grösser ist, als der engste Querschnitt, je zwei Werte von p und w. Für den Verlauf von p ist dies in Fig. 57 angedeutet (die stark gezeichneten Linien). Welche Kombination der Kurvenzweige in einem bestimmten Fall eintreten wird, richtet sich nach dem Druck an den Enden des Rohres.

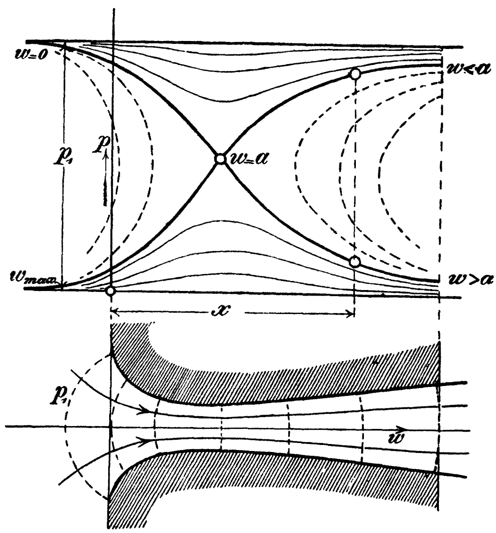

Fig. 57.

Untersucht man für eine fest vorgegebene Röhre die den verschiedenen Strömungsvorgängen mit gleichem p_1 und v_1 entsprechende sekundliche Ausflussmenge G, so zeigt sich als Folgerung aus dem Vorstehenden, dass diese einen Grösstwert erreicht, wenn im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit eintritt.

Verschiedene Druckverteilungen, die kleineren Werten von G entsprechen, sind in Fig. 57 durch die dünn ausgezogenen Linien dargestellt. Die gestrichelten Linien beziehen sich auf Ausflussmengen grösser als $G_{\max.}$; sie führen nicht von einem Rohrende zum andern, entsprechen daher keiner hier möglichen Strömung.

18. Ausströmen aus Öffnungen und Mundstücken. Die Beantwortung der Frage, welche Luftmenge bei vorgegebener Druckdifferenz pro Zeiteinheit durch eine gegebene Öffnung hindurchtritt, entspricht einem alten Bedürfnis der Technik. Dies ist offenbar der Grund dafür, dass sich die älteren Arbeiten aus dem Gebiete des vorliegenden Referates gerade um diese Frage gruppieren. Es mag also wohl passend erscheinen, an dieses Thema eine Schilderung der historischen Entwicklung der hier auftretenden Gedankenreihen anzuknüpfen.

Die älteste Notiz über den Ausfluss „elastischer Flüssigkeiten" scheint bei *Daniel Bernoulli*[46]) 1738 zu stehen. Er giebt die Anweisung, die Berechnung wie bei einer inkompressiblen Flüsssigkeit vorzunehmen; die Geschwindigkeit sei zu setzen:

46) Hydrodynamica, Strassburg 1738, p 224.

$$w = \sqrt{2g(p_1 - p_2)v_1}\,;$$ [48])

die Ausflussmenge wird mit $G = F \cdot \frac{w}{v_1}$ berechnet. Diese Berechnungsweise, der die Vorstellung zu Grunde lag, dass die Geschwindigkeit gemäss dem *Torricelli*'schen Theorem einfach durch die im Ausflussgefäss „vorhandene" Druckhöhe $h = v_1(p_1 - p_2)$ erzeugt werde, und dass die Geschwindigkeitserzeugung für jedes Teilchen plötzlich beim Verlassen des Gefässes erfolge, findet sich bei *d'Alembert*[49]) und anderen wieder; sie schien auch durch verschiedene Versuchsreihen[50]), die freilich alle mit kleinen Pressungen angestellt waren, bestätigt zu werden. Erst *Navier*[51]) fand 1829 den richtigen Weg, die unter allmählicher Expansion des Gases stattfindende Geschwindigkeitserteilung mit Hilfe von Differentialbetrachtungen zu berechnen. Er besitzt die Beziehung (b) in ihrer einfachsten Form (vgl. p. 293) und erhält aus ihr mit der Annahme, dass der Druck in der Mündung gleich dem äusseren Druck p_2 ist, unter Voraussetzung des *Mariotte*'schen Gesetzes: $pv = C$ für eine der Fig. 58 entsprechende Mündung

