerhjelm*, *Stockholm Akad.* 1822; Bericht hierüber von *Girard*, *Journ. génie civil* 1829; *K. L. Koch*, *Versuche über die Geschwindigkeit ausströmender Luft*, Göttingen 1824; Bericht hierüber von *G. Schmidt*, *Ann. Phys. Chem.* (2) 2 (1824), p. 39; *Aubuisson*, *Ann. des mines* 13 (1826), p. 483; *H. Buff*, *Ann. Phys. Chem.* (2) 37 (1836), p. 277 u. 40 (1837), p. 14; (Neuberechnung der *Koch'schen* Versuche und Bericht über eigene Versuche).

51) *Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques*, Paris, *Mém. de l'Acad.* 9 (1830), p. 311.

52) Die sehr verschiedenen Formelbezeichnungen und Bezugsgrössen sind überall in die unsrigen umgeschrieben.

weiteren werden nach den Methoden der Hydraulik Ausströmung aus Öffnungen in dünner Wand, Energieverluste durch plötzliche Erweiterung und Kontraktion in Rohren, und ähnliches behandelt.

Um einen grossen Schritt wurde die Theorie zehn Jahre später, 1839, von den Ingenieuren *B. de Saint-Venant* und *L. Wantzel*<sup>53)</sup> gefördert. Sie berücksichtigen durch Verwendung des *Laplace-Poisson*-schen Adiabatangengesetzes  $p v^\kappa = \text{const.}$  die bei der Expansion eintretende Abkühlung des Gases und erhalten so die Formeln:

$$w = \varphi \sqrt{\frac{2g\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)},$$

$$G = \mu F_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2g\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

( $\varphi$  und  $\mu$  sind durch Versuche zu ermittelnde Korrektionsziffern). *De Saint-Venant* und *Wantzel* diskutieren die Beziehungen und finden, dass  $G$  als Funktion von  $p_2$  (bei festgehaltenem  $p_1$  und  $\mu$ ) ein Maximum bei dem Werte

$$p' = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot p_1$$

besitzt. Der Gedanke, dass es widersinnig ist, dass die Ausflussmenge abnehmen soll, wenn der Druck auf der Ausströmseite erniedrigt wird, führt sie auf den Gedanken, dass der Druck  $p$  in der Mündung bei grösseren Druckdifferenzen höher sein müsse, als der Aussendruck  $p_2$ , und jedenfalls nie unter den eben definierten Wert  $p'$  heruntersinken könne. Ihre Experimente (Einströmen der Luft in den Recipienten einer Luftpumpe) zeigen, obwohl die Messungen wegen Nichtbeachtung der auftretenden Temperaturdifferenzen mangelhaft sind, diese Annahmen bestätigt. (Zwischen  $p_2 = 0$  und  $p_2 = 0,4 p_1$  war die Ausflussmenge konstant, nahm dann bei grösserem  $p_2$  erst langsam, dann rascher ab.) Spätere Versuche von 1843<sup>54)</sup> an einem Dampfkessel gaben ähnliche Resultate.

Die Arbeit von *de Saint-Venant* und *Wantzel* geriet merkwürdiger Weise wieder in Vergessenheit. Zum Teil war daran wohl die schroffe Ablehnung schuld, welche ihr von *Poncelet*<sup>55)</sup> zu Teil wurde, der, auf Versuche von *Pecqueur* gestützt, die alte *Bernoulli*'sche Hypothese

53) Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, Journ. éc. polyt. 27 (1839), p. 85.

54) Paris C. R. 18 (1843), p. 1140.

55) Paris C. R. 21 (1845), p. 178; Replik und Duplik p. 366 u. 387.

verteidigte. Ein anderer Grund mag darin liegen, dass *de Saint-Venant* und *Wantzel* zur Diskussion ihrer Versuchsergebnisse nicht ihre rationelle Formel verwendeten, sondern aus ihnen eine ziemlich willkürliche empirische Formel ableiteten.

Die rationellen Formeln für  $w$  und  $G$  wurden erst 1855 von *Jul. Weisbach*<sup>56)</sup> wieder gefunden und führten lange seinen Namen. *M. Herrmann*<sup>57)</sup> diskutierte 1860 das Maximum von  $G$  und deutete es, wie *de St. Venant* und *Wantzel*: der Mündungsdruck sinkt nie unter  $p'$  herab und die Geschwindigkeit steigt erst ausserhalb der Mündung unter Ausdehnung des Strahls auf den  $p_2$  entsprechenden Wert.

In derselben Zeit (1856) kamen — wieder unabhängig von den bisherigen — *W. Thomson* und *Joule*<sup>58)</sup> von der Seite der Thermodynamik her zu einer Lösung des Ausflussproblems. Sie besitzen die Gleichung (d) in der auch bei beliebigen Widerständen giltigen Form

$$\frac{w^2}{2g} = u_1 - u_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 = \frac{\gamma p}{A} (T_1 - T_2)$$

und gewinnen hieraus ebenfalls die Formeln für  $w$  und  $G$  bei adiabatischer Expansion; sie bemerken dabei auch das Maximum von  $G$ .

Inzwischen war auch das adiabatische Ausströmen des Wasserdampfes in Angriff genommen. Nach der ersten Theorie von *Redtenbacher*<sup>59)</sup>, 1855, die wegen fehlender Berücksichtigung der Condensation im expandierenden Dampf unrichtig war, wies 1860 *F. Grashof*<sup>60)</sup> auf den richtigen Weg. Durchgeführt wurde die Rechnung auf Grund unserer Formel (d) aus den Gesetzen für nasse Dämpfe (vgl. Nr. 6) von *G. Zeuner* 1863<sup>61)</sup>. Er erhält

$$A \frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 \lambda_1}{T_1} (T_1 - T_2) + q_{p_1} - q_{p_2} - T_2 (s_1'' - s_2'') + A v'' (p_1 - p_2), \quad (62)$$

wofür er für Überschlagsrechnungen noch die Näherungsformel

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 \lambda_1}{A T_1} (T_1 - T_2)$$

angiebt.

Das zur Berechnung des Ausflussgewichtes nötige Dampfvolumen wird aus der Gleichung der Adiabate ermittelt. Die Formeln werden

56) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 3. Aufl. 1855, § 431.

57) Zeitschr. d. österr. Ing.-Ver. 12 (1860), p. 34.

58) London Proc. Roy. Soc. 8 (1856), p. 178.

59) Gesetze des Lokomotivbaues, Mannheim 1855, p. 34.

60) Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing. 4 (1860), S. 95.

61) Das Lokomotivblasrohr, Zürich 1863, p. 76 u. f.

62) In dieser Weise findet sich die Formel erst etwas später in der 2. Aufl. der „Grundzüge“, p. 411.

für den Ausfluss von trocken gesättigtem Dampf, sowie von heissem Wasser (Kesselwasser)<sup>63)</sup> spezialisiert und durch Tabellen erläutert. Für letzteres findet er das merkwürdige Resultat, dass für Ausströmen in die Atmosphäre das sekundliche Ausflussgewicht für 1 qcm Öffnung fast unabhängig vom Kesseldruck ungefähr 0,11 kg betrage<sup>64)</sup>.

Die Theorie des Ausströmens wurde nach der thermodynamischen Seite hin weiter gefördert von *Grashof*, der 1863 in der bereits zitierten grundlegenden Arbeit<sup>57)</sup> den Einfluss der durch die Widerstände hervorgerufenen Erwärmung des Gases richtig einschätzen lehrte, des weiteren von *Zeuner* 1871 in seiner „Neuen Darstellung der Vorgänge beim Ausfluss der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen“<sup>65)</sup>. *Zeuner* berücksichtigt hier (bei Luft) den Einfluss der Widerstandsarbeit unter der Annahme, dass sie der Temperatursenkung, d. h. dem Zuwachs der kinetischen Energie proportional wäre:

$$dz = \xi d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = \xi \frac{\gamma p}{A} dT \quad (\text{vgl. p. 298}).$$

Er erhält so als Gesetz der Zustandsänderung statt  $pv^* = \text{const.}$  die Beziehung  $pv^n = \text{const.}$ , worin der „Ausflussexponent“  $n$  mit dem Widerstandskoeffizienten  $\xi$  durch die Gleichung

$$n = \frac{(1 + \xi)\kappa}{1 + \xi\kappa}$$

zusammenhängt. Das Ausflussgewicht ergibt sich hiernach zu

$$G = \alpha F_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{2g\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)}.$$

Der Koeffizient  $\alpha$  ist dabei durch den Zusammenhang zwischen dem freien Strahlquerschnitt  $F$  und dem Mündungsquerschnitt  $F_0$  gegeben:  $F = \alpha F_0$ . *Zeuner* empfiehlt unterhalb

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (\text{kritisches Druckverhältnis}),$$

bei gut abgerundeten Mündungen  $\alpha = 1$  zu setzen. Bei grösserem Druckverhältnis ist  $\alpha > 1$  und es wird hierfür  $G$  unabhängig vom Aussendruck gleich dem Maximalwert

$$G = \alpha' F_0 \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{2g\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{p_1}{v_1}},$$

63) Zuerst im *Civilingenieur* 10 (1864), p. 87.

