

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0230

LOG Titel: 7. Kristallographie. Von Th. LIEBISCH in Göttingen, A. SCHOENFLIES in Königsberg und O. MÜGGE in Königsberg.
(Abgeschlossen im Oktober 1905.)

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

V 7. KRYSTALLOGRAPHIE.

VON

TH. LIEBISCH, A. SCHÖNFLIES UND **O. MÜGGE**
IN GÖTTINGEN. IN KÖNIGSBERG. IN KÖNIGSBERG.

Inhaltsübersicht.

A. Das krystallographische Grundgesetz und seine Anwendung auf die Berechnung und Zeichnung der Krystalle. Von **Th. Liebisch** in Göttingen.

1. Einfache konvexe Polyeder.
2. Gesetz der Zonen.
3. Raumgitter.
4. Polfiguren.
5. Projektionen.
6. Ableitung des Gesetzes der rationalen Indices aus dem Gesetz der Zonen.
7. Tropische Parameter.
8. Transformation der Indices.
9. Koordinaten von Flächen und Kanten.
10. Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse.
11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices.
12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten.
13. Flächendichte von Netzebenen.
14. Einfallswinkel einer Kante in Bezug auf eine Fläche.
15. Aufeinander senkrechte Flächen und Kanten.
16. Krystallberechnung.
17. Berechnung der Axenelemente.
18. Berechnung der Indices.
19. Berechnung der Flächenwinkel.
20. Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente.
21. Anwendung mehrkreisiger Reflexionsgoniometer.
22. Rechtwinklige Hilfsaxensysteme.
23. Perspektivische Krystallzeichnungen.
24. Homogene Deformationen.

B. Symmetrie und Struktur der Krystalle. Von **A. Schönflies** in Königsberg.

25. Einleitende Erläuterungen insbesondere, zum krystallographischen Grundgesetz.

I. Die Symmetriegesetze und die 32 Symmetriegruppen.

26. Formulierung der mathematischen Probleme.
27. Die Symmetrieeigenschaften und ihre Gesetze.
28. Historische Entstehung der Krystalssysteme.
29. Die Deckoperationen und ihre Zusammensetzung.
30. Der Gruppenbegriff.
31. Mathematische Ableitung aller Symmetriegruppen.
32. Gruppentheoretische Systematik der Krystalle.
33. Die Unterabteilungen der Krystalssysteme.
34. Die Symmetrie der einzelnen physikalischen Erscheinungen.

II. Die Strukturtheorien und die 230 Strukturgruppen.

35. Die Raumgitter und die Gruppen von Translationen.
36. Einteilung der Raumgitter nach der Symmetrie.
37. Die *Bravais'sche* Theorie.
38. Ableitung der krystallographischen Grundgesetze aus der *Bravais'schen* Theorie.
39. Die *Bravais'sche* Grenzbedingung und die *Mallard'sche* Strukturauffassung.
40. Die Verallgemeinerung der *Bravais'schen* Strukturhypothese.
41. Die Deckoperationen und Symmetrieeigenschaften der allgemeinsten regelmässigen Strukturen.
42. Die Bewegungsgruppen und die Gruppen zweiter Art.
43. Die reine Strukturtheorie.
44. Reguläre Raumteilungen von gitterartiger Struktur.
45. Allgemeinsten Begriff der regulären Raumteilung und der Fundamentalbereich.
46. Die Strukturauffassung von *E. v. Fedorow*.
47. Die Kugelpackungen.
48. Beziehungen der verschiedenen Strukturtheorien zueinander.

C. Zur Prüfung der Strukturtheorien an der Erfahrung.

Von *O. Mügge* in Königsberg.

49. Einleitung.
50. Formen der Krystalle.
51. Spaltung.
52. Translationsvermögen.
53. Einfache Schiebungen.
54. Zirkularpolarisation.
55. Schlusswort.

Litteratur.

Lehrbücher zu Teil A.

- R. J. Hawy*, *Traité de Minéralogie*, 4 Bde., Paris 1801; 2. Aufl. 1822. Übersetzt von *D. L. G. Karsten* und *Chr. S. Weiss*. 4 Bde., Paris und Leipzig, 1804—1810.
- J. Fr. L. Hausmann*, *Handbuch der Mineralogie*, 3 Bde., Göttingen 1813; 2. Aufl. 1828—1847.

- R. J. Haüy*, Traité de cristallographie, 2 Bde., Paris 1822.
- Fr. Mohs*, Grundriss der Mineralogie, 2 Bde., Dresden 1822—1824. Ins Englische übersetzt von *W. Haidinger*, 3 Bde., Edinburgh 1825.
- C. Fr. Naumann*, Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie, 2 Bde., Leipzig 1829. 1830
- G. Rose*, Elemente der Krystallographie, Berlin 1830; 3. Aufl. 1873.
- A. T. Kupffer*, Handbuch der rechnenden Krystallographie, Petersburg 1831.
- W. H. Miller*, A treatise on crystallography, Cambridge 1839. Übersetzt und erweitert von *H. de Senarmont*, Paris 1842, und *J. Grailich*, Wien 1856.
- H. Kopp*, Einleitung in die Krystallographie, Braunschweig 1849; 2. Aufl. 1862.
- F. A. Schröder*, Elemente der rechnenden Krystallographie, Clausthal 1852.
- W. Philipps*, An elementary introduction to mineralogy. New edit. by *H. J. Brooke* and *W. H. Miller*, London 1852.
- Fr. Pfaff*, Grundriss der mathematischen Verhältnisse der Krystalle, Nördlingen 1853.
- Fr. A. Quenstedt*, Handbuch der Mineralogie, Tübingen 1854; 3. Aufl. 1877.
- C. Fr. Naumann*, Elemente der theoretischen Krystallographie, Leipzig 1856.
- H. Karsten*, Lehrbuch der Krystallographie, Leipzig 1861 (Encykl. d. Phys., Bd. 2).
- A. Des Cloizeaux*, Leçons de cristallographie, lith., Paris 1861.
- W. H. Miller*, A tract on crystallography, Cambridge 1863. Übersetzt von *P. Joerres*, Bonn 1864.
- A. Schrauf*, Lehrbuch der physikalischen Mineralogie, 2 Bde., Wien 1866, 1868.
- V. v. Lang*, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1866.
- Qu. Sella*, Lezioni di cristallografia, Torino 1867; 2. Aufl. 1877.
- Fr. A. Quenstedt*, Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie, Tübingen 1873.
- C. Klein*, Einleitung in die Krystallberechnung, Stuttgart 1876.
- A. Sadebeck*, Angewandte Krystallographie, Berlin 1876.
- P. Groth*, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1876; 4. Aufl. 1905.
- E. Mallard*, Traité de cristallographie géométrique et physique, I, Paris 1879.
- Th. Liebisch*, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881.
- A. Brezina*, Methodik der Krystallbestimmung, Wien 1884.
- F. Henrich*, Lehrbuch der Krystallberechnung, Stuttgart 1886.
- M. Websky*, Anwendung der Linearprojektion zum Berechnen der Krystalle, Berlin 1887.
- G. Wyruboff*, Manuel pratique de cristallographie, Paris 1889.
- G. H. Williams*, Elements of crystallography, New York 1890.
- B. Hecht*, Anleitung zur Krystallberechnung, Leipzig 1893.
- Ch. Soret*, Eléments de cristallographie physique, Genève, Paris 1893.
- N. St. Maskelyne*, Crystallography. A Treatise on the morphology of crystals, Oxford 1895.
- A. Nies*, Allgemeine Krystallbeschreibung auf Grund einer vereinfachten Methode des Krystallzeichnens, Stuttgart 1895.
- Th. Liebisch*, Grundriss der physikalischen Krystallographie, Leipzig 1896.
- G. Link*, Grundriss der Krystallographie, Jena 1896.
- G. La Valle*, Corso di cristallografia teoretica con applicazione al calcolo dei cristalli, Messina 1896.
- E. v. Fedorow*, Cursus der Krystallographie, Petersburg 1897. (Russisch.)
- W. J. Lewis*, Treatise on crystallography, Cambridge 1899.

- W. J. Vernadsky*, Grundlagen der Krystallographie, I, 1, Moskau 1903. (Russisch.)
C. M. Viola, Grundzüge der Krystallographie, Leipzig 1904.
G. Wulff, Grundzüge der Krystallographie, Warschau 1904. (Russisch.)
E. Sommerfeld, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1906.

Lehrbücher zu Teil B und C (vgl. auch die unter A genannten).¹⁾

- L. Sohncke*, Entwicklung einer Theorie der Krystalstruktur, Leipzig 1879.
*E. v. Fedorow*²⁾, Elemente der Lehre von den Figuren, St. Petersburg 1885 (russisch).
Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1891.
A. Schönflies, Krystalssysteme und Krystalstruktur, Leipzig 1891.
H. Hilton, Mathematical crystallography and the theory of groups of movements, Oxford 1903.

Monographien zu Teil A.

- F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallogonomie, Heft I, Berlin u. Posen 1823.
J. G. Grassmann, Zur physischen Krystallogonomie und geometrischen Kombinationslehre, I, Stettin 1829.
H. Grassmann, Ableitung der Krystalgestalten aus dem allgemeinen Gesetz der Krystalbildung. Progr. Otto-Schule in Stettin, 1839. (Ges. math. u. phys. Werke, II, 2, p. 115, Leipzig 1902.)
Fr. A. Quenstedt, Methode der Krystallographie, Tübingen 1840.
 — Beiträge zur rechnenden Krystallographie, Tübingen 1848.
J. Weisbach, Anleitung zum axonometrischen Zeichnen, Freiberg 1857.
Fr. v. Kobell, Zur Berechnung der Krystalformen, München 1867.
A. Knop, Molekularconstitution und Wachstum der Krystalle, Leipzig 1867.
G. Uzielli, Studi di cristallografia teorica, Roma 1877.
E. Reusch, Die stereographische Projektion, Leipzig 1881.
Qu. Sella, Memorie di cristallografia, Roma 1885.
V. Goldschmidt, Über Projektion und graphische Krystalberechnung, Berlin 1887.
 — Krystallographische Projektionsbilder, Berlin 1887
 — Einleitung in die formbeschreibende Krystallographie. Abdruck aus: Index der Krystalformen der Mineralien, 3 Bde., Berlin 1886—1891.
 — Krystallographische Winkeltabellen, Berlin 1897.