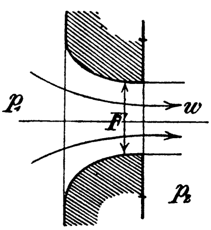

Fig. 58.

$$G = \frac{Fw}{v_2} = \frac{F}{v_2}\sqrt{2gC\log\frac{p_1}{p_2}}.$$ [52])

Er diskutiert die Gleichung nach verschiedenen Richtungen, zeigt auch, dass sie für sehr kleine Pressungsunterschiede in die bei inkompressiblen Flüssigkeiten gebräuchliche übergeht. Er findet auch bereits, dass (für konstantes G) der Querschnitt F als Funktion von p ein Minimum besitzt, zieht aber daraus falsche Schlussfolgerungen. Des

48) Im folgenden bezeichnet der Index 1 immer die Zustände in dem Raume, aus dem die Flüssigkeit ausfliesst; der Index 2 die Zustände in dem Raume, in den sie eintritt.

49) Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1744, p. 165 u. f.

50) Die bemerkenswerteren Arbeiten über Ausflussversuche bei geringem Überdruck sind *G. Schmidt,* Ann. Phys. Chem. (1) 66 (1820), p. 39; *Lagerhjelm,* Stockholm Akad. 1822; Bericht hierüber von *Girard,* Journ. génie civil 1829; *K. L. Koch,* Versuche über die Geschwindigkeit ausströmender Luft, Göttingen 1824; Bericht hierüber von *G. Schmidt,* Ann. Phys. Chem. (2) 2 (1824), p. 39; *Aubuisson,* Ann. des mines 13 (1826), p. 483; *H. Buff,* Ann. Phys. Chem. (2) 37 (1836), p. 277 u. 40 (1837), p. 14; (Neuberechnung der *Koch*'schen Versuche und Bericht über eigene Versuche).

51) Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques, Paris, Mém. de l'Acad. 9 (1830), p. 311.

52) Die sehr verschiedenen Formelbezeichnungen und Bezugsgrössen sind überall in die unsrigen umgeschrieben.

weiteren werden nach den Methoden der Hydraulik Ausströmung aus Öffnungen in dünner Wand, Energieverluste durch plötzliche Erweiterung und Kontraktion in Rohren, und ähnliches behandelt.

Um einen grossen Schritt wurde die Theorie zehn Jahre später, 1839, von den Ingenieuren *B. de Saint-Venant* und *L. Wantzel*[53]) gefördert. Sie berücksichtigen durch Verwendung des *Laplace-Poisson*schen Adiabatengesetzes $pv^\varkappa = \text{const.}$ die bei der Expansion eintretende Abkühlung des Gases und erhalten so die Formeln:

$$w = \varphi \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)},$$

$$G = \mu F_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{v_1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)}$$

(φ und μ sind durch Versuche zu ermittelnde Korrektionsziffern). *De Saint-Venant* und *Wantzel* diskutieren die Beziehungen und finden, dass G als Funktion von p_2 (bei festgehaltenem p_1 und μ) ein Maximum bei dem Werte

$$p' = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \cdot p_1$$

besitzt. Der Gedanke, dass es widersinnig ist, dass die Ausflussmenge abnehmen soll, wenn der Druck auf der Ausströmseite erniedrigt wird, führt sie auf den Gedanken, dass der Druck p in der Mündung bei grösseren Druckdifferenzen höher sein müsse, als der Aussendruck p_2, und jedenfalls nie unter den eben definierten Wert p' heruntersinken könne. Ihre Experimente (Einströmen der Luft in den Recipienten einer Luftpumpe) zeigen, obwohl die Messungen wegen Nichtbeachtung der auftretenden Temperaturdifferenzen mangelhaft sind, diese Annahmen bestätigt. (Zwischen $p_2 = 0$ und $p_2 = 0{,}4\ p_1$ war die Ausflussmenge konstant, nahm dann bei grösserem p_2 erst langsam, dann rascher ab.) Spätere Versuche von 1843[54]) an einem Dampfkessel gaben ähnliche Resultate.