64) Neuere Untersuchungen führten zu andern Ergebnissen. Vgl. hierzu den Schluss dieser Nummer.

65) *Civiling.* 17 (1871), p. 71.

worin der neue Koeffizient  $\alpha'$  für abgerundete Mündungen = 1 zu setzen ist. Für gesättigte Dämpfe, sowie auch für überhitzte schlägt er denselben Rechnungsgang vor<sup>66)</sup>. Es ist dazu nur nötig, für die adiabatische Expansion einen mittleren Exponenten  $\kappa$  anzunehmen. Für gesättigten Wasserdampf giebt er an:  $\kappa = 1,035 + 0,10 x_1$ , wo  $x_1$  die spezifische Dampfmenge beim Druck  $p_1$  ist.

Für Ausfluss von trocken gesättigtem Dampf erhält man aus obiger Formel, wenn man das Volumen  $v_1$  durch den Druck ausdrückt ( $pv^{1,063} = \text{const.}$ ), nach *Grashof*<sup>67)</sup> die einfache Beziehung

$$G/\alpha' F_0 = Cp^{0,96965},$$

die Konstante  $C$  ist für  $\xi = 0$ , wenn  $F_0$  in  $m^2$ ,  $p$  in  $\text{kg}/m^2$ ,  $G$  in  $\text{kg}/\text{sec}$  gemessen wird,  $C = 0,02018$ .

Inzwischen waren von Verschiedenen *Versuche* zur Prüfung der Theorie und zur Gewinnung von Korrektionskoeffizienten unternommen worden.

Vorzustellen sind die vorzüglichen Versuche *Weisbach's* von 1856, über die er 1859<sup>68)</sup> berichtet, deren Zahlenmaterial er aber erst 1866<sup>69)</sup> ausführlich mitgeteilt und bearbeitet hat. Seine Versuche, mit in einem Kessel komprimierter Luft angestellt, waren dadurch wesentlich vollkommener als die der früheren Experimentatoren, dass *Weisbach* bei den Druckablesungen, aus denen die Ausflussmengen bestimmt wurden, jedesmal den Ausgleich der bei der Expansion entstehenden Temperaturdifferenzen abwartete. Ein Teil seiner Versuchsergebnisse, die sich auf sehr verschiedene Arten von Mündungen, mit und ohne Ansatzrohr, beziehen, wurde von *Grashof*<sup>70)</sup> einer verbessernden Neuberechnung unterzogen. Die Änderung des Ausflussgesetzes bei Überschreitung des kritischen Druckverhältnisses war *Weisbach* unbemerkt geblieben, seine Versuche reichten nur eben bis an diese Grenze. Das Verdienst, diese Dinge zuerst einwandfrei nachgewiesen zu haben, gebührt *R. D. Napier*<sup>71)</sup> (1866). Er stellt die Ergebnisse seiner Ausflussversuche mit Wasserdampf (abgerundete Mündungen) in folgenden zwei Formeln zusammen:

66) Vgl. auch die Darstellung in *Therm. II*, 1. Aufl. § 20 u. 22; 2. Aufl. § 21 u. 23.

67) *Masch.-L.* § 111.

68) *Civiling.* 5, p. 1.

69) *Civiling.* 12, p. 1 u. 77.

70) *Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing.* 7 (1863), p. 279; *Masch.-L.* 1875, p. 580.

71) *On the velocity of steam and other gases*, London 1866; *Engineer* 23 1867, p. 11.

$$\text{für } p_2 > \frac{1}{2} p_1 \text{ ist } \frac{G}{F_0} = \sqrt{\frac{2g}{1+\xi} \cdot \frac{(p_1 - p_2)p_2}{p_1 v_1}},$$

$$\text{für } p_2 < \frac{1}{2} p_1 \text{ ist } \frac{G}{F_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{1+\xi} \frac{p_1}{v_1}} \quad (72)$$

Er hat auch zuerst<sup>73)</sup> den Druck in der Mündung experimentell ermittelt (durch Druckmessung an einer feinen Bohrung in der Ausflussmündung, vgl. Fig. 59) und damit die Annahme von *de Saint-Venant* und *Wantzel*, die er selbst nicht kannte, wohl bestätigt.

Als weitere Versuche über *Luftausfluss* sind vor allem zu nennen die umfangreichen Versuche von *Zeuner* 1871<sup>74)</sup> und *Fliegner* 1874 und 1877<sup>75)</sup>. In der letzteren Arbeit untersucht *Fliegner* auch den Einfluss der Wärmeleitung im Mundstück theoretisch sowohl als auch experimentell, er findet bei einem Mundstück aus Messing den Ausflussexponenten  $n = 1,37$  ( $\xi = 0,077$ ), bei Buchsbaumholz  $n = 1,395$  ( $\xi = 0,027$ ); aus diesen Zahlen schliesst er auf eine bedeutende Wirkung der Wärmeleitung.

In sorgfältigen Beobachtungen des Mündungsdruckes  $p_m$  findet er, dass dieser nie unter den „kritischen Druck“ herabgeht, und immer etwas höher als  $p_2$  liegt. Als Näherungsformeln für gut abgerundete Metallmündungen empfiehlt er ( $p$  in  $\text{kg/m}^2$ ,  $F$  in  $\text{m}^2$ )

$$\frac{G}{F_0} = 0,76 \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)p_2}{T_1}} \quad \text{für } p_2 > \frac{1}{2} p_1,$$

$$\frac{G}{F_0} = 0,38 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \quad \text{für } p_2 < \frac{1}{2} p_1,$$

In Fig. 60 findet man die Ergebnisse der *Fliegner*-schen Versuche veranschaulicht; es sind die Grössen  $p_m$  und  $G$  in ihrer Abhängigkeit von  $p_2$  bei festgehaltenem  $p_1$  dargestellt.

Erwähnenswert sind auch die sorgfältigen Versuche, die *G. A. Hirn* 1884<sup>76)</sup> mit Luft bei gewöhnlichen und höheren Temperaturen, sowie mit Kohlensäure und Wasserstoff angestellt hat. Er liess die Gase aus einem Gasometer

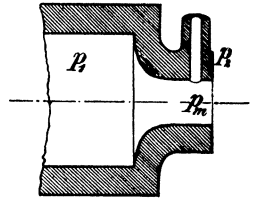


Fig. 59.

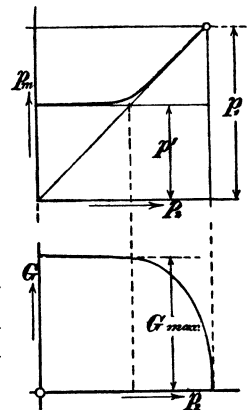


Fig. 60.

72) So sind die Formeln von *Zeuner* (Therm. II, § 24) umgeschrieben worden.

73) Engineer 28 (1869), p. 287. Vgl. auch *Rankine*, Engineer 28 (1869), p. 352 u. 358 = Civiling. 16 (1870), p. 35.

74) Vorläuf. Bericht Civiling. 20 (1874), p. 1. (Dort ist auch die Priorität von *de Saint-Venant* und *Wantzel* wieder aufgedeckt.) Ausführlicher in Therm. I (1. Aufl.), § 49–51.

75) Civiling. 20, p. 13 und Civiling. 23, p. 443.

76) Brüssel Mem. Acad. Roy. 156 (1886), Nr. 3; Ann. chim. phys. (6) 7



in einen evakuierten Raum einströmen und erreichte dadurch eine sehr einwandfreie Messung der Ausflussmengen. Die *Hirn'schen* Versuche bestätigen die früheren Ergebnisse; sonderbarer Weise glaubte *Hirn* selbst, indem er die Geschwindigkeit auch über das kritische Druckverhältnis hinaus mit der Formel  $w = Gv_2/F$  berechnete, einen Widerspruch zwischen Theorie und Versuch nachgewiesen zu haben; seine Ansicht wurde von *Hugoniot*<sup>77)</sup> und *Parenty*<sup>78)</sup> 1886 widerlegt.