Monographien zu Teil B und C (vgl. auch die unter A genannten).

- R. J. Haüy*, Essai d'une théorie de la structure des cristaux, Paris 1784.
*J. Fr. Chr. Hessel*³⁾, Krystallogometrie oder Krystallogonomie und Krystallographie, Leipzig 1831.
 — Über gewisse merkwürdige statische und dynamische Eigenschaften des Raumes, Universitätsschrift, Marburg 1862.

1) Eine ausführliche historische Darstellung der Entwicklung der Krystalstruktur findet sich in dem oben genannten Buch von *Sohncke*.

2) *Fedorow* hat eine kurze Inhaltsangabe dieser Schrift in der Zeitschr. f. Krystallographie 21 (1895), p. 679 veröffentlicht.

3) Abdruck eines Artikels über Krystallographie aus Gehlers physikalischem Wörterbuch 5 (1830), p. 1062 ff.

- M. L. Frankenheim*, System der Krystalle, Nova Acta Leopoldina 19, 2 (1842), p. 471 ff.
- G. Delafosse*, Recherches sur la cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques, Mém. Sav. étrang. Paris 8 (1843).
- A. Bravais* ⁴⁾, Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, Journ. de math. 14 (1849), p. 141 ff.
- Mémoire sur les systèmes de points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, Journ. éc. polyt. Heft 33 (1850), p. 1 ff.
- Études crystallographiques, Journ. éc. polyt. Heft 34 (1851), p. 229 ff.
- A. F. Möbius*, Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle, Sächs. Ber. Leipzig 1 (1849), p. 65.
- C. Jordan*, Mémoire sur les groupes de mouvements, Ann. di mat. (2) 2 (1868/9), p. 167 u. 322.
- Chr. Wiener*, Grundzüge der Weltordnung, 2. Aufl. Leipzig 1869.
- A. Gadolin*, Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes crystallographiques, Acta soc. fenn. Helsingfors 9 (1871), p. 1.
- P. Curie*, Sur les questions d'ordre, Bull. soc. min. de France 7 (1884), p. 89 u. 418.
- B. Mümigerode*, Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen (1884), p. 195, 374, 488.
- Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle, Neues Jahrb. f. Min. Beilageband 5 (1887), p. 145.
- E. v. Fedorow* ²⁾, Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, St. Petersburg 1890 (russisch).
- H. Fletcher*, Recent progress in mineralogy and crystallography, Report of the British Assoc. Oxford 1894.
- Lord *Kelvin*, The molecular Tactics of a Crystal. Second Boyle Lecture Oxford 1894.
- W. Barlow*, A mechanical cause of homogeneity of structure and symmetry, geometrically investigated, Proc. Roy. Soc. Dublin 8 (N. S.) 1898, p. 527.
- *H. A. Miers* and *Herbert Smith*, The structure of crystals, Report Brit. Assoc. Glasgow 1901. Sect. C. London 1901.
- G. Friedel*, Études sur les groupements cristallins, Bull. soc. de l'industrie minérale (4) 3 u. 4. Saint-Étienne 1904.]

A. Das kristallographische Grundgesetz und seine Anwendung auf die Berechnung und Zeichnung der Krystalle. _____

Von *Th. Liebisch* in Göttingen.

Einheitliche und schwebend gebildete Krystalle bieten polyedrische Formen dar, deren charakteristische geometrische Eigenschaft ausgesprochen wird in dem durch die Erfahrung gegebenen *kristallographischen Grundgesetz* — Gesetz der Zonen, der rationalen Indices oder der rationalen Doppelverhältnisse. (Vgl. hierzu Teil B, Nr. 25.)

4) Die Arbeiten von *Bravais* erschienen 1866 in Paris als *Études crystallographiques*.

1. Einfache konvexe Polyeder. Ist die Einwirkung äusserer Agentien, die eine Störung der natürlichen homogenen Beschaffenheit der Krystalle erzeugen können, ausgeschlossen, und bleiben die Temperatur und der äussere allseitig gleiche Druck konstant, so sind die *Richtungen* der Begrenzungsebenen eines Krystallpolyeders unveränderlich. Daher ist ein solches Polyeder durch seine *Flächenwinkel* vollständig bestimmt.

Erfahrungsgemäss bilden die Begrenzungsebenen (Krystallflächen) ein einfaches, im gewöhnlichen Sinne konvexes Polyeder. Jede Krystallfläche besitzt also in Bezug auf das Polyeder, zu dem sie gehört, eine äussere und eine innere Seite. Werden von einem Punkte im Innern des Polyeders Normalen auf die Flächen gefällt, so sollen die nach aussen zeigenden Richtungen als positiv angesehen werden. Unter einem Flächenwinkel soll der am Reflexionsgoniometer messbare Aussenwinkel verstanden werden. Er wird beschrieben, wenn eine der beiden Flächen aus ihrer ursprünglichen Lage um die Schnittgerade gedreht wird, bis sie, ohne dabei das Innere des Polyeders zu bestreichen, in die Verlängerung der anderen Fläche fällt. Einen gleichen Winkel beschreibt die Normale der Fläche.

Als positive Richtung einer Kante in Beziehung auf eine Fläche, in der sie nicht enthalten ist, soll die Richtung verstanden werden, die mit der positiven Richtung der Flächennormale einen Winkel $< \pi/2$ einschliesst. Dieser Winkel soll der Einfallswinkel der Kante in Beziehung auf die Fläche genannt werden.

2. Gesetz der Zonen. Eine auffallende Eigenschaft der Krystallpolyeder besteht darin, dass an ihnen Scharen von Kanten auftreten, die untereinander parallel laufen. *Chr. S. Weiss*, der zuerst die Bedeutung dieser Thatsache für die geometrische Krystallographie erkannt hat, nannte die Gesamtheit der Flächen, die sich in parallelen Kanten schneiden, eine *Zone* von Flächen.

Häufig werden Flächen beobachtet, die gleichzeitig in zwei oder mehr Zonen liegen. Zur Bestimmung ihrer Lage gegen die übrigen Flächen sind Winkelmessungen nicht erforderlich. Denn eine Ebene ist ihrer Richtung nach bestimmt, wenn sie gleichzeitig zwei Kanten von verschiedenen Richtungen parallel laufen soll.

Gehen wir nun dazu über, aus je zwei Zonen schon vorhandener Flächen eines Krystallpolyeders eine neue Flächenrichtung abzuleiten, die beiden Zonen angehört, so erhebt sich die Frage, ob stets die auf solche Weise mit beobachteten Flächen in Beziehung stehenden Ebenen mögliche Krystallflächen sind. Die Erfahrung hat gelehrt, dass dieses Ableitungsverfahren in der That berechtigt ist. Da zur geometrischen

Ableitung einer unbegrenzten Zahl von Flächen aus Zonen vier Flächen, die ein im allgemeinen unregelmässiges Tetraeder bilden, notwendig und ausreichend sind, so können wir die charakteristische geometrische Eigenschaft der Gesamtheit von Flächen, die als Begrenzungsebenen der polyedrischen Formen eines krystallisierten Körpers auftreten können, durch folgenden Satz aussprechen: *Aus vier Flächen eines Krystallflächenkomplexes, die ein Tetraeder bilden, lassen sich alle übrigen Flächen der Reihe nach dadurch ableiten, dass parallel zu jedem Paare von Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Flächen eine neue Fläche gelegt wird¹⁾.*

Da krystallographische Begrenzungselemente nur ihrer Richtung nach völlig bestimmt sind, so können wir durch ein Zentrum C das Bündel der Ebenen und Geraden gelegt denken, die den Flächen und Kanten eines Krystallflächenkomplexes parallel gehen. Dann ist nach dem Gesetz der Zonen jede Gerade der Träger eines Büschels von möglichen Flächen und jede Ebene der Träger eines Büschels von möglichen Kanten. Flächen- und Kantenrichtungen stehen sich *dualistisch* gegenüber²⁾.

Vier der Ableitung zu Grunde liegende Flächen $e_0 e_1 e_2 e_3$ bilden ein vollständiges Vierfläch mit drei Paaren von Gegenkanten (Fig. 1, 5):

$$e_2 e_3 = \varepsilon_1; e_3 e_1 = \varepsilon_2; e_1 e_2 = \varepsilon_3$$

$$e_0 e_1 = \varepsilon_4; e_0 e_2 = \varepsilon_5; e_0 e_3 = \varepsilon_6.$$

Je zwei einander gegenüberliegende Kanten werden durch eine Diagonalfäche verbunden:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_4 = b_1; \varepsilon_2 \varepsilon_5 = b_2; \varepsilon_3 \varepsilon_6 = b_3.$$

Diese drei Flächen schneiden sich in den drei Diagonalkanten des Vierflaches:

$$b_2 b_3 = \beta_1; b_3 b_1 = \beta_2; b_1 b_2 = \beta_3.$$

Durch jede Diagonalkante kann ein Paar Gegenflächen nach den beiden mit ihr noch nicht verbundenen Gegenkanten gelegt werden:

Vier der Ableitung zu Grunde liegende Kanten $\delta_0 \delta_1 \delta_2 \delta_3$ bilden ein vollständiges Vierkant mit drei Paaren von Gegenflächen (Fig. 1, 5):

$$\delta_2 \delta_3 = d_4; \delta_3 \delta_1 = d_5; \delta_1 \delta_2 = d_6$$

$$\delta_0 \delta_1 = d_1; \delta_0 \delta_2 = d_2; \delta_0 \delta_3 = d_3.$$

Diese sechs Flächen schneiden sich ausser in den vier Kanten δ noch in den drei Diagonalkanten:

$$d_1 d_4 = \beta_1; d_2 d_5 = \beta_2; d_3 d_6 = \beta_3.$$

Durch je zwei dieser Kanten geht eine Diagonalfäche des Vierkants:

$$\beta_2 \beta_3 = b_1; \beta_3 \beta_1 = b_2; \beta_1 \beta_2 = b_3.$$

Auf jeder Diagonalfäche erzeugen die drei Paare von Gegenflächen ausser den Diagonalkanten noch ein Paar Gegenkanten:

1) *F. E. Neumann*, Beitr. z. Krystallon. 1823. De lege zonarum 1826; *A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcül 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Cl. 1849, p. 45; *F. Blasius*, Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 538.