Die Arbeit von *de Saint-Venant* und *Wantzel* geriet merkwürdiger Weise wieder in Vergessenheit. Zum Teil war daran wohl die schroffe Ablehnung schuld, welche ihr von *Poncelet*[55]) zu Teil wurde, der, auf Versuche von *Pecqueur* gestützt, die alte *Bernoulli*'sche Hypothese

53) Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, Journ. éc. polyt. 27 (1839), p. 85.

54) Paris C. R. 18 (1843), p. 1140.

55) Paris C. R. 21 (1845), p. 178; Replik und Duplik p. 366 u. 387.

verteidigte. Ein anderer Grund mag darin liegen, dass *de Saint-Venant* und *Wantzel* zur Diskussion ihrer Versuchsergebnisse nicht ihre rationelle Formel verwendeten, sondern aus ihnen eine ziemlich willkürliche empirische Formel ableiteten.

Die rationellen Formeln für w und G wurden erst 1855 von *Jul. Weisbach*[56]) wieder gefunden und führten lange seinen Namen. *M. Herrmann*[57]) diskutierte 1860 das Maximum von G und deutete es, wie *de St. Venant* und *Wantzel*: der Mündungsdruck sinkt nie unter p' herab und die Geschwindigkeit steigt erst ausserhalb der Mündung unter Ausdehnung des Strahls auf den p_2 entsprechenden Wert.

In derselben Zeit (1856) kamen — wieder unabhängig von den bisherigen — *W. Thomson* und *Joule*[58]) von der Seite der Thermodynamik her zu einer Lösung des Ausflussproblems. Sie besitzen die Gleichung (d) in der auch bei beliebigen Widerständen giltigen Form

$$\frac{w^2}{2g} = u_1 - u_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 = \frac{\gamma_p}{A}(T_1 - T_2)$$

und gewinnen hieraus ebenfalls die Formeln für w und G bei adiabatischer Expansion; sie bemerken dabei auch das Maximum von G.

Inzwischen war auch das adiabatische Ausströmen des Wasserdampfes in Angriff genommen. Nach der ersten Theorie von *Redtenbacher*[59]), 1855, die wegen fehlender Berücksichtigung der Condensation im expandierenden Dampf unrichtig war, wies 1860 *F. Grashof*[60]) auf den richtigen Weg. Durchgeführt wurde die Rechnung auf Grund unserer Formel (d) aus den Gesetzen für nasse Dämpfe (vgl. Nr. 6) von *G. Zeuner* 1863[61]). Er erhält

$$A\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 \lambda_1}{T_1}(T_1 - T_2) + q_{p_1} - q_{p_2} - T_2(s_1'' - s_2'') + Av''(p_1 - p_2),$$ [62])

wofür er für Überschlagsrechnungen noch die Näherungsformel

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 \lambda_1}{A T_1}(T_1 - T_2)$$

angiebt.

Das zur Berechnung des Ausflussgewichtes nötige Dampfvolumen wird aus der Gleichung der Adiabate ermittelt. Die Formeln werden

---

56) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 3. Aufl. 1855, § 431.

57) Zeitschr. d. österr. Ing.-Ver. 12 (1860), p. 34.

58) London Proc. Roy. Soc. 8 (1856), p. 178.

59) Gesetze des Lokomotivbaues, Mannheim 1855, p. 34.

60) Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing. 4 (1860), S. 95.

61) Das Lokomotivblasrohr, Zürich 1863, p. 76 u. f.

62) In dieser Weise findet sich die Formel erst etwas später in der 2. Aufl. der „Grundzüge“, p. 411.

für den Ausfluss von trocken gesättigtem Dampf, sowie von heissem Wasser (Kesselwasser)[63]) spezialisiert und durch Tabellen erläutert. Für letzteres findet er das merkwürdige Resultat, dass für Ausströmen in die Atmosphäre das sekundliche Ausflussgewicht für 1 qcm Öffnung fast unabhängig vom Kesseldruck ungefähr 0,11 kg betrage[64]).