*Parenty* hat später<sup>79)</sup> 80), auf den *Hirn'schen* Versuchen fussend, eine empirische Näherungsformel von grosser Allgemeinheit angegeben. Er stellte fest, dass die Ausflussmenge  $G$  in ihrer Abhängigkeit von  $p_2$  (vgl. Fig. 60) sehr nahe durch einen Ellipsenquadranten und dessen horizontale Tangente dargestellt werden kann. Es möge nun das Verhältnis  $(p_1 - p_2)/p_1 = \delta$  und  $(p_1 - p')/p_1 = \delta'$  gesetzt werden ( $p'$  = kritischer Mündungsdruck), ferner sei  $\alpha_0$  der Kontraktionskoeffizient, der der Mündung für Wasserausfluss unter Wasser zukommt; dann ist nach *Parenty* für beliebige Mündungen das Produkt  $\delta' \cdot \alpha_0$  eine Konstante, ferner  $G_{\max}$  proportional  $\sqrt{\alpha_0}$ ; die Konstanten werden so bestimmt, dass für  $\alpha_0 = 1$  der adiabatische Ausfluss erhalten wird. Mit

$$\delta' \cdot \alpha = \delta'_0 = 1 - \left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{x}{x-1}} \quad (\text{vgl. p. 297})$$

wird

$$\text{für } \delta < \delta' : \frac{G}{F} = 2\alpha_0 \sqrt{g\delta'_0 p_1 v_1 \cdot \delta \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \frac{\delta}{\delta'_0}\right)},$$

$$\text{für } \delta > \delta' : \frac{G}{F} = \delta'_0 \cdot \sqrt{2\alpha_0 g p_1 v_1};$$

von den Koeffizienten  $\delta'_0$  und  $\alpha_0$  der vorstehenden Formeln hängt der eine nur von der Gasart ab, der andere nur von der Mündungsform. Neuerdings hat *Parenty* an Hand der *Rateau'schen* Versuche (s. u.) die Anwendbarkeit seiner Formeln für Dampfausfluss gezeigt<sup>81)</sup>. Ferner hat *Boussinesq*<sup>82)</sup> gezeigt, dass — für adiabatischen Ausfluss — eine Reihenentwicklung nach  $\delta$  die *Parenty'sche* Ellipsenformel als zweite, bereits sehr befriedigende Näherung ergibt.

(1886), p. 289; Recherches expérimentales sur la limite de vitesse que prend un gaz etc., Paris 1886.

77) Paris C. R. 102 (1886), p. 1545.

78) Paris C. R. 103 (1886), p. 125.

79) Paris C. R. 113 (1891), p. 184; 116 (1893), p. 1120; 119 (1894), p. 419.

80) Ann. chim. phys. (7) 8 (1896), p. 5.

81) Ann. des mines (10) 2 (1902), p. 403.

82) J. des Mathem. (5) 10 (1904), p. 79.

In neuerer Zeit (1897) hat auch *Zeuner*<sup>83)</sup> Luftausflussversuche mit einem Vakuumkessel gemacht, die ihn zu einer neuen Hypothese geführt haben; besonders Versuche mit grossen Widerständen führen ihn auf die Beziehung, „dass die Luft in den leeren Raum mit der dem Zustande der Luft in der Mündung entsprechenden Schallgeschwindigkeit  $w_s = \sqrt{\kappa g p v}$  ausströmt, welche Widerstände hierbei auch beim Hinströmen nach der Mündung vorliegen mögen“. Diese Geschwindigkeit ergibt sich aus (d) zu

$$w_s = \sqrt{\frac{2g\kappa}{\kappa + 1} p_1 v_1}.$$

Die Ausflussmenge wird hierbei

$$G = F_0 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{2g\kappa}{\kappa + 1} \frac{p_1}{v_1}}.$$

Wie *W. Schüle*<sup>84)</sup> nachwies, ist das Maximum der älteren *Zeuner*'schen Formel, die unter dem kritischen Druckverhältnis weiter gelten sollte, grösser als der vorstehende Wert; man kann indes diesen Wert durch verschiedenes  $n$  in beiden Formeln mit dem Maximum zusammenfallen lassen. — *Zeuner*'s Versuche ergaben — für Druckverhältnisse über dem kritischen Wert — den Ausflussexponenten  $n$  zu 1,375 bis 1,38; dieses entspricht Werten von  $\xi = 0,065$  bis 0,055.

Über den Ausfluss von *Dampf*<sup>85)</sup> sind nach *Napier* von verschiedenen Versuche angestellt worden. So hat *Zeuner* 1870 Ausflussversuche mit Hilfe eines Injektors (Dampfstrahlpumpe) gemacht (erst 1890 veröffentlicht<sup>86)</sup>). Ferner sind zu erwähnen die Versuche von *C. H. Peabody* und *L. H. Kuhnhardt*<sup>87)</sup> (mit Messung des Mündungsdruckes), von *Parenty*<sup>88)</sup>, von *Rosenhain*<sup>88)</sup> (mit Messung der Reaktion der ausfliessenden Strahlen, bei verschiedenen Mündungen, auch konisch erweiterten Rohren, vgl. Nr. 20), von *Gutermuth* und *Blaess*<sup>89)</sup> (mit verschiedenen Mündungen, Röhren und Düsen, wie sie bei Dampf-

83) Therm. I (2. Aufl.), p. 242 u. 256.

84) *Dingler's Polyt. Journ.* 318 (1903), p. 355, 369 u. 388.

85) Ein zusammenfassender Bericht über ältere Versuche (auch solche mit Luft) findet sich bei *R. Kolster*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 11 (1867), p. 433 u. 711 u. 12, p. 97. Besonders genannt seien die Versuche von *Tremery*, Ann. des mines (3) 20 (1841), p. 343 und von *Minary* und *Résal*, Ann. des mines (5) 19 (1861), p. 379 (deutsch im *Civiling.* 8 (1862), p. 101).

86) Therm. II, § 25.

87) Trans. Am. Soc. of Mec. Ing. 1890; Bericht im *Engineering* 49 (1890), p. 64.

88) Proc. Instit. of Civ. Ing. 140 (1900), p. 199.

89) Phys. Ztschr. 4 (1902), p. 82; Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 75 = Forschungsarb. Heft 19 (1904), p. 45.

turbinen und bei den Schiebern der Dampfmaschinen in Verwendung stehen). Diesen Versuchen, bei denen die Ausflussmengen durch die kondensierten Wassermengen gemessen wurden, stehen Versuche von A. Rateau<sup>90)</sup> gegenüber, bei denen die Dampfmen gen durch die an das Kühlwasser abgegebenen Wärmemengen bestimmt wurden. Durch gleichzeitige Messung der Dampffuchtigkeit können diese Versuche für besonders zuverlässig gelten; sie liefern das Resultat, dass die Ausflussmengen für abgerundete Mündungen bei grossen Druckunterschieden sehr gut durch die Formeln für verlustlose Strömung dargestellt werden; die Rateau'sche Formel

$$G/\alpha' F_0 = p_1 (0,01904 - 0,00096 \log^{10} p_1),$$

wo  $p$  und  $F_0$  auf Metermass bezogen sind, stimmt sehr genau mit der Grashof'schen Formel p. 300 überein; die älteren Versuche hatten, wohl durch mangelnde Trockenheit des Dampfes ent stellt, grössere Werte ergeben. Für mässige Druckunterschiede liegen die Rateau'schen Zahlen bis zu 5% unter den theoretischen Werten.

Bemerkenswert ist auch die von Rateau gefundene Thatsache, dass der Kontraktionskoeffizient für Öffnungen in dünner Wand, dargestellt durch das Verhältnis der hier auftretenden Ausflussmenge zu der bei abgerundeter Öffnung, sowohl für Dampf als auch für Gase (Versuche von Hirn) bis zu Drucken  $p_2 = 0,45 p_1$  herab sehr genau eine lineare Funktion des Druckverhältnisses ist, z. B. für Dampf

$$\alpha_1 = 0,645 + 0,35(p_1 - p_2)/p_1.$$

*Ausfluss von heissem Wasser.* Über den Ausfluss von Wasser aus dem Wasserraum eines Dampfkessels — also Wasser von der dem Druck  $p_1$  entsprechenden Siedetemperatur — wurden von den Ingenieuren Pulin und Bonnin 1890 Versuche angestellt, über die Sauvage<sup>91)</sup> berichtet hat. Die Ergebnisse weichen vollständig von den theoretischen Resultaten Zeuner's<sup>68)</sup> ab, die Ausflussmengen waren 10—12mal so gross, als die theoretischen. Zeuner<sup>92)</sup> erklärte später die Differenz durch die Annahme einer verzögerten Verdampfung des Wassers, wodurch der Ausflussvorgang sich mehr dem Ausfluss kalten Wassers näherte.

Neuerdings haben unabhängig voneinander A. Rateau<sup>93)</sup> und A. Fliegner<sup>94)</sup> nachgewiesen, dass man unter Beachtung des de Saint-

90) Rev. de mécanique 7 (1900), p. 167; Ann. des mines (10) 1 (1902), p. 5.

91) Ann. des mines (9) 2 (1892), p. 192.

92) Therm., 2. Aufl., § 22.

93) Rev. de mécanique 9 (1901), p. 660 = Ann. des mines (10) 1 (1902), p. 59.

94) Schweiz. Bauztg. 45 (1905), p. 282 und 306.

*Venant-Wantzel*'schen Prinzipes bedeutend höhere Ausflussmengen erhält, als *Zeuner* gefunden hatte. Nach *Fliegner* ergibt sich z. B. für  $p_1 = 6$  atm (absolut) das Maximum der Ausflussmenge für 1 qcm Öffnungsquerschnitt zu 0,42 kg/sec bei einem Mündungsdruck  $p' = 5,4$  atm, während *Zeuner* unter Annahme eines Mündungsdruckes von 1 atm die Zahl 0,108 erhalten hatte.