2) *H. Grassmann*, Ausdehnungslehre von 1844, § 171; *Liebisch*, Zeitschr. d. geol. Ges. 1877, p. 515.

$$\beta_1 \varepsilon_1 = d_1; \beta_2 \varepsilon_2 = d_2; \beta_3 \varepsilon_3 = d_3$$

$$\beta_1 \varepsilon_4 = d_4; \beta_2 \varepsilon_5 = d_5; \beta_3 \varepsilon_6 = d_6.$$

Diese sechs Flächen schneiden sich zu je dreien in vier Kanten:

$$d_1 d_2 d_3 = \delta_0$$

$$d_1 d_5 d_6 = \delta_1$$

$$d_2 d_6 d_4 = \delta_2$$

$$d_3 d_4 d_5 = \delta_3,$$

welche ein vollständiges Vierkant bilden.

In jeder Diagonalfäche b bilden die auf ihr liegenden Gegenkanten ε und Diagonalkanten β ein harmonisches Büschel:

$$(\beta_2 \beta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_4) = -1$$

$$(\beta_3 \beta_1 \varepsilon_5 \varepsilon_2) = -1$$

$$(\beta_1 \beta_2 \varepsilon_6 \varepsilon_3) = -1.$$

Die Fläche e_i und die Kante δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, werden an allen Kanten des Dreikants $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ und auf allen Flächen des Dreiflachs $b_1 b_2 b_3$ voneinander harmonisch getrennt.

Auf diese Weise kann die geometrische Ableitung neuer Flächen und Kanten unbegrenzt fortschreiten.

3. Raumgitter. Der Zonenzusammenhang der Flächen eines krystallisierten Körpers wird veranschaulicht durch das geometrische Bild der Struktur einheitlicher Krystalle, das durch die weitere Entwicklung der *Hauyschen* Hypothese über die Krystallstruktur entstanden ist. (Näheres hierüber in Teil B, Art. *Schönflies*.)

In einem unbegrenzt gedachten einheitlichen Krystall sind unzählig viele Punkte vorhanden von der Beschaffenheit, dass um jeden Punkt die Massenverteilung nach parallelen Richtungen dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt. Diese Stellen müssen angeordnet sein nach Raumgittern, d. h. nach den Schnittpunkten dreier Scharen von parallelen äquidistanten Ebenen. Jede durch irgend zwei Punkte des Gitters gelegte Gerade (Punktreihe) ist mit unendlich vielen Gitterpunkten äquidistant besetzt; der Abstand zweier benachbarter Punkte wird der Parameter dieser Punktreihe und der zu ihr parallelen Punktreihen genannt. Legt man durch irgend drei Punkte des Gitters, die nicht einer Geraden angehören, eine Ebene (Netzebene), so ist sie mit unendlichen vielen Punkten parallelogrammatisch besetzt.

$$b_1 d_1 = \varepsilon_1; b_2 d_2 = \varepsilon_2; b_3 d_3 = \varepsilon_3$$

$$b_1 d_4 = \varepsilon_4; b_2 d_5 = \varepsilon_5; b_3 d_6 = \varepsilon_6.$$

Diese sechs Kanten liegen zu je dreien auf vier Flächen:

$$\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = e_0$$

$$\varepsilon_4 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = e_1$$

$$\varepsilon_5 \varepsilon_3 \varepsilon_1 = e_2$$

$$\varepsilon_6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = e_3,$$

welche ein vollständiges Vierflach bilden.

Die in einer Diagonalkante b sich schneidenden Gegenflächen d und Diagonalfächen b bilden ein harmonisches Büschel:

$$(b_2 b_3 d_4 d_1) = -1$$

$$(b_3 b_1 d_5 d_2) = -1$$

$$(b_1 b_2 d_6 d_3) = -1.$$

Die Raumbitterstruktur veranschaulicht das Gesetz der Zonen, wenn die Annahme hinzugefügt wird, dass als *Krystallflächen nur Netzebenen des Gitters auftreten können.*

4. Polfiguren. Wir stellen uns vor, dass die Flächen eines Krystallpolyeders um die Strecke r von einem Punkte C im Innern entfernt seien. Dann kann dem Polyeder eine Kugel um C mit dem Radius r eingeschrieben werden. Der Berührungspunkt einer Fläche mit der Kugel wird der Pol dieser Fläche, die Gesamtheit der Flächenpole die Polfigur des Polyeders genannt. Die Flächen einer Zone liefern Pole, die in einem Hauptkreise (Zonenkreise) liegen; die durch den Mittelpunkt gelegte Kantenrichtung der Zone schneidet die Kugel in den Polen des Zonenkreises.

Da der sphärische Abstand zweier Flächenpole ein Mass ist für den äusseren Winkel der zugehörigen Flächen, so gewährt die Polfigur eine auf anderem Wege nicht erreichbare Übersicht der Flächenwinkel und damit die zweckmässigste Grundlage für die Ermittlung der zur Beschreibung der Krystallpolyeder erforderlichen Grössen.

In der Polfigur sind einer Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche verschiedene (diametral gegenüberliegende) Punkte zugeordnet. Soll die entsprechende Unterscheidung auch in dem Bündel der von C ausgehenden Flächennormalen, das die Kugel in den Polen der Fläche schneidet, festgehalten werden, so müssen wir den Flächennormalen die auf S. 396 eingeführten positiven Richtungssinne beilegen. In der Untersuchung projektivischer Beziehungen zwischen einem Krystallflächenkomplex und seiner Polfigur wird hierauf verzichtet; dann entspricht einer Flächenrichtung ein Polpaar³⁾.

5. Projektionen. Hilfsmittel für die geometrische Untersuchung der Krystallpolyeder bieten die von *F. E. Neumann* 1823 eingeführten Verfahren zur übersichtlichen Darstellung des Zonenverbandes in einer Ebene dar⁴⁾. Man gewinnt diese Darstellungen, indem man I. das durch ein Zentrum C gelegte Bündel von Ebenen eines Krystallflächenkomplexes mit einer nicht durch C gehenden Ebene \mathcal{E} schneidet

3) Über die Einführung der Normalen der Krystallflächen und der Polfiguren vgl. *F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie 1 (1823), p. 5, 55; *Ann. Phys. Chem.* 4 (1825), p. 63; *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie 1 (1829), p. X, 5, 50; *J. F. Chr. Hessel*, Krystallometrie 1831, p. 223.

4) *F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie 1 (1823). Wesentlich kompliziertere graphische Methoden sind von *L. Ditscheiner* vorgeschlagen worden *Sitz.-Ber. Wien. Akad. Math. Kl.* 26 (1857), p. 279. 28 (1858), p. 93, 134, 201. 32 (1858), p. 3.

oder II. das Bündel der Flächennormalen a) mit einer nicht durch C gehenden Ebene \mathcal{E} oder b) mit einer konzentrischen Kugel schneidet.

I. *Linienprojektion eines Flächenbündels.* Da in dem Bündel jedem Paare einer Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche eine einzige Ebene entspricht, so ist deren Schnittgerade mit der Projektionsebene \mathcal{E} einer Flächenrichtung zugeordnet. Die Spuren der Flächenrichtungen einer Zone bilden ein Büschel von Geraden durch die Spur der gemeinsamen Kante (Zonenpunkt). Jeder Kantenrichtung des Krystals ist also ein Punkt in \mathcal{E} zugeordnet. Aus der perspektivischen Lage des Bündels und seiner Projektion folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse von vier Elementen eines Büschels im Bündel und der vier entsprechenden Elemente in der Projektion.

Die Linienprojektion (Fig. 1) veranschaulicht den Zonenverband der auf S. 397—398 genannten Flächen $e_0 \dots d_6$.

Linienprojektionen wurden von Fr. A. Quenstedt, F. H. Schröder und M. Websky in umfassender Weise für die Zwecke der geometrischen Krystallographie verwertet⁵⁾.

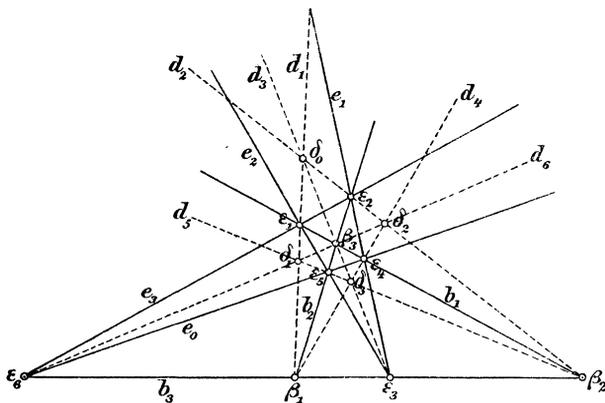


Fig. 1. Linienprojektion.