Die *Theorie* des Ausströmens wurde nach der thermodynamischen Seite hin weiter gefördert von *Grashof*, der 1863 in der bereits zitierten grundlegenden Arbeit[37]) den Einfluss der durch die Widerstände hervorgerufenen Erwärmung des Gases richtig einschätzen lehrte, des weiteren von *Zeuner* 1871 in seiner „Neuen Darstellung der Vorgänge beim Ausfluss der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen"[65]). *Zeuner* berücksichtigt hier (bei Luft) den Einfluss der Widerstandsarbeit unter der Annahme, dass sie der Temperatursenkung, d. h. dem Zuwachs der kinetischen Energie proportional wäre:

$$dz = \zeta d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = \zeta \frac{\gamma_p}{A} dT \quad \text{(vgl. p. 298).}$$

Er erhält so als Gesetz der Zustandsänderung statt $pv^\varkappa = \text{const.}$ die Beziehung $pv^n = \text{const.}$, worin der „Ausflussexponent" n mit dem Widerstandskoeffizienten ζ durch die Gleichung

$$n = \frac{(1+\zeta)\varkappa}{1+\zeta\varkappa}$$

zusammenhängt. Das Ausflussgewicht ergiebt sich hiernach zu

$$G = \alpha F_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{v_1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)}.$$

Der Koeffizient α ist dabei durch den Zusammenhang zwischen dem freien Strahlquerschnitt F und dem Mündungsquerschnitt F_0 gegeben: $F = \alpha F_0$. *Zeuner* empfiehlt unterhalb

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{(kritisches Druckverhältnis)},$$

bei gut abgerundeten Mündungen $\alpha = 1$ zu setzen. Bei grösserem Druckverhältnis ist $\alpha > 1$ und es wird hierfür G unabhängig vom Aussendruck gleich dem Maximalwert

$$G = \alpha' F_0 \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{p_1}{v_1}},$$

63) Zuerst im Civilingenieur 10 (1864), p. 87.

64) Neuere Untersuchungen führten zu andern Ergebnissen. Vgl. hierzu den Schluss dieser Nummer.

65) Civiling. 17 (1871), p. 71.

worin der neue Koeffizient α' für abgerundete Mündungen $= 1$ zu setzen ist. Für gesättigte Dämpfe, sowie auch für überhitzte schlägt er denselben Rechnungsgang vor[66]. Es ist dazu nur nötig, für die adiabatische Expansion einen mittleren Exponenten $\varkappa$ anzunehmen. Für gesättigten Wasserdampf giebt er an: $\varkappa = 1{,}035 + 0{,}10\, x_1$, wo x_1 die spezifische Dampfmenge beim Druck p_1 ist.

Für Ausfluss von trocken gesättigtem Dampf erhält man aus obiger Formel, wenn man das Volumen v_1 durch den Druck ausdrückt ($pv^{1,063} = \text{const.}$), nach *Grashof*[67] die einfache Beziehung

$$G/\alpha' F_0 = Cp^{0,96965};$$

die Konstante C ist für $\zeta = 0$, wenn F_0 in m^2, p in kg/m², G in kg/sec gemessen wird, $C = 0{,}02018$.

Inzwischen waren von Verschiedenen *Versuche* zur Prüfung der Theorie und zur Gewinnung von Korrektionskoeffizienten unternommen worden.

Voranzustellen sind die vorzüglichen Versuche *Weisbach*'s von 1856, über die er 1859[68] berichtet, deren Zahlenmaterial er aber erst 1866[69] ausführlich mitgeteilt und bearbeitet hat. Seine Versuche, mit in einem Kessel komprimierter Luft angestellt, waren dadurch wesentlich vollkommener als die der früheren Experimentatoren, dass *Weisbach* bei den Druckablesungen, aus denen die Ausflussmengen bestimmt wurden, jedesmal den Ausgleich der bei der Expansion entstehenden Temperaturdifferenzen abwartete. Ein Teil seiner Versuchsresultate, die sich auf sehr verschiedene Arten von Mündungen, mit und ohne Ansatzrohr, beziehen, wurde von *Grashof*[70] einer verbessernden Neuberechnung unterzogen. Die Änderung des Ausflussgesetzes bei Überschreitung des kritischen Druckverhältnisses war *Weisbach* unbemerkt geblieben, seine Versuche reichten nur eben bis an diese Grenze. Das Verdienst, diese Dinge zuerst einwandfrei nachgewiesen zu haben, gebührt *R. D. Napier*[71] (1866). Er stellt die Ergebnisse seiner Ausflussversuche mit Wasserdampf (abgerundete Mündungen) in folgenden zwei Formeln zusammen:

---

66) Vgl. auch die Darstellung in Therm. II, 1. Aufl. § 20 u. 22; 2. Aufl. § 21 u. 23.