Beide Autoren zeigen ferner, dass sich noch viel grössere Ausflussmengen ergeben, wenn man annimmt, dass die Temperatur des ausfliessenden Wassers um einige Grade unter dem dem Kesseldruck entsprechenden Siedepunkt liegt; *Rateau* und *Fliegner* verwerten dieses Ergebnis zu einer Erklärung der auch gegen ihre Zahlen noch dreimal grösseren Versuchswerte von *Pulín* und *Bonnin*. *Fliegner* berechnet u. a., dass bei 6 atm Dampfspannung für die Verdreifachung der Ausflussmenge 6<sup>0</sup> Temperaturerniedrigung ausreichend sind. Indes zeigen neue, noch unveröffentlichte Versuche von *J. Adam*<sup>95)</sup>, dass die *Zeuner*'sche Erklärung durch verzögerte Verdampfung die zutreffendere ist. *Adam* findet bei vergleichenden Versuchen mit heissem und kaltem Wasser, dass das Verhältnis der Ausflussmengen von heissem und kaltem Wasser (bei 6 atm) von 0,91 bei Öffnungen in dünner Wand bis auf 0,56 bei kurzer abgerundeter Mündung und weiter auf 0,44 bei einem mässig langen Ansatzrohr herabsinkt.

**19. Strömungswiderstände.** Man pflegt die bei den Strömungsbewegungen auftretenden Widerstände in kontinuierlich verteilte und in konzentrierte einzuteilen, je nachdem es sich um die hemmende Wirkung eines längeren Rohres oder einer örtlichen Unregelmäßigkeit (plötzliche Verengung, Erweiterung, Richtungsänderung usw.) handelt. Das übliche Mass für den Widerstand bildet die durch Gl. (b) definierte Widerstandshöhe  $z$ , bezw. ein durch Vergleich mit der Geschwindigkeitshöhe  $w^2/2g$  gewonnener Widerstandskoeffizient.

a) Über die *konzentrierten Widerstände* ist, abgesehen von den im vorigen Abschnitt behandelten Ausflusswiderständen, wenig Literatur vorhanden. Ein Versuch, die Vorgänge bei plötzlichen Verengungen und Erweiterungen eines Rohres zu berechnen, findet sich bereits bei *Navier*<sup>51)</sup>. Er glaubt jedoch, die Widerstandshöhe bei plötzlicher Rohrerweiterung einfach, wie bei inkompressiblen Flüssigkeiten<sup>96)</sup>, als *Carnot*'schen Stossverlust

$$z = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$

95) Ausgeführt im Laboratorium für technische Physik zu München.

96) Vgl. Encykl. IV 20, 7 (*Forchheimer*).

setzen zu dürfen. Erst *Grashof*<sup>97)</sup> zeigte 1875, dass man bei kompressiblen Flüssigkeiten im Falle einer plötzlichen Rohrerweiterung

$$z = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} + p_1(v_1 - v_2) + \int_1^2 p dv$$

setzen müsse. Im besonderen entwickelte er<sup>98)</sup> unter Berücksichtigung der Wärmevorgänge die Formeln für einen Widerstandskoeffizienten, der nach dem Muster der Hydraulik

$$\xi = \frac{2gz}{w^3}$$

gesetzt wird, unter der vereinfachenden Annahme, dass die Zustandsänderung während der Einwirkung des Widerstands als eine Polytrope  $p v^m = \text{const.}$  angenommen werden darf. Mit diesen Formeln unterzieht er einige Versuche von *Weisbach*<sup>68)</sup><sup>69)</sup> über Knieröhren usw. einer Neuberechnung. Er entwickelt auch die Beziehungen für den Widerstand einer plötzlichen Verengung mit darauffolgender Erweiterung und erläutert die ziemlich verwickelten Formeln durch Zahlenbeispiele.

*Anmerkung.* Mit der eben besprochenen Aufgabe ist durch die Art der Behandlung (Anwendung des Satzes von der Bewegungsgrösse<sup>99)</sup>) die Theorie der *Strahlapparate* verwandt. Es gehört zu diesen das Lokomotivenblasrohr (vgl. hierüber die Monographie von *Zeuner*<sup>61)</sup>), ferner das Dampfstrahlgebläse; grosses theoretisches Interesse bietet auch die Dampfstrahlpumpe von *Giffard* (der sogenannte Injektor, dessen wärmetheoretische Analyse auch von *Zeuner*<sup>100)</sup> gegeben worden ist), sowie der Strahlkondensator von *Körting*.

Die Behandlung dieser Dinge musste hier unterbleiben, da eine Anzahl Beziehungen, die besser in die Referate über Hydraulik passen, hierzu hätten erörtert werden müssen. Die Eigenart der vorgenannten Apparate erlaubt fast durchgängig, die wärmetheoretische Bestimmung der in ihnen auftretenden Mischungsvorgänge, ohne Hinzunahme der Dynamik, vorweg zu behandeln. In dynamischer Beziehung unterscheiden sie sich in nichts anderem von den im Artikel IV 21 (*Grübler*) zu behandelnden Strahlpumpen, als dass das Mischungsvolumen nicht gleich der Summe der zuströmenden Volumina ist, sondern sich durch die vorhergehende thermische Untersuchung bestimmt.

97) Masch.-L. § 76.

98) Masch.-L. § 108.

99) Encykl. IV 20, 2b (*Forchheimer*).

100) *Civiling.* 6 (1860), p. 311; vgl. auch p. 322.

b) Die *kontinuierlichen Widerstände* werden hier durchgängig nach dem in der Hydraulik üblichen Ansatz<sup>101)</sup>

$$dz = \xi_1 \frac{w^2}{2g} dx$$

in Rechnung gesetzt;  $dx$  bedeutet dabei ein Längenelement in der Rohraxe gemessen,  $\xi_1$  einen Widerstandskoeffizienten, der zumeist als Funktion des Rohrquerschnitts angesehen wird, manchmal aber als auch von der Geschwindigkeit abhängig betrachtet wird. *Girard*<sup>102)</sup>, *Navier*<sup>61)</sup> und andere setzten, ganz entsprechend den Ansätzen in der Hydraulik  $\xi_1 = \beta \times \text{Umfang} : \text{Fläche des Querschnitts}$ , also für den Kreisquerschnitt (Durchmesser  $d$ )

$$\xi_1 = \frac{4\beta}{d}.$$

Bezüglich der Werte von  $\beta$  (eine reine Zahl) ergeben die verschiedentlich angestellten Versuchsreihen sehr widersprechende Resultate. Während ältere Experimente<sup>103)</sup> sowie auch neuere von *Zeuner*<sup>104)</sup> für Rohrdurchmesser von 0,5 ~ 3 cm  $\beta$  ziemlich konstant = 0,00594 ~ 0,0064 ergeben, zeigen andere Versuche merkliche Abhängigkeit vom Durchmesser und von der Geschwindigkeit; die von *Grashof*<sup>105)</sup> neuere berechneten Versuche von *Weisbach*<sup>68)</sup> <sup>69)</sup>

$$(d = 1 \sim 2,5 \text{ cm}, \quad w = 30 \sim 110 \text{ m/sec})$$

werden gut durch die Formel

$$\beta = \frac{0,0028}{d^{0,86} w^{0,1675}}$$

dargestellt ( $d$  und  $w$  in Metern). Die Versuche an technischen Druckluftleitungen<sup>106)</sup> ( $d = 7 \sim 30$  cm) ergaben  $\beta$  unabhängig von  $w$ , nämlich

$$\beta = \frac{0,00242}{d^{0,81}}.$$

Ein ähnliches Gesetz wurde übrigens auch schon früher (für  $d = 1 \sim 3$  cm) von *Pecqueur*<sup>65)</sup> gefunden:  $\beta = \text{const}/d^{\frac{1}{2}}$ . In den theoretischen Arbeiten über die Strömung mit Widerständen (vgl. hierüber den folgenden Abschnitt), wird  $\xi_1$  ausnahmslos als unabhängig von der Geschwindigkeit, also als Funktion des Durchmessers allein eingeführt.

101) Encykl. IV 20, 4 (*Forchheimer*).

102) Ann. chim. phys. 16 (1821), p. 129 = Ann. Phys. Chem. (2) 2 (1824), p. 59.

103) Vgl. <sup>60)</sup> (*Aubuisson, Buff*), <sup>65)</sup> (*Pecqueur*).

104) Therm. I, 2. Aufl., § 48.

105) Masch.-L., § 106.

106) Eine Zusammenstellung davon findet sich bei *H. Lorenz*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 36 (1892), p. 621 u. 835.