IIa. *Punktprojektion eines Bündels von Flächennormalen; gnomonische Projektion einer Polfigur.* In der Projektionsebene \mathcal{E} erzeugen die Flächennormalen ein System von Schnittpunkten. Hierdurch wird jeder Flächenrichtung des Krystals ein Punkt (Flächenort) in \mathcal{E} zu-

5) Fr. A. Quenstedt, Ann. Phys. Chem. 34 (1835), p. 503, 561; 36 (1835), p. 245, 379; Methode der Krystallographie 1840, Beiträge zur rechn. Krystallogr. 1848, Handbuch der Min. 1855, Grundriss d. bestimm. u. rechn. Krystallogr. 1873; F. H. Schröder, Elemente d. rechn. Krystallogr. 1852; M. Websky, Ann. Phys. Chem. 118 (1863), p. 240; Anwendung d. Linearprojektion z. Berechn. d. Krystalle 1887.

geordnet. Den Flächenrichtungen einer Zone entsprechen Punkte einer Geraden; jeder Kantenrichtung des Krystalls ist also eine Gerade (Zonenlinie) in \mathcal{E}' zugeordnet.

Betrachtet man in Fig. 1 die Punkte $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ als Flächenorte eines vollständigen Vierflachs, so wird der Zonenverband der abgeleiteten Flächen $\beta_1 \dots \varepsilon_6$ veranschaulicht.

Die Projektion eines Bündels von Flächennormalen ist identisch mit der *gnomonischen Projektion* der zu dem Bündel der Flächen gehörigen Polfigur auf die Ebene \mathcal{E}' , wenn man den Radius der Kugel gleich dem Abstand des Zentrums C von \mathcal{E}' wählt⁶⁾.

Den Hauptkreis, in welchem die Kugel von der parallel \mathcal{E}' gelegten Diametralebene geschnitten wird, nennen wir Grundkreis. Den Berührungspunkt O' von \mathcal{E}' mit der Kugel, der im allgemeinen nicht

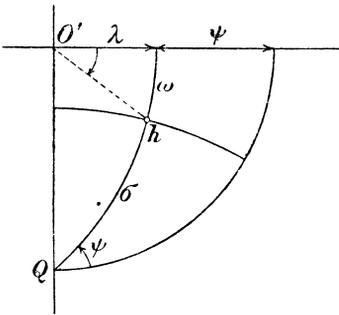


Fig. 2. Polarkoordinaten σ, ψ des Poles h .

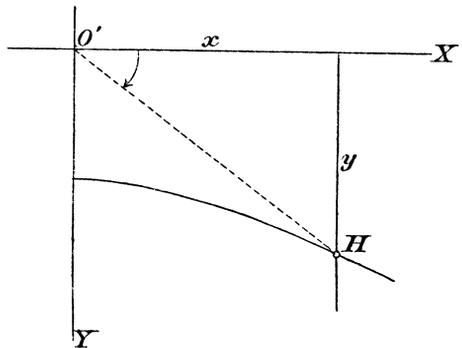


Fig. 3. Gnomonische Projektion H des Poles h .

mit dem Pol einer Krystallfläche zusammenfällt, bezeichnen wir als Projektionszentrum. Zu Polarkoordinaten eines Poles h seien gewählt der sphärische Abstand $(Qh) = \sigma$ von dem im Grundkreise gelegenen Pole Q und das Azimut ψ der Zone Qh in Bezug auf diesen Kreis (Fig. 2). Dann hat das Projektionszentrum O' die Koordinaten $\sigma = \psi = 90^\circ$.

Die Kugel sei mit einem Netz von Längenkreisen und Breiten-

6) Nach dem Vorgange von *F. E. Neumann* wurde die gnomonische Projektion verwertet von: *J. Fr. Chr. Hessel*, *Krystallometrie* (1831), p. 225 f. (Lehre von der Zeigerfläche); *W. H. Miller*, *Phil. Mag.* (4) 18 (1859), p. 37; *M. Websky*, *Monatsber. Berlin. Akad.* 1876, p. 3, 1879, p. 124; *E. Mallard*, *Traité de crist.* 1 (1879); *H. A. Miers*, *Min. Mag.* 7 (1887), p. 145; *V. Goldschmidt*, in den auf p. 394 genannten Schriften und *Zeitschr. f. Kryst.* 17 (1890), p. 97, 191; 19 (1891), p. 35, 352; 20 (1892), p. 143; 21 (1893), p. 210; 22 (1894), p. 20; 25 (1896), p. 538; 30 (1899), p. 346; *E. v. Fedorow*, *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 574; *G. F. H. Smith*, *Min. Mag.* 13 (1903), p. 309; *H. Hilton*, *Min. Mag.* 14 (1904), p. 18.

kreisen in der Weise bedeckt, dass die Längenkreise durch Q hindurchgehen und O' der Nullpunkt der Länge λ ist. Die Breite sei bezeichnet mit ω . Es ist $\lambda + \psi = \omega + \sigma = 90^\circ$. Wählt man jetzt in der Projektionsebene \mathcal{G}' (Fig. 3) die Schnittgeraden mit der Äquator-ebene und der Ebene des Längenkreises QO' zu Koordinatenachsen X, Y , so gilt für die Projektion H des Poles h :

$$x = r \cdot \cotg \psi,$$

$$y = r \cdot \frac{\cotg \sigma}{\sin \psi}.$$

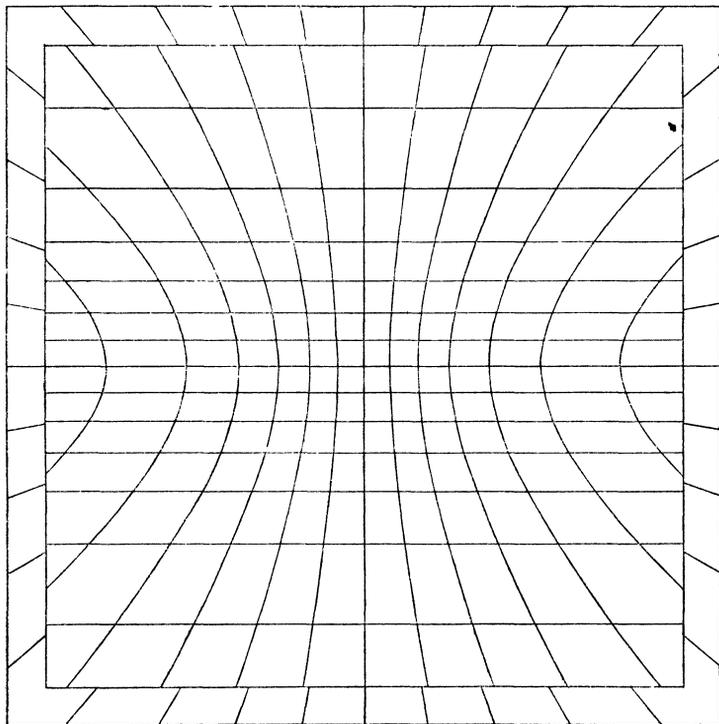


Fig. 4. Gnomonisches Netz.

Um die Herstellung gnomonischer Projektionen mit Hilfe dieser Koordinaten zu erleichtern, hat *G. T. H. Smith*⁷⁾ eine Tabelle der mit 10 multiplizierten Werte von $\cotg \sigma / \sin \psi$ in dem Gebiete von 90° bis 25° angelegt. Umgekehrt findet man mit der Tabelle und einem Transporteur aus der Projektion den Winkel zwischen zwei Flächenpolen oder zwei Zonenkreisen.

7) *G. F. H. Smith*, *Min. Mag.* 13 (1903), p. 309.

Zu demselben Zweck kann das von *H. Hilton*⁸⁾ entworfene *gnomonische Netz* (Fig. 4) benutzt werden, worin die Längenkreise abgebildet sind durch die Schar der zu *Y* parallelen Geraden:

$$x = r \cdot \operatorname{tang} \lambda$$

und die Breitenkreise durch die Hyperbeln:

$$-x^2 + y^2 \operatorname{cotg}^2 \omega = r^2.$$

II b. *Stereographische Projektion einer Polfigur.* Zur Abbildung einer Polfigur auf eine Ebene ist besonders geeignet die stereographische Projektion der Kugeloberfläche. Es ist zweckmässig die Projektionsebene \mathcal{G}' durch den Mittelpunkt *C* der Kugel und in einen Zonenkreis (Grundkreis) zu legen, wobei die Symmetrieeigenschaften der Krystalle zu berücksichtigen sind (vgl. in Fig. 5 die stereographische Projektion der Polfigur des Oktaeders, Hexaeders und Dodekaeders mit den der Fig. 1 entsprechenden Bezeichnungen der Flächen). Die Projektionsstrahlen gehen dann von einem Endpunkte *O* des zu \mathcal{G}' senkrechten Durchmessers aus. Im allgemeinen genügt die Abbildung der dem Punkte *O* gegenüberliegenden Halbkugel, die das Innere des Grundkreises erfüllt. Indessen ist es z. B. bei der Untersuchung von Symmetrieeigenschaften nützlich, die Projektion auf das benachbarte Gebiet ausserhalb des Grundkreises zu erweitern⁹⁾.

Die stereographische Projektion einer Polfigur kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn der Zonenverband und die Flächenwinkel des Polyeders gegeben sind. Dabei werden folgende Eigenschaften der Projektion benutzt. Bezeichnet man mit *O'* den

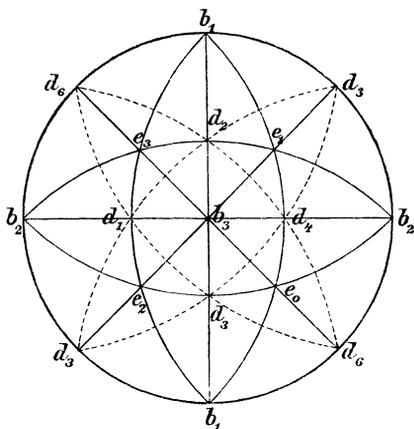


Fig. 5. Stereographische Projektion der Polfigur des Oktaeders, Hexaeders und Dodekaeders.