67) Masch.-L. § 111.

68) Civiling. 5, p. 1.

69) Civiling. 12, p. 1 u. 77.

70) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 7 (1863), p. 279; Masch.-L. 1875, p. 580.

71) On the velocity of steam and other gases, London 1866; Engineer 23 (1867), p. 11.

$$\text{für } p_2 > \tfrac{1}{2}p_1 \text{ ist } \frac{G}{F_0} = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\cdot\frac{(p_1-p_2)p_2}{p_1 v_1}},$$

$$\text{für } p_2 < \tfrac{1}{2}p_1 \text{ ist } \frac{G}{F_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\,\frac{p_1}{v_1}}.$$ [72])

Er hat auch zuerst[73]) den Druck in der Mündung experimentell ermittelt (durch Druckmessung an einer feinen Bohrung in der Ausflussmündung, vgl. Fig. 59) und damit die Annahme von *de Saint-Venant* und *Wantzel*, die er selbst nicht kannte, wohl bestätigt.

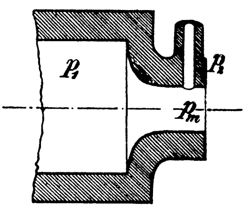

Fig. 59.

Als weitere Versuche über *Luft*ausfluss sind vor allem zu nennen die umfangreichen Versuche von *Zeuner* 1871[74]) und *Fliegner* 1874 und 1877[75]). In der letzteren Arbeit untersucht *Fliegner* auch den Einfluss der Wärmeleitung im Mundstück theoretisch sowohl als auch experimentell, er findet bei einem Mundstück aus Messing den Ausflussexponenten $n = 1{,}37$ ($\zeta = 0{,}077$), bei Buchsbaumholz $n = 1{,}395$ ($\zeta = 0{,}027$); aus diesen Zahlen schliesst er auf eine bedeutende Wirkung der Wärmeleitung. In sorgfältigen Beobachtungen des Mündungsdruckes p_m findet er, dass dieser nie unter den „kritischen Druck" herabgeht, und immer etwas höher als p_2 liegt. Als Näherungsformeln für gut abgerundete Metallmündungen empfiehlt er (p in kg/m², F in m²)

$$\frac{G}{F_0} = 0{,}76\sqrt{\frac{(p_1-p_2)p_2}{T_1}} \quad \text{für } p_2 > \frac{1}{2}p_1,$$

$$\frac{G}{F_0} = 0{,}38\,\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \quad \text{für } p_2 < \frac{1}{2}p_1,$$

In Fig. 60 findet man die Ergebnisse der *Fliegner*schen Versuche veranschaulicht; es sind die Grössen p_m und G in ihrer Abhängigkeit von p_2 bei festgehaltenem p_1 dargestellt.

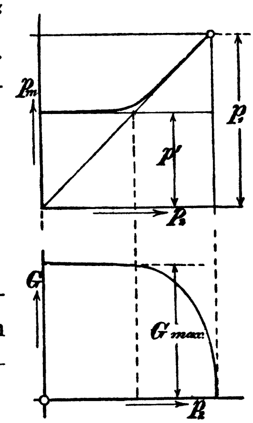

Fig. 60.

Erwähnenswert sind auch die sorgfältigen Versuche, die *G. A. Hirn* 1884[76]) mit Luft bei gewöhnlichen und höheren Temperaturen, sowie mit Kohlensäure und Wasserstoff angestellt hat. Er liess die Gase aus einem Gasometer

72) So sind die Formeln von *Zeuner* (Therm. II, § 24) umgeschrieben worden.

73) Engineer 28 (1869), p. 287. Vgl. auch *Rankine*, Engineer 28 (1869), p. 352 u. 358 = Civiling. 16 (1870), p. 35.

74) Vorläuf. Bericht Civiling. 20 (1874), p. 1. (Dort ist auch die Priorität von *de Saint-Venant* und *Wantzel* wieder aufgedeckt.) Ausführlicher in Therm. I (1. Aufl.), § 49—51.

75) Civiling. 20, p. 13 und Civiling. 23, p. 443.