**20. Strömung durch Röhren und Düsen**<sup>107)</sup>. Die verlustfreie Strömung durch Röhren von veränderlichen Querschnitt ist bereits in Nr. 17 besprochen. Hier handelt es sich also um das Studium der durch Widerstände beeinflussten Bewegungen. Die kontinuierlichen Widerstände werden in der in voriger Nummer dargelegten Weise in Ansatz gebracht; der Koeffizient  $\xi_1$  pflegt dabei als eine im übrigen beliebige Funktion des Rohrdurchmessers betrachtet zu werden.

Schliesst man Wärmeleitung aus<sup>108)</sup>, so lauten die Grundgleichungen (a), (b) und (d) hier:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & Gv = Fw, \\ \text{(b)} \quad & wdw + gvdp + \xi_1 \frac{w^2}{2} dx = 0, \\ \text{(d)} \quad & w^2 = 2g(i_1 - i); \end{aligned}$$

$i_1$  ist dabei die Erzeugungswärme im Anfangszustand  $p_1 v_1$ , bei welchem  $w = 0$  ist. Ist  $i$  als Funktion von  $p$  und  $v$  gegeben, so lassen sich aus Gl. (a) und (d) bei bekanntem  $p$ ,  $F$  und  $G$  die Grössen  $v$  und  $w$  bestimmen, eine für Auswertung von Versuchen sehr nützliche Beziehung<sup>109)</sup>. Hat man hierdurch  $v$  und  $w$  kennen gelernt, so liefert Gl. (b) Aufschluss über  $\xi_1$ .

Durch Elimination von  $dv$  und  $dw$  kann  $\frac{dp}{dx}$  als Funktion von  $p$ ,  $v$ ,  $\xi_1$  und  $\frac{1}{F} \frac{dF}{dx}$ , oder, nach Vorstehendem, wenn noch  $F$  und  $\xi_1$  als Funktionen von  $x$  gegeben sind, als Funktion von  $p$ ,  $x$  und  $G$  erhalten werden. Für ein gegebenes  $G$  lässt sich also die Aufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung  $\frac{dp}{dx} = f(p, x)$  zurückführen.

Diesen Weg haben *H. Lorenz*<sup>110)</sup> und *L. Prandtl*<sup>111)</sup> — unter der vereinfachenden Annahme des Gasgesetzes — beschrieben. In seiner allgemeinen Bedeutung scheint er von *A. Stodola*<sup>112)</sup> zuerst klar erkannt worden zu sein. Auf demselben Gedanken beruht auch das

107) Vgl. hiermit Encykl. IV 20 (*Forchheimer*) 5 b) und d).

108) Auf die *Grashof'sche* Theorie der Luft- und Dampf bewegung in Röhren mit Wärmeleitung ist schon hingewiesen worden<sup>98)</sup>. Die Besprechung der ziemlich verwickelten Rechnungen mag hier unterbleiben, da sich weitere Arbeiten nicht daran angeknüpft haben.

109) Anscheinend unabhängig von *Stodola*<sup>112)</sup> und *Büchner*<sup>42)</sup> gefunden; in etwas anderer Weise von *A. Fliegner*<sup>115)</sup> benutzt.

110) Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 333 = Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 47, p. 1600.

111) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 348.

112) Dampfturb. § 26 (§ 7).

zeichnerische Verfahren von *G. Fanno*<sup>113</sup>), der im *T-s*-System mit Hilfe der Kurven  $i = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$  unter Anwendung von Gl. (a) und (d) Kurven  $\frac{G}{F} = \text{const.}$  ermittelt, und dann für eine gegebene Röhre u. s. w. die zu einem bestimmten  $G$  gehörige Zustandskurve durch schrittweises Vorgehen gewinnt.

Für permanente Gase findet man mit  $i = \frac{\kappa}{\kappa - 1} pv$ , dass hier  $w$  einfach als Funktion von  $\frac{pF}{G}$  dargestellt werden kann. Zur Diskussion von  $\frac{dp}{dx}$  wird zweckmässig die dem jeweiligen Zustande  $p, v$  entsprechende Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\kappa gpv}$  eingeführt.

Erreicht die Strömungsgeschwindigkeit irgendwo die Schallgeschwindigkeit, so ist dies immer für den aus (d) erhältlichen unveränderlichen Wert

$$w = a' = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} gp_1 v_1}$$

der Fall (*Zeuner*<sup>83</sup>), *Lorenz*<sup>110</sup>). Das am meisten Ausschlag gebende Glied der Formel für  $\frac{dp}{dx}$  hat den Faktor

$$\frac{2}{F} \frac{dF}{dx} - \kappa \xi_1 \frac{w^2}{a^2 - w^2};$$

man sieht, dass  $\frac{dp}{dx}$  sein Vorzeichen wechselt, je nachdem  $w$  kleiner oder grösser ist als die Schallgeschwindigkeit. Für  $w = a$  wird  $\frac{dp}{dx} = \infty$ , wenn nicht gleichzeitig der Zähler des Bruches = 0 wird. Dies trifft indes regelmässig zu, wenn in einem Rohr mit stetig veränderlichem  $\frac{dF}{dx}$  die Schallgeschwindigkeit im Sinne wachsender Geschwindigkeit überschritten wird. Die Einzelheiten dieses Wertes  $\frac{0}{0}$  wurden von *R. Proell*<sup>114</sup>) einer genaueren Feststellung unterzogen. (Vgl. auch p. 312.)

Die vorstehenden Beziehungen haben spezielle Anwendung gefunden, einmal auf das gerade cylindrische Rohr, dann in neuester Zeit auf das kegelförmige Rohr und die *Laval'sche* Dampfturbinendüse. Um diese Beispiele sei deshalb die weitere Besprechung gruppiert.

a) *Cylindrisches Rohr.* Diese Aufgabe wurde, soweit es bei dem damaligen Stande der Kenntnisse möglich war, bereits von *Navier*<sup>51</sup>) 1829 gelöst. Er verwendet — neben den Gleichungen (a) und (b) —

113) Dampfturb. § 28.

114) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48, p. 349.



an Stelle der ihm unbekanntem Gleichung (d) das einfache *Mariotte*-sche Gesetz  $p v = \text{const.}$  Seine Formeln sind übrigens auch nach dem heutigen Standpunkte noch richtig, wenn man die Aufgabe so stellt, dass durch einen vollkommenen Wärmeaustausch mit der Umgebung das Gas in der Röhre auf konstanter Temperatur gehalten wird. *Navier* findet  $p \cdot w = \text{const.}$  und erhält durch Integration

$$g(p_1^2 - p^2) = \left(\frac{G}{F}\right)^2 p_1 v_1 \left(\xi_1 x + 2 \log \frac{p_1}{p}\right) \quad (p = p_1 \text{ für } x = 0),$$

woraus sich das Ausflussgewicht bei gegebener Druckdifferenz ergibt. Für sehr lange Leitungen erhält man nach Unterdrückung von  $\log \frac{p_1}{p}$  die Näherungsformel

$$p = p_1 \sqrt{1 - \frac{w_1^2}{g p_1 v_1} \xi_1 x}.$$

Die Strömung der Luft in einem Rohr ohne Wärmemitteilung wurde von *Grashof*<sup>87)</sup> 1863 untersucht. Mit der von *Zeuner*<sup>88)</sup> eingeführten Schallgeschwindigkeit  $a' = \sqrt{\frac{2g \kappa p_1 v_1 + (\kappa - 1) w_1^2}{\kappa + 1}}$  erhält man

$$\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \xi_1 (l - x) = \frac{a'^2}{w^2} - 1 + 2 \log \frac{w}{a'}.$$

Die Integrationskonstante  $l$  bedeutet die maximale beim Strömungszustand  $p_1, v_1, w_1$  mögliche Rohrlänge. Für  $x = l$  wird  $w = a'$  und  $\frac{dw}{dx} = \infty$ . Der obiger Formel entsprechende Druckverlauf (aus Gl. (a)

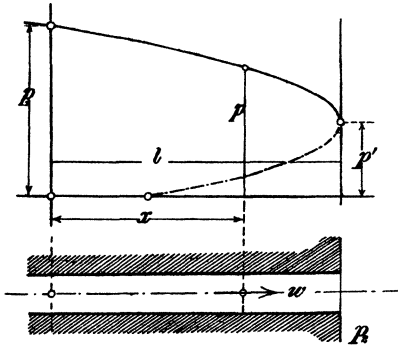


Fig. 61.

und (d) zu gewinnen) ist in Fig. 61 dargestellt; er ist durch Versuche von *Fliegner*<sup>115)</sup> und *Zeuner*<sup>88)</sup> gut bestätigt. Sobald der Aussendruck  $p_2$  hinter dem Rohrende  $\leq p'$  ist, ist im Endquerschnitt  $w = a'$ .

b) *Kegelförmiges Rohr.* Die Strömung eines Gases durch ein kegelförmig erweitertes Rohr wurde unter der Annahme eines konstanten Widerstandskoeffizienten  $\beta$  (vgl. Nr. 19 b) von *R. Proell*<sup>116)</sup> theoretisch behandelt.