8) *H. Hilton*, *Min. Mag.* 14 (1904), p. 18.

9) Über die Verwertung der stereographischen Projektionen von Polfiguren vgl. *W. H. Miller*, *A Treatise on Cryst.* 1839; *Phil. Mag.* (4) 19 (1860), p. 325; *V. v. Lang*, *Lehrb. d. Kryst.* 1866, p. 299; *E. Reusch*, *Ann. Phys. Chem.* 142 (1871), p. 46; 147 (1872), p. 569; *Die stereogr. Proj.* 1881; *Th. Liebisch*, *Geom. Kryst.* 1881; *A. Brezina*, *Methodik d. Krystallbestimmung* 1884; *St. Jolles*, *Zeitschr. f. Kryst.* 18 (1891), p. 24; *G. Wulff*, *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 249; 36 (1902),

kugel um O' gelegene Punkt p der Pol des Zonenkreises β genannt; seine Projektion besitzt folgende Eigenschaft: Sind h, k die Projektionen der Flächenpole h, k , so bestimmen die Verbindungslinien ph und pk auf dem Grundkreise einen Bogen h_1k_1 , der gleich dem Bogen hk ist (Fig. 7).

Die Ausführung einer Projektion wird wesentlich erleichtert durch eine Hilfsprojektion, die man gewinnt, indem man ein Netz von Längenkreisen und Breitenkreisen in der Weise stereographisch projiziert, dass ein Längenkreis mit dem Grundkreise zusammenfällt (stereographische Meridianprojektion Fig. 8). *B. Hecht*¹⁰⁾ benutzt Netze auf Pauspapier, die über der Zeichnung gedreht werden, in Verbindung mit einer Tabelle, in der neben den Winkeln u die Strecken:

$$r \cdot \tan \frac{u}{2}, \quad \frac{r}{\sin u}, \quad r \cdot \sin u$$

angegeben sind.

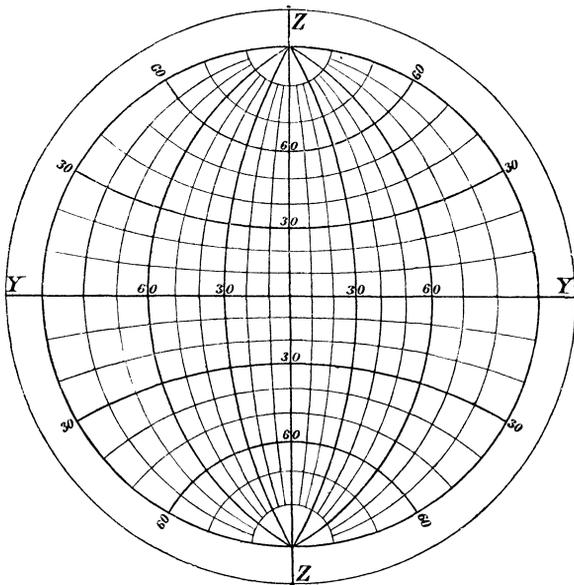


Fig. 8. Stereographische Meridianprojektion.

Zwischen den drei Projektionen bestehen einfache *Beziehungen*, wenn wir voraussetzen, dass die Projektionsebenen \mathcal{E} der Linienprojektion eines Flächenbündels und \mathcal{E}' der Punktprojektion des Normalenbündels zusammenfallen und parallel zur Projektionsebene \mathcal{E}'' der stereographischen Projektion der Polfigur liegen, derart dass sie

10) *B. Hecht*, Anleitung zur Krystallberechnung, 1893, p. 64.

kreis mit dem Radius r , so ist die *Linienprojektion* β der *Flächenrichtung* \mathfrak{B} die *Polare der gnomonischen Projektion* B des *Poles* b in Bezug auf den *imaginären Kreis* mit dem Radius $-r$ und die *stereographische Projektion* β' des *Poles* b liegt auf dem zu β senkrechten *Durchmesser des Distanzkreises* im *Abstande* $LC = LC^*$ von β .

6. Ableitung des Gesetzes der rationalen Indices aus dem Gesetz der Zonen¹¹⁾. Von den Flächen p_1, p_2, p_3, e eines Tetraeders, das zur Ableitung eines Krystallflächenkomplexes nach dem Gesetz der Zonen dient, sollen p_1, p_2, p_3 zu Axenebenen gewählt werden (Fig. 11). Ihre Schnittgeraden π_1, π_2, π_3 bilden ein im allgemeinen schiefwinkliges Axensystem. Die Fläche e bestimme die Verhältnisse der Axeneinheiten $OE_1 : OE_2 : OE_3 = a_1 : a_2 : a_3$. Man bezeichnet die Winkel zwischen den Axen und die Verhältnisse der Einheiten als *Axenelemente*.

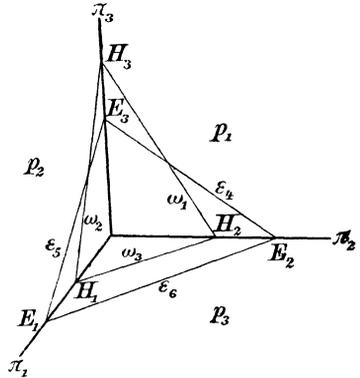


Fig. 11. Zur Definition der Indices der Fläche $H_1H_2H_3$.

In dem Komplex befinde sich die Fläche h mit den Axenabschnitten OH_1, OH_2, OH_3 , dann *verhalten sich die Quotienten aus den Axeneinheiten und den Axenabschnitten dieser Fläche wie ganze Zahlen* h_1, h_2, h_3 :

$$(1) \quad \frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = h_1 : h_2 : h_3.$$

Man nennt sie die *Indices der Fläche* h .

Der Beweis ergibt sich aus folgender Überlegung. Da nur die Richtung der Fläche h in Betracht kommt und die Verhältnisse der Richtungscosinus ihrer Normale μ gegeben sind durch:

$$\cos \mu \pi_1 : \cos \mu \pi_2 : \cos \mu \pi_3 = \frac{1}{OH_1} : \frac{1}{OH_2} : \frac{1}{OH_3} = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3},$$

so ist die Gleichung der Fläche h in Punktkoordinaten:

$$(2) \quad x_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} + x_2 \cdot \frac{h_2}{a_2} + x_3 \cdot \frac{h_3}{a_3} = 0.$$

Die Koordinaten eines Punktes der Schnittgeraden η zweier Flächen h' und h verhalten sich wie:

11) F. E. Neumann, De lege zonarum 1826; A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1849, p. 45; W. v. Bezold, Sitz.-Ber. Akad. München, math.-phys. Kl. 1863, p. 350.

$$(3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3$$

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} h_2' & h_3' \\ h_2'' & h_3'' \end{vmatrix} = (h'k'')_1, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} h_3' & h_1' \\ h_3'' & h_1'' \end{vmatrix} = (h'k'')_2$$

$$\eta_3 = \begin{vmatrix} h_1' & h_2' \\ h_1'' & h_2'' \end{vmatrix} = (h'k'')_3.$$

Man nennt die Zahlen η_1, η_2, η_3 die *Indices der Kante* η . Die Bedingung dafür, dass die Flächen h, h', h'' einer Zone angehören:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1' & h_2' & h_3' \\ h_1'' & h_2'' & h_3'' \end{vmatrix} = 0$$

enthält nur die Indices der Flächen und ist unabhängig von den Axenelementen. Liegt eine Fläche h gleichzeitig in den Zonen der Flächen h', h'' und k', k'' , also parallel den Kanten η und η' mit den Indices η_1, η_2, η_3 und $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$:

$$\eta_1' = (k'k'')_1, \quad \eta_2' = (k'k'')_2, \quad \eta_3' = (k'k'')_3,$$

so setzen sich ihre Indices in folgender Weise zusammen:

$$(5) \quad h_1 : h_2 : h_3 = (\eta\eta')_1 : (\eta\eta')_2 : (\eta\eta')_3.$$

Mit Hülfe von (3) und (5) können die Indices aller Flächen h berechnet werden, die sich nach dem Gesetz der Zonen aus den vier zu Grunde liegenden Flächen ableiten lassen. Nun sind die Indices dieser vier Flächen:

$$\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & e \\ [100 & 010 & 001 & 111. \end{array}$$

Hieraus sind die Indices aller übrigen Flächen durch die Operationen der Multiplikation und Subtraktion zu bilden. Auf solche Weise können aber nur *ganze Zahlen* entstehen: Die Indices der in einem *Krystallflächenkomplex* möglichen Flächen und Kanten verhalten sich wie ganze Zahlen, wenn die Richtungen der Koordinatenachsen und die Verhältnisse der Axeneinheiten durch vier Flächen des Komplexes bestimmt werden.

Zur geometrischen Beschreibung eines Krystallpolyeders sind also notwendig: 1. die Axenelemente, 2. die Indices der Flächen. Diese Grössen müssen aus Messungen der Flächenwinkel berechnet werden.

Die Zusammenstellung der Indices h_1, h_2, h_3 wird nach einem Vorschlage von W. Whewell¹²⁾ (1825) zur Bezeichnung der Fläche h benutzt und das Symbol von h genannt. Dieselbe Methode der Flächen-

12) W. Whewell, London Phil. Trans. 1825, p. 87.

bezeichnung haben *J. G. Grassmann*¹³⁾ und *L. Frankenheim*¹⁴⁾ im Jahre 1829 und bald darauf auch *C. Fr. Gauss*¹⁵⁾ ersonnen und angewandt; eine weitere Verbreitung erlangte sie erst durch die krystallographischen und mineralogischen Schriften von *W. H. Miller*¹⁶⁾.