76) Brüssel Mem. Acad. Roy. 156 (1886), Nr. 3; Ann. chim. phys. (6) 7

in einen evakuierten Raum einströmen und erreichte dadurch eine sehr einwandfreie Messung der Ausflussmengen. Die *Hirn*'schen Versuche bestätigen die früheren Ergebnisse; sonderbarer Weise glaubte *Hirn* selbst, indem er die Geschwindigkeit auch über das kritische Druckverhältnis hinaus mit der Formel $w = Gv_2/F$ berechnete, einen Widerspruch zwischen Theorie und Versuch nachgewiesen zu haben; seine Ansicht wurde von *Hugoniot*[77]) und *Parenty*[78]) 1886 widerlegt.

Parenty hat später[79])[80]), auf den *Hirn*'schen Versuchen fussend, eine empirische Näherungsformel von grosser Allgemeinheit angegeben. Er stellte fest, dass die Ausflussmenge G in ihrer Abhängigkeit von p_2 (vgl. Fig. 60) sehr nahe durch einen Ellipsenquadranten und dessen horizontale Tangente dargestellt werden kann. Es möge nun das Verhältnis $(p_1 - p_2)/p_1 = \delta$ und $(p_1 - p')/p_1 = \delta'$ gesetzt werden (p' = kritischer Mündungsdruck), ferner sei α_0 der Kontraktionskoeffizient, der der Mündung für Wasserausfluss unter Wasser zukommt; dann ist nach *Parenty* für beliebige Mündungen das Produkt $\delta' \cdot \alpha_0$ eine Konstante, ferner $G_{\max}$ proportional $\sqrt{\alpha_0}$; die Konstanten werden so bestimmt, dass für $\alpha_0 = 1$ der adiabatische Ausfluss erhalten wird. Mit

$$\delta' \cdot \alpha = \delta_0' = 1 - \left(\frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \quad \text{(vgl. p. 297)}$$

wird

$$\text{für } \delta < \delta' : \frac{G}{F} = 2\alpha_0 \sqrt{g\delta_0' p_1 v_1 \cdot \delta \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\frac{\delta}{\delta_0'}\right)},$$

$$\text{für } \delta > \delta' : \frac{G}{F} = \delta_0' \cdot \sqrt{2\alpha_0 g p_1 v_1};$$

von den Koeffizienten δ_0' und α_0 der vorstehenden Formeln hängt der eine nur von der Gasart ab, der andere nur von der Mündungsform. Neuerdings hat *Parenty* an Hand der *Rateau*'schen Versuche (s. u.) die Anwendbarkeit seiner Formeln für Dampfausfluss gezeigt[81]). Ferner hat *Boussinesq*[82]) gezeigt, dass — für adiabatischen Ausfluss — eine Reihenentwicklung nach δ die *Parenty*'sche Ellipsenformel als zweite, bereits sehr befriedigende Näherung ergiebt.

(1886), p. 289; Recherches expérimentales sur la limite de vitesse que prend un gaz etc., Paris 1886.

77) Paris C. R. 102 (1886), p. 1545.

78) Paris C. R. 103 (1886), p. 125.

79) Paris C. R. 113 (1891), p. 184; 116 (1893), p. 1120; 119 (1894), p. 419.

80) Ann. chim. phys. (7) 8 (1896), p. 5.

81) Ann. des mines (10) 2 (1902), p. 403.

82) J. des Mathem. (5) 10 (1904), p. 79.

In neuerer Zeit (1897) hat auch *Zeuner*[83]) Luftausflussversuche mit einem Vakuumkessel gemacht, die ihn zu einer neuen Hypothese geführt haben; besonders Versuche mit grossen Widerständen führen ihn auf die Beziehung, „dass die Luft in den leeren Raum mit der dem Zustande der Luft in der Mündung entsprechenden Schallgeschwindigkeit $w_s = \sqrt{\varkappa g p v}$ ausströmt, welche Widerstände hierbei auch beim Hinströmen nach der Mündung vorliegen mögen". Diese Geschwindigkeit ergiebt sich aus (d) zu

$$w_s = \sqrt{\frac{2 g \varkappa}{\varkappa + 1} p_1 v_1}\,.$$

Die Ausflussmenge wird hierbei

$$G = F_0 \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{2 g \varkappa}{\varkappa + 1} \frac{p_1}{v_1}}\,.$$

Wie *W. Schüle*[84]) nachwies, ist das Maximum der älteren *Zeuner*'schen Formel, die unter dem kritischen Druckverhältnis weiter gelten sollte, grösser als der vorstehende Wert; man kann indes diesen Wert durch verschiedenes n in beiden Formeln mit dem Maximum zusammenfallen lassen. — *Zeuner*'s Versuche ergaben — für Druckverhältnisse über dem kritischen Wert — den Ausflussexponenten n zu 1,375 bis 1,38; dieses entspricht Werten von $\zeta = 0{,}065$ bis 0,055.