Ist der Radius eines Querschnitts  $r = r_1 + \alpha x$ , so ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung aus der Formel

$$\frac{a'^2}{w^2} \left( \frac{w^2}{a'^2} - \varepsilon \right)^{1-\varepsilon} = \text{const. } r^4,$$

115) Schweiz. Bauzeitg. 31 (1898), p. 68, 78, 84.

116) Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 1 (1904), p. 161 u. 2 (1905), p. 151.

wobei  $a'$  dieselbe Bedeutung wie im vorigen Absatz hat, und

$$\varepsilon = \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x-1) + \beta x}$$

ist. Eine Diskussion der *Proell'schen* Formeln ergibt das bemerkenswerte Resultat, dass (bei hinreichend schlanken Kegeln) jedem Erweiterungsverhältnis  $\alpha$  eine Geschwindigkeit  $w' = a' \sqrt{\varepsilon}$  entspricht, die sich in der ganzen Erstreckung des Rohres konstant erhält. Ist  $\alpha < \frac{1}{2} \beta x$ , so ist  $w' < a'$  und es treten für  $w > w'$  ähnliche Verhältnisse auf wie beim cylindrischen Rohr (Zustreben der Geschwindigkeit auf die Schallgeschwindigkeit u. s. w.). Für  $\alpha > \frac{1}{2} \beta x$ , also  $w' > a'$ , nähert sich die Geschwindigkeit asymptotisch dem Wert  $w'$  oder Null, je nachdem sie grösser oder kleiner als  $a'$  ist. Für  $\alpha = \frac{1}{2} \beta x$  ( $w' = a'$ ) ergibt sich bemerkenswerter Weise ein solcher Geschwindigkeitsverlauf, dass die Geschwindigkeit der Querschnittsfläche umgekehrt proportional ist; die zugehörige Zustandsänderung ist eine Kompression bei konstantem Volumen.

c) *Dampfturbinendüse von De Laval*. Um die im Dampf verfügbare Arbeit in möglichst regelmässiger Expansion in die kinetische Energie eines Dampfstrahls zu verwandeln, hat der schwedische Ingenieur *De Laval* 1889 eine Düse (Strahlrohr) angewandt, die hinter dem engsten Querschnitt kegelförmig erweitert ist.

Die Theorie der verlustfreien Strömung in derartigen Düsen ist bereits in Nr. 17 enthalten; vergl. auch *Zeuner*, Theorie der Turbinen<sup>117</sup>).

Für die praktische Berechnung der mit gesättigtem und überhitztem Wasserdampf betriebenen Düsen hat *R. Proell*<sup>118</sup>) eine nach *d'Ocagne'schen* Methoden<sup>119</sup>) entworfene graphische Rechentafel herausgegeben. Eine graphische Konstruktion mit Hilfe des *T-s*-Diagramms, die auch eine summarische Berücksichtigung der Widerstände erlaubt, wurde von *A. Koob*<sup>120</sup>) angegeben.

Zur Untersuchung der Strömung mit Widerständen kann man (nach *Prandtl*<sup>111</sup>) in dem Koordinatensystem von  $p$  und  $x$  die zu einem bestimmten Wert von  $G$  gehörigen Kurven gleicher Geschwindigkeit zeichnen (vgl. p. 308) — die gestrichelten Linien in Fig. 62 — und dann für eine Anzahl über die Ebene verteilter Punkte die Richtung

117) Leipzig 1899, p. 267 u. f.

118) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 1418.

119) Vgl. Encykl. I F 46 von *Mehmke*.

120) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 275, 660, 754.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dp}{dx}$  auftragen, woraus sich die Strömungskurven — die ausgezogenen Linien — ergeben.

Für den Doppelpunkt dieser Kurvenschar tritt der p. 309 erwähnte Fall  $\frac{0}{0}$  ein. Für den Anfangsdruck  $p_1$ , dem kleinsten, bei dem die Menge  $G$  noch durch die Düse getrieben werden kann, ergeben sich wieder zwei verschiedene Enddrücke  $p_o$  und  $p_u$ .

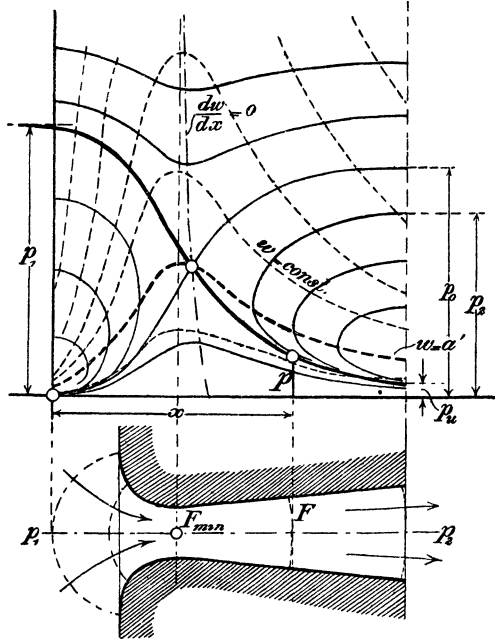


Fig. 62.

Versuche von A. Fliegner<sup>115)</sup>, A. Stodola<sup>41)121)</sup> und K. Büchner<sup>122)</sup> haben gezeigt, dass sich bei Gegendrücken  $p_2$  zwischen  $p_o$  und  $p_u$  ein Übergang von der stark gezeichneten Linie zu der auf  $p_2$  führenden einstellt. Dieser Übergang wurde von Stodola<sup>121)</sup> als „Verdichtungsstoss“ gedeutet (entsprechend den Riemann'schen Diskontinuitäten bei Luftwellen mit endlichen Druckunterschieden)<sup>123)</sup>.

Ist bei einem stationären Verdichtungsstoss der Zustand vor der Diskontinuität ( $p'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) gegeben, so ergibt sich daraus nach Stodola der Zustand nach dem Stoss ( $p''$ ,  $v''$ ,  $w''$ ) aus den Gleichungen:

121) Dampfturb. § 24 (§ 4).

122) Dessen Abhandlung<sup>42)</sup> enthält auch eine Zusammenstellung verschiedener früherer Versuche.

123) Encykl. IV 19, 8 (Art. Zemplén)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)*} \quad & \frac{w'}{v'} = \frac{w''}{v''}, \\
 \text{(b)*} \quad & \frac{w'^2}{v'} - \frac{w''^2}{v''} = g(p'' - p'), \\
 \text{(d)*} \quad & w'^2 - w''^2 = 2g(i'' - i').^{124)}
 \end{aligned}$$

In ihrer Anwendung auf permanente Gase wurde die Theorie des Verdichtungsstosses von *Prandtl*<sup>111)</sup> und *Proell*<sup>125)</sup> weiter ausgearbeitet; u. a. ergibt sich, bei Einführung der Schallgeschwindigkeit  $a'$  (vgl. p. 309) die einfache Beziehung:  $w'w'' = a'^2$ ; da immer  $w' > w''$  ist, so folgt hieraus, dass zum Zustandekommen eines Verdichtungsstosses  $w' > a'$  sein muss.

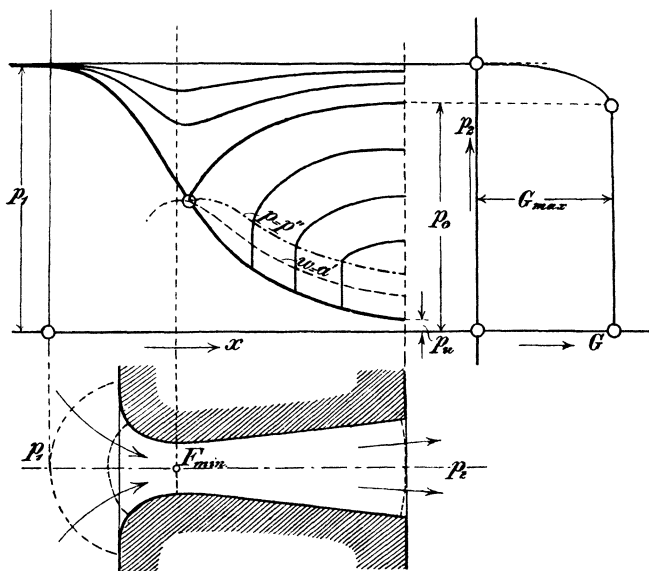


Fig. 63.

Die nach der vorstehenden Theorie für eine Lavaldüse bei einem bestimmten Anfangszustand  $p_1, v_1$  sich ergebenden Druckkurven sind in Fig. 63 dargestellt. Das Ausflussgewicht  $G$  ist zwischen  $p_2 = p_1$  und  $p_2 = p_0$  veränderlich, für  $p_2 < p_0$  konstant =  $G_{max}$  (was durch Versuche<sup>89)</sup> gut bestätigt ist).

Anm.: In cylindrischen Röhren sind für  $w > a'$  ebenfalls Verdichtungsstöße möglich.

124) Bei *Riemann* selbst ist statt Gl. (d\*) die Beziehung  $p = \varphi(v)$  angenommen, was vom Standpunkt der Wärmetheorie aus unzulässig ist.