Aus Fig. 11 ist ersichtlich, dass die Indices einer Fläche h auch definiert werden können als Verhältnisse der Dreiecke, die von der Fläche h und der Einheitsfläche e auf den Axenebenen bestimmt werden¹⁷⁾:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{OH_2 H_3}{OE_2 E_3} : \frac{OH_3 H_1}{OE_3 E_1} : \frac{OH_1 H_2}{OE_1 E_2}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich eine in dem Gesetz der rationalen Indices enthaltene Beziehung zwischen den Flächen und den Kanten eines Krystals. Betrachten wir das Ellipsoid, in welchem π_1, π_2, π_3 nach Richtung und Länge konjugierte Durchmesser sind. Zu der Diametralebene, die parallel der Krystallfläche mit den Indices h_1, h_2, h_3 liegt, gehöre der konjugierte Durchmesser nach dem Punkte y_1', y_2', y_3' des Ellipsoids; dann ist die Gleichung dieser Ebene:

$$\frac{y_1 y_1'}{a_1^2} + \frac{y_2 y_2'}{a_2^2} + \frac{y_3 y_3'}{a_3^2} = 0.$$

Demnach verhalten sich nach (2) die Indices der Krystallfläche wie:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{y_1'}{a_1} : \frac{y_2'}{a_2} : \frac{y_3'}{a_3}.$$

13) *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie u. geometr. Kombinationslehre 1 (1829). Vgl. Ann. Phys. Chem. 30 (1833), p. 1.

14) *M. L. Frankenheim*, De crystallorum cohaesione, Vratisl. 1829.

15) *C. Fr. Gauss*, Werke 2 (1863), p. 308.

16) *W. H. Miller*, Phil. Mag. (3) 6 (1835), p. 105; A treatise on crystallography 1839; A tract on crystallography 1863; An elementary introduction to mineralogy by *W. Philipps*; new edit. by *H. J. Brocke* and *W. H. Miller* 1852.

17) *H. Grassmann*, Ausdehnungslehre von 1844, § 171. [Vgl. *G. Junghann*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 1 (1881), p. 334.] Die *H. Grassmann'sche* Fassung des Gesetzes der rationalen Indices lautet: „Wenn man vier Flächen eines Krystalles ohne Änderung ihrer Richtungen so legt, dass sie einen Raum einschliessen, und die Stücke, welche dadurch von dreien derselben abgeschnitten werden, zu Richtmassen macht, so lässt sich jede andere Fläche des Krystalles als Vielfachensumme dieser Richtmasse rational ausdrücken.“ Oder: „Wenn man drei Kanten eines Krystalles, welche nicht in derselben Ebene liegen, ohne Änderung ihrer Richtung an einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt legt, und als ihre Endpunkte ihre Durchschnitte mit irgend einer Krystallfläche setzt, so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als Vielfachensumme dieser Strecken rational ausdrücken.“ Wie sich diese Fassung aus dem Gesetz der Zonen ergibt mit Hilfe der Regeln über die Multiplikation von Strecken und Flächenräumen hat *Fr. Engel* gezeigt in: *H. Grassmann*, Ges. math. u. phys. Werke 1, 1 (1894), p. 411.

Andererseits verhalten sich nach (3) die Koordinaten des konjugierten Durchmessers mit den Indices η_1, η_2, η_3 wie:

$$y_1' : y_2' : y_3' = a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3.$$

Daraus folgt:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \eta_1 : \eta_2 : \eta_3,$$

d. h. in einem Ellipsoid, in welchem die Krystallaxen nach Richtung und Länge konjugierte Durchmesser sind, gehört zu jeder Diametralebene, die einer Krystallfläche parallel liegt, ein konjugierter Durchmesser, der die Richtung einer Krystallfläche und dieselben Indices wie jene Fläche besitzt¹⁸).

7. Topische Parameter. Setzt man das Volumen des Elementarparallelepipeds eines triklinen Raumgitters gleich dem Molekularvolumen V des Stoffes, so werden die Kantenlängen χ, ψ, ω des Parallelepipeds *topische Parameter* genannt. Sie dienen zur Vergleichung der Krystallformen verschiedener Stoffe¹⁹. Bezeichnet man das Verhältnis der Axeneinheiten:

$$\frac{a_1}{a_2} = a, \quad \frac{a_3}{a_2} = c,$$

die Winkel $\pi_3 \pi_1 = \beta$, $\pi_1 \pi_2 = \gamma$ und den inneren Winkel der Ebenen $\pi_3 \pi_1$, $\pi_1 \pi_2$ an π_1 mit A , so ist:

$$\begin{aligned} a : 1 : c &= \chi : \psi : \omega, \\ V &= \chi \psi \omega \sin \beta \sin \gamma \sin A, \\ \chi^3 &= a^3 \psi^3 = \frac{a^3 V}{c \sin \beta \sin \gamma \sin A}, \\ \psi^3 &= \frac{V}{ac \sin \beta \sin \gamma \sin A}, \\ \omega^3 &= c^3 \psi^3 = \frac{c^3 V}{a \sin \beta \sin \gamma \sin A}. \end{aligned}$$

8. Transformation der Indices. Eine Veränderung der Axenebenen und der Einheitsfläche führt wieder auf rationale Indices, wie aus folgenden Relationen hervorgeht²⁰).

erteilt man den Flächen f^1, f^2, f^3, k mit den ursprünglichen Indices:

18) Qu. Sella, Nuovo Cimento 4 (1856), p. 93.

19) F. Becke, Anzeiger Wien. Akad. 30 (1893), p. 204; W. Muthmann, Zeitschr. f. Kryst. 22 (1894), p. 497; A. E. Tutton, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 1; 27 (1897), p. 113, 266; 29 (1898), p. 54.

20) A. T. Kupffer, Ann. Phys. Chem. 8 (1826), p. 61, 215; Handb. d. rechn. Krystallon. 1831, p. 497; J. F. Chr. Hessel, Krystallometrie 1831, p. 214; H. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844, § 171; Th. Liebisch, Geom. Kryst. 1881, p. 48.

$$f_1^1 f_2^1 f_3^1, \quad f_1^2 f_2^2 f_3^2, \quad f_1^3 f_2^3 f_3^3, \quad k_1 k_2 k_3$$

die neuen Indices

$$100, \quad 010, \quad 001, \quad 111$$

so erhält eine beliebige Fläche h jetzt folgende Indices:

$$(1) \quad t_1 : t_2 : t_3 = \frac{|hf^2 f^3|}{K_1} : \frac{|f^1 h f^3|}{K_2} : \frac{|f^1 f^2 h|}{K_3},$$

worin z. B. $|hf^2 f^3|$ gesetzt ist für:

$$\begin{vmatrix} h_1 & f_1^2 & f_1^3 \\ h_2 & f_2^2 & f_2^3 \\ h_3 & f_3^2 & f_3^3 \end{vmatrix}$$

und:

$$K_1 = |kf^2 f^3|, \quad K_2 = |f^1 k f^3|, \quad K_3 = |f^1 f^2 k|.$$

Eine Kante η ist nun zu bezeichnen durch:

$$(2) \quad \begin{cases} t_1 = K_1 K_1 (f_1^1 \eta_1 + f_2^1 \eta_2 + f_3^1 \eta_3) \\ t_2 = K_2 K_2 (f_1^2 \eta_1 + f_2^2 \eta_2 + f_3^2 \eta_3) \\ t_3 = K_3 K_3 (f_1^3 \eta_1 + f_2^3 \eta_2 + f_3^3 \eta_3). \end{cases}$$

Die Relation (1) ist ein spezieller Fall von (3).

Sollen die Flächen f^1, f^2, f^3, k die Indices:

$$q_1^1 q_2^1 q_3^1, \quad q_1^2 q_2^2 q_3^2, \quad q_1^3 q_2^3 q_3^3, \quad r_1 r_2 r_3$$

annehmen, so ergeben sich die neuen Indices m_1, m_2, m_3 der Fläche h aus:

$$(3) \quad \begin{cases} m_1 = \frac{|r q^2 q^3| \cdot |h f^2 f^3|}{|k f^2 f^3|} q_1^1 + \frac{|q_1^1 r q_3^3| \cdot |f_1^1 h f^3|}{|f_1^1 k f^3|} q_1^2 + \frac{|q^1 q^2 r| \cdot |f^1 f^2 h|}{|f_1^1 f_2^2 k|} q_1^3 \\ m_2 = \frac{|r q^2 q^3| \cdot |h f^2 f^3|}{|k f^2 f^3|} q_2^1 + \frac{|q^1 r q^3| \cdot |f^1 h f^3|}{|f^1 k f^3|} q_2^2 + \frac{|q^1 q^2 r| \cdot |f^1 f^2 h|}{|f_1^1 f^2 k|} q_2^3 \\ m_3 = \frac{|r q^2 q^3| \cdot |h f^2 f^3|}{|k f^2 f^3|} q_3^1 + \frac{|q^1 r q^3| \cdot |f^1 h f^3|}{|f^1 k f^3|} q_3^2 + \frac{|q^1 q^2 r| \cdot |f^1 f^2 h|}{|f^1 f^2 k|} q_3^3. \end{cases}$$

9. Koordinaten von Flächen und Kanten. In einem krystallographischen Ebenenbündel mit dem Zentrum C seien π_1, π_2, π_3 die zu Koordinatenaxen gewählten Kanten, ν_1, ν_2, ν_3 die Normalen der Axenebenen p_1, p_2, p_3 . Nach der Definition der Flächenwinkel (S. 396) sind die Aussenwinkel (π_i) der Ecke $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ und (ν_i) der Ecke $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ gleich folgenden Winkeln²¹⁾ (Fig. 12):

$$\begin{aligned} (\pi_1) &= \nu_2 \nu_3, & (\pi_2) &= \nu_3 \nu_1, & (\pi_3) &= \nu_1 \nu_2, \\ (\nu_1) &= \pi_2 \pi_3, & (\nu_2) &= \pi_3 \pi_1, & (\nu_3) &= \pi_1 \pi_2, \end{aligned}$$