Über den Ausfluss von *Dampf*[85]) sind nach *Napier* von Verschiedenen Versuche angestellt worden. So hat *Zeuner* 1870 Ausflussversuche mit Hilfe eines Injektors (Dampfstrahlpumpe) gemacht (erst 1890 veröffentlicht[86])). Ferner sind zu erwähnen die Versuche von *C. H. Peabody* und *L. H. Kuhnhardt*[87]) (mit Messung des Mündungsdruckes), von *Parenty*[80]), von *Rosenhain*[88]) (mit Messung der Reaktion der ausfliessenden Strahlen, bei verschiedenen Mündungen, auch konisch erweiterten Rohren, vgl. Nr. **20**), von *Gutermuth* und *Blaess*[89]) (mit verschiedenen Mündungen, Röhren und Düsen, wie sie bei Dampf-

83) Therm. I (2. Aufl.), p. 242 u. 256.

84) *Dingler*'s Polyt. Journ. 318 (1903), p. 355, 369 u. 388.

85) Ein zusammenfassender Bericht über ältere Versuche (auch solche mit Luft) findet sich bei *R. Kolster*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 11 (1867), p. 433 u. 711 u. 12, p. 97. Besonders genannt seien die Versuche von *Tremery*, Ann. des mines (3) 20 (1841), p. 343) und von *Minary* und *Résal*, Ann. des mines (5) 19 (1861), p. 379 (deutsch im Civiling. 8 (1862), p. 101).

86) Therm. II, § 25.

87) Trans. Am. Soc. of Mec. Ing. 1890; Bericht im Engineering 49 (1890), p. 64.

88) Proc. Instit. of Civ. Ing. 140 (1900), p. 199.

89) Phys. Ztschr. 4 (1902), p. 82; Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 75 = Forschungsarb. Heft 19 (1904), p. 45.

turbinen und bei den Schiebern der Dampfmaschinen in Verwendung stehen). Diesen Versuchen, bei denen die Ausflussmengen durch die kondensierten Wassermengen gemessen wurden, stehen Versuche von *A. Rateau*[90]) gegenüber, bei denen die Dampfmengen durch die an das Kühlwasser abgegebenen Wärmemengen bestimmt wurden. Durch gleichzeitige Messung der Dampffeuchtigkeit können diese Versuche für besonders zuverlässig gelten; sie liefern das Resultat, dass die Ausflussmengen für abgerundete Mündungen bei grossen Druckunterschieden sehr gut durch die Formeln für verlustlose Strömung dargestellt werden; die *Rateau*'sche Formel

$$G/\alpha' F_0 = p_1 (0{,}01904 - 0{,}00096 \log^{10} p_1),$$

wo p und F_0 auf Metermass bezogen sind, stimmt sehr genau mit der *Grashof*'schen Formel p. 300 überein; die älteren Versuche hatten, wohl durch mangelnde Trockenheit des Dampfes entstellt, grössere Werte ergeben. Für mässige Druckunterschiede liegen die *Rateau*schen Zahlen bis zu $5\,\%_0$ unter den theoretischen Werten.

Bemerkenswert ist auch die von *Rateau* gefundene Thatsache, dass der Kontraktionskoeffizient für Öffnungen in dünner Wand, dargestellt durch das Verhältnis der hier auftretenden Ausflussmenge zu der bei abgerundeter Öffnung, sowohl für Dampf als auch für Gase (Versuche von *Hirn*) bis zu Drucken $p_2 = 0{,}45\,p_1$ herab sehr genau eine lineare Funktion des Druckverhältnisses ist, z. B. für Dampf

$$\alpha_1 = 0{,}645 + 0{,}35(p_1 - p_2)/p_1.$$

Ausfluss von heissem Wasser. Über den Ausfluss von Wasser aus dem Wasserraum eines Dampfkessels — also Wasser von der dem Druck p_1 entsprechenden Siedetemperatur — wurden von den Ingenieuren *Pulin* und *Bonnin* 1890 Versuche angestellt, über die *Sauvage*[91]) berichtet hat. Die Ergebnisse weichen vollständig von den theoretischen Resultaten *Zeuner*'s[63]) ab, die Ausflussmengen waren 10—12mal so gross, als die theoretischen. *Zeuner*[92]) erklärte später die Differenz durch die Annahme einer verzögerten Verdampfung des Wassers, wodurch der Ausflussvorgang sich mehr dem Ausfluss kalten Wassers nähere.