125) Zeitschr. f. d. ges. Turbinwesen 1 (1904), p. 161.

21. Stationäre Wellen in einem freien Gasstrahl. E. Mach und P. Salcher<sup>126</sup>) entdeckten 1889 bei der optischen Untersuchung von Strahlen ausströmender Druckluft (Schlierenmethode) deutlich ausgeprägte stationäre Wellen. Die Erscheinung wurde später an Luft und anderen Gasen von L. Mach<sup>127</sup>) und R. Emden<sup>128</sup>), an Wasserdampf von P. Emden<sup>129</sup>), ebenfalls mit Hilfe von optischen Methoden genauer untersucht. Druckbeobachtungen sind von Parenty<sup>130</sup>) und Stodola<sup>131</sup>) gemacht worden. Parenty fand die Strahlform abhängig von dem Verhältnis  $\frac{p'}{p_2}$  der Drücke in und vor der Mündung (über den Mündungsdruck  $p'$  vgl. p. 297). Im Einklang damit ist die von R. Emden (für kegelförmig verengte Mündungen, engster Durchmesser  $d'$ ) aufgestellte Gesetzmässigkeit zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  und obigem Druckverhältnis:

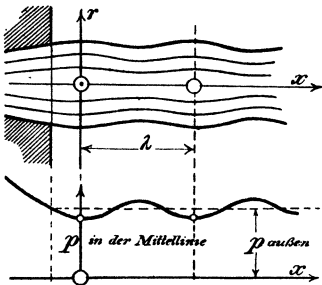


Fig. 64.

$\lambda = 1,24 d' \sqrt{\frac{p'}{p_2} - 1}$ .

Eine Theorie der Wellen mit sehr kleinen Amplituden gab L. Prandtl<sup>132</sup>). Er findet für einen Strahl von Kreisquerschnitt (Cylinderkoordinaten  $r$  und  $x$ , vgl. Fig. 64) das Strömungspotential

$$\varphi = \bar{w}x + a \sin \beta x J_0 \left( \beta r \sqrt{\frac{\bar{w}^2}{a^2} - 1} \right).$$

Aus der Grenzbedingung ergeben sich die möglichen Wellenlängen zu

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{\beta_n} = \bar{d} \frac{\pi}{\alpha_n} \sqrt{\frac{\bar{w}^2}{a^2} - 1},$$

wobei  $\bar{w}$  die mittlere Geschwindigkeit im Strahl,  $\bar{d}$  den mittleren Strahldurchmesser und  $\alpha_n$  die  $n^{\text{te}}$  Wurzel der Bessel'schen Funktion  $J_0$  bedeutet.  $\beta_n$  ist mittels der letzten Gleichung durch  $\alpha_n$  erklärt und für  $\beta$  ist in der vorletzten Gleichung einer der Werte  $\beta_n$  einzutragen.

126) Wien Ber. 98<sup>2a</sup> (1889), p. 1303; Ann. d. Phys. (3) 41, p. 144.

127) Wien Ber. 106<sup>2a</sup> (1897), p. 1025.

128) Über die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase, Leipzig 1899. Auszüglich in Ann. d. Phys. (3) 69 (1899), p. 264.

129) Die Ausströmungserscheinungen des Wasserdampfes, Diss. Basel (München) 1903.

130) Paris C. R. 118 (1894), p. 183; Ann. chim. phys. 12 (1897), p. 289.

131) Dampfturb. § 35 (§ 11).

132) Phys. Zeitschr. 5 (1904), p. 599.

Aus dem Auftreten von stationären Wellen haben *Parenty*<sup>130)</sup>, *R. Emden*<sup>128)</sup> und *A. Fliegner*<sup>133)</sup>, indem sie dieselben als ebene Schallwellen betrachteten, geschlossen, dass der Strahl sich mit Schallgeschwindigkeit bewege und dass überhaupt die Geschwindigkeit eines stationären Gasstromes nicht über die Schallgeschwindigkeit hinauskommen könne<sup>134)</sup>. Die Expansionsarbeit von  $p'$  (Mündungsdruck) bis  $p_2$  (Aussendruck) sollte dabei vollständig in „Wellenenergie“ verwandelt werden. Dem gegenüber lehrt die vorstehende Beziehung für die Wellenlänge, dass diese stationären Wellen, die im Gegensatz zu Schallwellen auch Transversalbewegung aufweisen, nur möglich sind, wenn die Strahlgeschwindigkeit  $\bar{w}$  grösser als die Schallgeschwindigkeit ist.

Bei den beobachteten Wellen finden sich meist gut ausgeprägte Diskontinuitäten vor, die mit den *Mach'schen* Geschosswellen<sup>135)</sup> Ähnlichkeit haben. Aus ihren Winkeln lassen sich wie dort Schlüsse auf die Geschwindigkeit  $w (> a)$  ziehen<sup>126)</sup><sup>127)</sup><sup>111)</sup>. Dass die von der Theorie geforderten hohen Geschwindigkeiten wirklich erreicht werden (auch bei gewöhnlichen Mündungen durch Expansion hinter dem Ausflussrohr), ergibt sich auch aus den Beobachtungen des Stossdruckes von Dampfstrahlen von *Delaporte*<sup>136)</sup> und *E. Lewicki*<sup>137)</sup>.

*Bemerkung.* An dieser Stelle möge eine Untersuchung von *A. Stodola* und *A. Hirsch*<sup>138)</sup> über zweidimensionale Strömung eines Gases Erwähnung finden, in der unter der Annahme  $p v = \text{const.}$  das Problem behandelt wird, dem bei inkompressiblen Flüssigkeiten die Strömung  $X + i Y = (x + i y)^n$  entspricht.

**22. Überströmen.** a) *Überströmen im Beharrungszustande.* Zur Herabminderung des Druckes eines Gases oder Dampfes beim Überströmen von einem Raum in einen zweiten (zum „*Drosseln*“ desselben) werden Verengungen des Strömungsquerschnitts (durch Ventile, Klappen u. s. w.) angewandt. Ist die Geschwindigkeit weiter ab von der

133) Zürich Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. 47 (1902), p. 21; Schweiz. Bauzeitg 43 (1904), p. 104 u. 140.

134) Die Ansicht, dass die Luft keine größere Geschwindigkeit als Schallgeschwindigkeit annehmen könne, wurde schon früher von *C. Holtzmann* (Lehrbuch des theor. Mechanik, Stuttgart 1861, p. 376) vertreten, mit der gleichfalls unzutreffenden Begründung, dass die Aussenluft nicht schneller als mit Schallgeschwindigkeit ausweichen könne.

135) Encykl. IV 18, 4, Fussnote 52 (*Cranz*).

136) Rev. de mécanique 10 (1902), p. 466.

137) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 47 (1903), p. 441, 491, 525 = Forschungsarb. Heft 12, p. 73 u. f.

138) Dampfturb. § 95 (§ 35).

Verengung diesseits und jenseits gering genug, so dass die kinetische Energie dort ausser Betracht bleiben darf, so giebt Gleichung (d), wenn noch von Wärmezufuhr und Höhendifferenzen abgesehen wird:

$$i_1 = i_2.$$

Über den Anteil der „Drosselung“ am Kreisprozess der Kaltdampfmaschine vgl. Nr. 14.

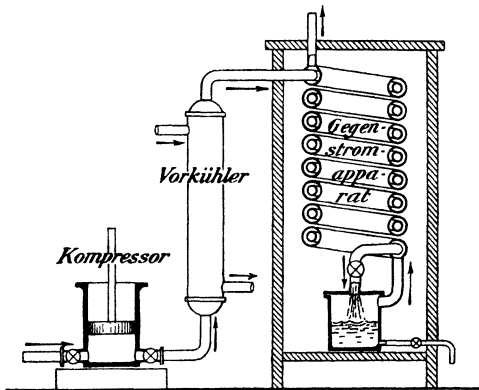


Fig. 65.

Bei idealen Gasen ergibt sich mit  $i = \gamma_p T$  aus dem Vorstehenden  $T_1 = T_2$ . Joule und W. Thomson<sup>139)</sup> fanden diese Beziehung in ihren bekannten „Versuchen mit dem Watepfropfen“ bei den wirklichen Gasen nicht genau bestätigt; sie erhielten eine Abkühlung nach der Formel

$$\frac{dT}{dp} = \frac{C}{T^2}.$$

Für  $p$  in  $\text{kg/m}^2$  ist bei Luft  $C = 2$  zu setzen.