21) *H. Grassmann*, Lehrbuch d. Trigonometrie 1865, p. 100.

und es gilt:

$$\frac{1}{\cos \pi_1 \nu_1} : \frac{1}{\cos \pi_2 \nu_2} : \frac{1}{\cos \pi_3 \nu_3} \\ = \sin \pi_2 \pi_3 : \sin \pi_3 \pi_1 : \sin \pi_1 \pi_2 = \sin \nu_2 \nu_3 : \sin \nu_3 \nu_1 : \sin \nu_1 \nu_2.$$

Bezeichnet man die Cosinus der Einfallswinkel der Koordinatenachsen in Bezug auf die Fläche h oder die Richtungscosinus ihrer Normale

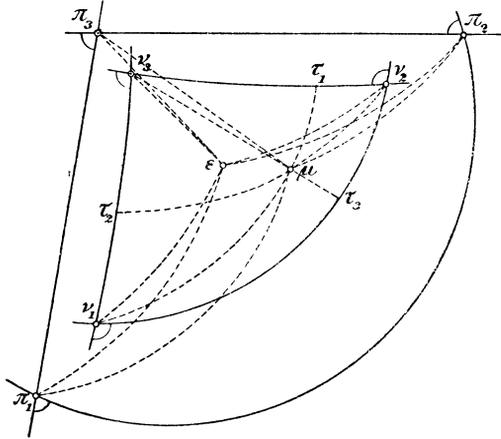


Fig. 12. Stereographische Projektion der Pole der Axenebenen, der Einheitsfläche und einer beliebigen Fläche.

μ als Koordinaten u_1, u_2, u_3 dieser Fläche, so besteht die Beziehung (S. 407):

$$u_1 : u_2 : u_3 = \cos \mu \pi_1 : \cos \mu \pi_2 : \cos \mu \pi_3 = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3}.$$

Die durch einen Punkt P einer Kante η parallel zu den Axenebenen gelegten Ebenen mögen die Koordinatenachsen schneiden in Π_1, Π_2, Π_3 und die Normalen der Axenebenen in N_1, N_2, N_3 . Dann ist:

$$CN_i = C\Pi_i \cdot \cos \pi_i \nu_i = CP \cdot \cos \eta \nu_i.$$

Bezeichnet man jetzt die Koordinaten $C\Pi_1, C\Pi_2, C\Pi_3$ des Punktes P mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 , so folgt mit Rücksicht auf (3) S. 408:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sin \pi_2 \pi_3 \cdot \cos \eta \nu_1 : \sin \pi_3 \pi_1 \cdot \cos \eta \nu_2 : \sin \pi_1 \pi_2 \cdot \cos \eta \nu_3 \\ = a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3.$$

Die Koordinaten einer Kante verhalten sich also wie die Cosinus der Einfallswinkel der Kante in Bezug auf die Axenebenen, jeder Cosinus multipliziert mit dem Sinus des in der Axenebene gelegenen Axenwinkels²²⁾.

22) Th. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 138.

Hiernach verhalten sich die Quotienten entsprechender Indices zweier Flächen h, h' wie die Quotienten aus den Cosinus der Einfallswinkel der Koordinatenaxen in Bezug auf diese Flächen:

$$\frac{h_1}{h_1'} : \frac{h_2}{h_2'} : \frac{h_3}{h_3'} = \frac{\cos \mu \pi_1}{\cos \mu' \pi_1} : \frac{\cos \mu \pi_2}{\cos \mu' \pi_2} : \frac{\cos \mu \pi_3}{\cos \mu' \pi_3}$$

und die Quotienten entsprechender Indices zweier Kanten η, η' wie die Quotienten aus den Cosinus der Einfallswinkel dieser Kanten in Bezug auf die Axenebenen:

$$\frac{\eta_1}{\eta_1'} : \frac{\eta_2}{\eta_2'} : \frac{\eta_3}{\eta_3'} = \frac{\cos \eta \nu_1}{\cos \eta' \nu_1} : \frac{\cos \eta \nu_2}{\cos \eta' \nu_2} : \frac{\cos \eta \nu_3}{\cos \eta' \nu_3}$$

Wählt man nach *J. G. Grassmann*²³⁾ die Normalen ν_1, ν_2, ν_3 der ursprünglichen Axenebenen zu Koordinatenaxen, so verhalten sich die Koordinaten m_1, m_2, m_3 der Normale μ einer Fläche h wie:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \sin \nu_2 \nu_3 \cdot \cos \mu \pi_1 : \sin \nu_3 \nu_1 \cdot \cos \mu \pi_2 : \sin \nu_1 \nu_2 \cdot \cos \mu \pi_3$$

oder, wenn die Abschnitte von h auf den ursprünglichen Koordinatenaxen nach S. 407 eingeführt werden:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sin \nu_2 \nu_3}{OH_1} : \frac{\sin \nu_3 \nu_1}{OH_2} : \frac{\sin \nu_1 \nu_2}{OH_3}$$

oder, wenn:

$$\frac{\sin \nu_2 \nu_3}{a_1} = \alpha_1, \quad \frac{\sin \nu_3 \nu_1}{a_2} = \alpha_2, \quad \frac{\sin \nu_1 \nu_2}{a_3} = \alpha_3$$

als Längeneinheiten auf den Normalen ν_1, ν_2, ν_3 eingeführt werden:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \alpha_1 h_1 : \alpha_2 h_2 : \alpha_3 h_3.$$

Demnach erhält in dem *J. G. Grassmann'schen* Koordinatensystem die Normale μ einer Fläche h dieselben Indices h_1, h_2, h_3 , die in dem ursprünglichen Koordinatensystem der Fläche gegeben werden.

10. Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse. Die Lage der Einheitsfläche gegen die Axenebenen p_1, p_2, p_3 kann beschrieben werden durch Angabe der Sinusverhältnisse, nach denen die von e auf den Axenebenen erzeugten Kanten $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ die Axenwinkel teilen. Wird in analoger Weise die Lage einer beliebigen Fläche h bestimmt, welche mit den Axenebenen die Kanten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bildet (Fig. 11), so ist das Doppelverhältnis:

$$\begin{aligned} (\pi_3 \pi_2 \varepsilon_4 \omega_1) &= \frac{\sin \pi_3 \varepsilon_4}{\sin \pi_2 \varepsilon_4} : \frac{\sin \pi_3 \omega_1}{\sin \pi_2 \omega_1} = \frac{OE_2}{OE_3} : \frac{OH_2}{OH_3} = h_2 : h_3 \\ (\pi_1 \pi_3 \varepsilon_5 \omega_2) &= h_3 : h_1 \\ (\pi_2 \pi_1 \varepsilon_6 \omega_3) &= h_1 : h_2. \end{aligned}$$

23) *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie 1 (1829), p. X, 5, 50; *J. Fr. Chr. Hessel*, Krystallometrie 1831, p. 223; *M. L. Frankenheim*, J. f. Math. 8 (1832), p. 172; *W. H. Miller*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 5 (1868), § 5.

Die projektivischen Koordinaten²⁴⁾ einer Krystallfläche sind also identisch mit deren Indices²⁵⁾.

Setzt man an Stelle der Geraden, die in diesen Doppelverhältnissen auftreten, die zu ihnen senkrechten Ebenen, so erhält man das Grundgesetz in der Form, in der es von C. Fr. Gauss 1831 ausgesprochen wurde²⁶⁾. Zur direkten Ableitung dient die Polfigur (Fig. 12), in der ε den Pol der Einheitsfläche e und μ den Pol der Fläche h bedeutet. Die rechtseitigen Dreiecke $\mu\pi_1\nu_2$, $\mu\pi_1\nu_3$, u. s. w., die den Eckpunkt μ gemein haben, liefern:

$$(1) \quad \begin{aligned} \cos \mu\pi_1 &= \sin \nu_2 \mu \sin \mu\nu_2\nu_3 = \sin \nu_3 \mu \sin \mu\nu_3\nu_2 \\ \cos \mu\pi_2 &= \sin \nu_3 \mu \sin \mu\nu_3\nu_1 = \sin \nu_1 \mu \sin \mu\nu_1\nu_3 \\ \cos \mu\pi_3 &= \sin \nu_1 \mu \sin \mu\nu_1\nu_2 = \sin \nu_2 \mu \sin \mu\nu_2\nu_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt z. B.

$$(2) \quad \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = \frac{\cos \mu\pi_2}{\cos \mu\pi_3} = \frac{\sin \mu\nu_1\nu_3}{\sin \mu\nu_1\nu_2}.$$

Für die Einheitsfläche gilt:

$$(3) \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\cos \varepsilon\pi_2}{\cos \varepsilon\pi_3} = \frac{\sin \varepsilon\nu_1\nu_3}{\sin \varepsilon\nu_1\nu_2}.$$

Demnach ist:

$$(4) \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{\sin \varepsilon\nu_1\nu_3}{\sin \varepsilon\nu_1\nu_2} : \frac{\sin \mu\nu_1\nu_3}{\sin \mu\nu_1\nu_2}.$$

Der rechtsstehende Quotient ist das Doppelverhältnis der vier Zonenkreise $\nu_1\nu_2$, $\nu_1\nu_3$, $\nu_1\varepsilon$, $\nu_1\mu$, die durch den Pol ν_1 der Axenebene p_1 gehen²⁷⁾.