Neuerdings haben unabhängig voneinander *A. Rateau*[93]) und *A. Fliegner*[94]) nachgewiesen, dass man unter Beachtung des *de Saint-*

90) Rev. de mécanique 7 (1900), p. 167; Ann. des mines (10) 1 (1902), p. 5.
91) Ann. des mines (9) 2 (1892), p. 192.
92) Therm., 2. Aufl., § 22.
93) Rev. de mécanique 9 (1901), p. 660 = Ann. des mines (10) 1 (1902), p. 59.
94) Schweiz. Bauztg. 45 (1905), p. 282 und 306.

Venant-Wantzel'schen Prinzipes bedeutend höhere Ausflussmengen erhält, als *Zeuner* gefunden hatte. Nach *Fliegner* ergiebt sich z. B. für $p_1 = 6$ atm (absolut) das Maximum der Ausflussmenge für 1 qcm Öffnungsquerschnitt zu 0,42 kg/sec bei einem Mündungsdruck $p' = 5{,}4$ atm, während *Zeuner* unter Annahme eines Mündungsdruckes von 1 atm die Zahl 0,108 erhalten hatte.

Beide Autoren zeigen ferner, dass sich noch viel grössere Ausflussmengen ergeben, wenn man annimmt, dass die Temperatur des ausfliessenden Wassers um einige Grade unter dem dem Kesseldruck entsprechenden Siedepunkt liegt; *Rateau* und *Fliegner* verwerten dieses Ergebnis zu einer Erklärung der auch gegen ihre Zahlen noch dreimal grösseren Versuchswerte von *Pulin* und *Bonnin*. *Fliegner* berechnet u. a., dass bei 6 atm Dampfspannung für die Verdreifachung der Ausflussmenge 6^0 Temperaturerniedrigung ausreichend sind. Indes zeigen neue, noch unveröffentliche Versuche von *J. Adam*[95]), dass die *Zeuner*'sche Erklärung durch verzögerte Verdampfung die zutreffendere ist. *Adam* findet bei vergleichenden Versuchen mit heissem und kaltem Wasser, dass das Verhältnis der Ausflussmengen von heissem und kaltem Wasser (bei 6 atm) von 0,91 bei Öffnungen in dünner Wand bis auf 0,56 bei kurzer abgerundeter Mündung und weiter auf 0,44 bei einem mässig langen Ansatzrohr herabsinkt.

19. Strömungswiderstände. Man pflegt die bei den Strömungsbewegungen auftretenden Widerstände in kontinuierlich verteilte und in konzentrierte einzuteilen, je nachdem es sich um die hemmende Wirkung eines längeren Rohres oder einer örtlichen Unregelmäßigkeit (plötzliche Verengung, Erweiterung, Richtungsänderung usw.) handelt. Das übliche Mass für den Widerstand bildet die durch Gl. (b) definierte Widerstandshöhe z, bezw. ein durch Vergleich mit der Geschwindigkeitshöhe $w^2/2g$ gewonnener Widerstandskoeffizient.

a) Über die *konzentrierten Widerstände* ist, abgesehen von den im vorigen Abschnitt behandelten Ausflusswiderständen, wenig Litteratur vorhanden. Ein Versuch, die Vorgänge bei plötzlichen Verengungen und Erweiterungen eines Rohres zu berechnen, findet sich bereits bei *Navier*[51]). Er glaubt jedoch, die Widerstandshöhe bei plötzlicher Rohrerweiterung einfach, wie bei inkompressiblen Flüssigkeiten[96]), als *Carnot*'schen Stossverlust

$$z = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$

---

95) Ausgeführt im Laboratorium für technische Physik zu München.

96) Vgl. Encykl. IV 20, 7 (*Forchheimer*).