Diese Abkühlung bei Drosselung ist in dem Luftverflüssigungsverfahren von Linde<sup>140)</sup> technisch verwertet. Es wird hierbei (vgl. die Fig. 65) in einem Gegenstromapparat (Wärmeaustauscher) die unter einem sehr hohen Druck ankommende Luft durch die ihr entgegenkommende bereits entspannte Luft abgekühlt, so dass sich die Temperatur am untern Ende des Gegenstromapparates allmählich bis auf die Verflüssigungstemperatur erniedrigt.

b) *Überströmen bei konstantem Gefässvolumen.* Die Vorgänge beim Überströmen eines Gases oder Dampfes aus einem Gefäss in ein anderes, in dem der Druck geringer ist, wurden unter der Annahme, dass durch die Gefässwände keine Wärmeleitung stattfindet, und dass der augenblicklich mit wesentlicher kinetischer Energie behaftete Teil des Gases jederzeit nur einen zu vernachlässigenden Bruchteil der ganzen Gasmenge ausmacht, von J. Bauschinger<sup>141)</sup> 1863 einer ausführlichen Behandlung unterzogen (vgl. auch Zeuner, Therm. I,

139) Encykl. V 3, 23 (Bryan).

140) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 39 (1895), p. 1157 (Vortrag von Schröter); Ann. Phys. Chem. (3) 57 (1896), p. 328, „Erzielung niedrigster Temperaturen“.

141) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8 (1863), p. 81 u. 153 (Überströmen von Gasen), p. 429 (Überströmen von Wasserdampf). Dort findet sich weitere Litteratur.

§ 35, 37). Es seien  $V_1$  und  $V_2$  die beiden Volumina,  $G_1$  und  $G_2$  die anfänglichen Gas- (oder Dampf-) Gewichte<sup>142)</sup> in den Gefässen,  $G_x$  und  $G_y$  die augenblicklichen Gewichte.

Dann gelten die Beziehungen, dass das Gesamtgewicht und der gesamte Energiegehalt der beiden Gefässe konstant sind:

$$\begin{aligned} G_x + G_y &= G_1 + G_2, \\ G_x u_x + G_y u_y &= G_1 u_1 + G_2 u_2. \end{aligned}$$

Ferner ist  $G_x v_x = V_1$  und  $G_y v_y = V_2$ .

Im Ausflussgefäss findet adiabatische Expansion des jeweils zurückgebliebenen Gasquantums statt; hierdurch bestimmt sich sehr einfach die zu einem gegebenen augenblicklichen Druck gehörige Energie dieses Gefässes und damit nach obigem auch die zugehörige des zweiten Gefässes. In diesem wird die Energie durch das Einströmen der Menge  $dG_y$  um  $dG_y(u' + p_y v' + \frac{w'^2}{2g})$  vermehrt ( $u'$ ,  $v'$  im Strahl hinter der Mündung). Für die Veränderung von  $u$  in beiden Gefässen erhält man so (mit  $dG = dG_y = -dG_x$ )

$$du_x = -p_x v_x \frac{dG}{G_x}; \quad du_y = (p_x v_x + u_x - u_y) \frac{dG}{G_y}.$$

Ist  $u = f(p, v)$  gegeben, so ergeben sich Gleichungen für  $p_x$  und  $p_y$  als Funktionen der Gewichte  $G$ . Die Einführung der Zustandsgleichung (Berechnung von  $T$ ) lehrt, dass als Kompensation zu der adiabatischen Abkühlung im ersten Gefäss im zweiten eine erhebliche Temperatursteigerung eintritt.

Für das Ende des Überströmens, das sich in endlicher Zeit vollzieht (bei kleineren Druckunterschieden ist diese Zeit dem Ausdruck  $\frac{V}{\mu F_0 \bar{p}} \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{2g\bar{v}}}$  proportional<sup>143)</sup>), wird  $p_x = p_y$ ; für permanente Gase stellt sich hierbei als Enddruck ein

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

142) Hier nicht Gewichte pro Zeiteinheit, sondern einfache Gewichte!

143) Über den zeitlichen Verlauf der Ausfluss- und Einströmungsvorgänge findet man Notizen bei *de Saint-Venant* und *Wantzel*<sup>53)</sup>, *Weisbach*<sup>56)</sup>, § 428, besonders aber bei *Grashof*, Masch.-L. § 121 u. 122; neuerdings bei *Schüle*<sup>84)</sup>. An dieser Stelle mag auch Erwähnung finden, dass *Zeuner* in seinem „Lokomotivblasrohr“<sup>61)</sup>, p. 199 u. f. den zeitlichen Verlauf des Auspuffvorganges bei einem Dampfcylinder theoretisch verfolgt hat, unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der von der Steuerung dem Dampf dargebotenen Ausströmungsöffnung. — Der zeitliche Verlauf des Einströmens des Kesseldampfes in den Cylinder wurde neuerdings von *V. Blaess* (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 49 (1905), p. 697) und



Als Spezialfälle des Vorstehenden sind besonders das Ausströmen eines komprimierten Gases in die freie Atmosphäre und das Eindringen von Luft in ein evakuiertes Gefäß von Bedeutung; im letzteren Falle wird die Temperatur im Gefäß

$$T_y = \kappa T_1 - \frac{G_2}{G_y} (\kappa T_1 - T_2);$$

ist das Gefäß zuerst luftleer ( $G_2 = 0$ ), so ergibt sich das bemerkenswerte Resultat, dass  $T_y$  während des Einströmens konstant  $= \kappa T_1$  ist.

**23. Dampfturbinen.** Hier mögen einige Worte über diese Maschinen Platz finden, in denen die kinetische Energie des strömenden Dampfes nutzbar gemacht wird. Man unterscheidet wie bei den Wasserturbinen<sup>144)</sup> Reaktions- und Aktions-Turbinen (Überdruck- und

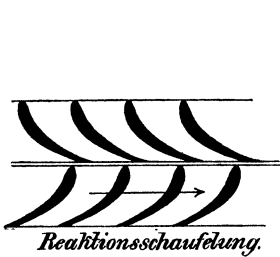


Fig. 66.

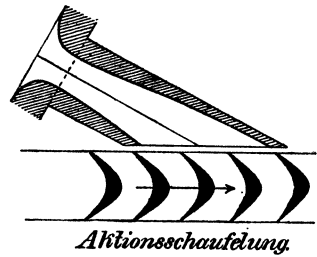


Fig. 67.

Druck-Turbinen), je nachdem im Laufrade eine wesentliche Geschwindigkeitsvermehrung stattfindet oder nicht (vgl. Fig. 66 und 67). Eine weitere Unterscheidung ist die in einstufige und mehrstufige Turbinen,

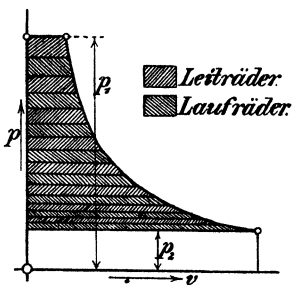


Fig. 68.

je nachdem das ganze Druckgefälle in einem Rad verarbeitet wird, oder der Dampf nach einander durch eine Reihe von Rädern tritt, und so seine Energie stufenweise abgibt.

Neben Druckabstufung (Expansion von Rad zu Rad) findet man auch Geschwindigkeitsabstufung, wobei die in den Düsen erzeugte Geschwindigkeit in mehreren Rädern schrittweise verringert wird. Die Stufen werden angewandt, um die sonst sehr hohen

Schaufelgeschwindigkeiten (200—400 m/sec) zu ermässigen.

Die Dampfarbeit lässt sich an der Hand der Diagramme von

P. Debye (Ber. d. Aachener Bez.-Ver. deutsch. Ing. 7. Juni 1905) behandelt und zu einer Theorie der Abmessungen der Steuerungskanäle verwertet.

144) Encykl. IV 21 (Grübler).

Nr. 16 zeichnerisch verfolgen; für verlustlosen Arbeitsvorgang entsprechen diese Diagramme genau denen für eine verlustlose Kolbendampfmaschine. Fig. 68 giebt das Diagramm einer vielstufigen Reaktionsturbine.

Die ersten technisch verwertbaren Turbinen waren die von *C. A. Parsons* (1885) — eine vielstufige Reaktionsturbine — und die von *G. De Laval* (1893)<sup>145)</sup> — eine einstufige Aktionsturbine. In neuerer Zeit sind als vielstufige Aktionsturbinen mit Druckstufen die *Rateau-* und *Zoellyturbine* hinzugekommen. Eine Aktionsturbine mit Geschwindigkeitsabstufung ist die von *Curtis*.

Die Litteratur über Dampfturbinen, erst sehr spärlich, ist in den letzten Jahren stark im Zunehmen begriffen; den Lesern der Encyclopädie sei besonders das *Stodola'sche* Buch empfohlen, in dessen dritter Auflage (1905) die meisten neueren Arbeiten Berücksichtigung gefunden haben. Als kürzere zusammenfassende Aufsätze seien noch genannt die Abhandlung von *A. Rateau* in der *Revue de mécanique* 7 (1900), p. 167, ferner der Artikel „Dampfturbinen“ in *Lueger's* Lexikon der gesamten Technik, 2. Aufl. Stuttgart 1905, Bd. II, p. 624, von *R. Proell*. Besonders dieser letztere Aufsatz enthält zahlreiche Litteraturnachweise.

---

145) Die Jahreszahlen beziehen sich auf die erste Ausstellung der Maschinen.