Den allgemeinen Ausdruck für das Doppelverhältnis von vier Flächen h , h' , h'' , h''' einer Zone als Funktion ihrer Indices hat W. H. Miller 1839 angegeben²⁸⁾. Bedeuten 1, 2, 3, 4 vier Punkte einer Kugeloberfläche, von denen 1, 2, 3 auf einem Hauptkreise liegen, so besteht die Beziehung:

$$\cos 41 \cdot \sin 23 + \cos 42 \cdot \sin 31 + \cos 43 \cdot \sin 12 = 0.$$

Wendet man sie der Reihe nach an auf die Pole h , h' , h'' und den Schnittpunkt der Kugel der Polfigur mit je einer der Axen π_1 , π_2 , π_3 , so erhält man für die Koordinaten u_λ , u'_λ , u''_λ ($\lambda = 1, 2, 3$) die Gleichungen:

24) W. Fiedler, Vierteljahrsschr. naturf. Ges. zu Zürich 15 (1870), p. 152; Darstellende Geometrie, 3. Aufl. 3 (1888), p. 69, 642.

25) Liebisch, Geom. Krystallogr. 1881, p. 16.

26) C. Fr. Gauss, Werke 2 (1863), p. 308; aus dem Nachlass d. J. 1831.

Vgl. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 3 (1878), p. 28.

27) W. H. Miller, Proc. Cambridge Phil. Soc. 1866—67, p. 75.

28) W. H. Miller, A treatise on crystallography, 1839, p. 14.

$$u_\lambda \cdot \sin h'h'' + u'_\lambda \cdot \sin h''h + u''_\lambda \cdot \sin hh' = 0,$$

aus denen sich ergibt ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$\sin h'h'' : \sin h''h : \sin hh' = (u'u'')_\alpha : (u''u)_\alpha : (uu')_\alpha.$$

Analog gilt für die Flächen h, h', h'' ($\beta = 1, 2, 3$):

$$\sin h'h''' : \sin h''h' : \sin hh'' = (u'u''')_\beta : (u'''u)_\beta : (uu'')_\beta.$$

Bezeichnen wir mit $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ Proportionalitätsfaktoren, so können wir nun die Koordinaten ersetzen durch die entsprechenden Indices und Axeneinheiten:

$$u_\lambda = \varrho \cdot \frac{h_\lambda}{a_\lambda}, \quad u'_\lambda = \varrho' \cdot \frac{h'_\lambda}{a_\lambda}, \quad u''_\lambda = \varrho'' \cdot \frac{h''_\lambda}{a_\lambda}, \quad u'''_\lambda = \varrho''' \cdot \frac{h'''_\lambda}{a_\lambda}.$$

Dann drückt sich das Doppelverhältnis der vier Flächen in folgender Weise durch deren Indices aus:

$$(hh'h''h''') = \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} : \frac{\sin hh'''}{\sin h'h'''} = \frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} : \frac{(hh''')_\beta}{(h'h''')_\beta}.$$

Das Doppelverhältnis von vier Flächen einer Zone ist also eine rationale Zahl.

Hieraus ergibt sich, dass eine Zone bekannt ist, wenn man in ihr zwei aufeinanderfolgende Winkel kennt.

Das Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse enthält die Lösungen der folgenden fundamentalen Aufgaben (*W. H. Miller* 1839).

I. Wenn die Winkel zwischen vier Flächen h, h', h'', h''' einer Zone und die Indices von drei Flächen h, h', h'' gegeben sind, so berechnet man die Indices der vierten Fläche aus:

$$h_1''' : h_2''' : h_3''' = \mathfrak{G}h_1 - h_1' : \mathfrak{G}h_2 - h_2' : \mathfrak{G}h_3 - h_3'$$

$$\mathfrak{G} = (hh'h''h''') \cdot \frac{(h'h'')_\alpha}{(hh'')_\alpha}.$$

II. Wenn die Indices der vier Flächen und zwei ihrer Winkel, z. B. hh' und hh'' gegeben sind, so findet man den Winkel hh''' aus:

$$\cotg hh''' = (1 - \mathfrak{A}) \cotg hh' + \mathfrak{A} \cotg hh''$$

$$\mathfrak{A} = (hh'h''h''').$$

Zur logarithmischen Berechnung bequemer ist:

$$\text{tang}(hh'' - \frac{1}{2}hh') = \text{tang} \frac{1}{2}hh' \cdot \text{tang}(45^\circ + \Theta)$$

$$\text{tang} \Theta = \mathfrak{A} \cdot \frac{\sin(h'h + hh'')}{\sin hh''}.$$

Zwischen den Winkeln von vier harmonischen Flächen ($\mathfrak{A} = -1$) besteht die Relation:

$$2 \cotg hh' - \cotg hh'' - \cotg hh''' = 0.$$

Ist $hh'' = 90^\circ$ und $h'h''$ bekannt, so ergibt sich hk' aus:

$$\frac{\sin(2hk' + h'h'')}{\sin h'h''} = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}.$$

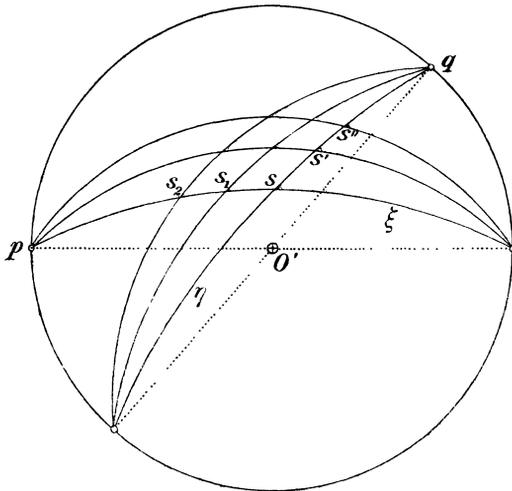


Fig. 13. Stereographische Projektion.

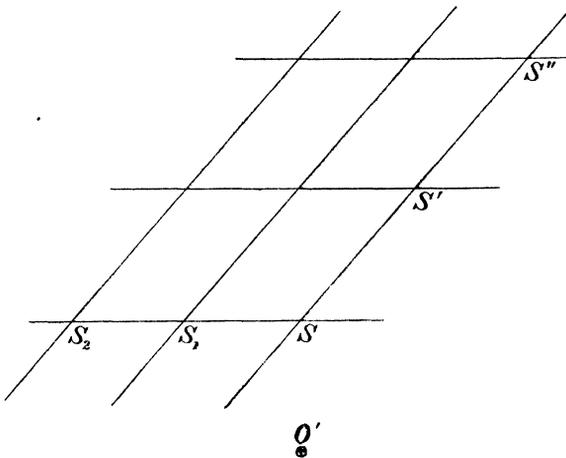


Fig. 14. Gnomonische Projektion.

Aus dem Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse folgt, dass die gnomonische Projektion einer Polfigur auf unendlich viele Arten in ein Netz von kongruenten Parallelogrammen geteilt werden kann²⁹⁾. Es seien ξ, η zwei Zonenkreise durch den Pol s (Fig. 13).

²⁹⁾ G. F. H. Smith, Min. Mag. 13 (1903), p. 314.

In ξ seien p der Pol, der gleichzeitig dem Grundkreis angehört, und s_1, s_2 zwei beliebig gewählte Pole. Die gnomonischen Projektionen von s, s_1, s_2 seien bezeichnet mit S, S_1, S_2 (Fig. 14). Dann wird das Doppelverhältnis $(s_2 s_1 s p)$ durch die Projektion auf das einfache Verhältnis der Strecken $S_2 S$ und $S_1 S$ zurückgeführt:

$$(s_2 s_1 s p) = (S_2 S_1 S \infty) = \frac{S_2 S}{S_1 S}.$$

Da sein Wert eine rationale Zahl sein muss, so können wir die Strecke $S_1 S$ zur Einheit wählen und auf der Zonenlinie die Pole S_2 markieren, für die das Verhältnis $S_2 S : S_1 S$ eine ganze Zahl ist. In analoger Weise verfahren wir in der Zone η :

$$(s'' s' s q) = (S'' S' S \infty) = \frac{S'' S}{S' S}.$$

Nun kann durch p und q je ein Büschel von Zonenkreisen gelegt werden, deren Projektionen zwei zu den Kugeldurchmessern nach p' und q parallele Büschel von Zonenlinien sind. Da die Zonenlinien jedes Büschels äquidistant sind, so ergibt sich der oben angeführte Satz.

11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices³⁰⁾. Sie ergeben sich aus der Relation zwischen den Winkeln, die von fünf Geraden oder Ebenen eingeschlossen werden:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \cos 45 & \cos 41 & \cos 42 & \cos 43 \\ \cos 15 & 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 25 & \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 35 & \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt wird und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden,

$$(2) \quad \Delta \cos 45 = \sum_{i,k=1}^3 \Delta_{ik} \cos 4i \cos 5k.$$

Fällt 4 mit 5 zusammen, so erhält man eine Beziehung zwischen den

30) *H. de Senarmont* in: *Traité de cristallographie* par *W. H. Miller*, 1842, Note p. 198; *Th. Liebisch*, *Zeitschr. f. Kryst.* 1 (1877), p. 132; 4 (1880), p. 263; *Geometr. Krystallogr.* 1881, p. 63—98.

sechs Flächenwinkeln eines vollständigen Vierflachs oder den sechs Kantenwinkeln eines vollständigen Vierkants:

$$(3) \quad \Delta = \sum_{ik=1}^3 \Delta_{ik} \cos 4i \cos 4k.$$

Es seien 1, 2, 3 die Axen π_1, π_2, π_3 und 4, 5 die Normalen μ, μ' der Flächen h, h' . Dann sind die Koordinaten dieser Flächen nach (S. 412):

$$\cos \mu \pi_i = \varrho \cdot \frac{h_i}{a_i}, \quad \cos \mu' \pi_i = \varrho' \cdot \frac{h'_i}{a_k},$$

worin ϱ und ϱ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k = \varphi(h), \quad \sum_{ik=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h'_k = \varphi(h, h')$$

ein, so ergibt sich aus (2) und (3):

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta \cos hh' &= \varrho \varrho' \cdot \varphi(h, h') \\ \Delta &= \varrho \varrho' \cdot \varphi(h) = \varrho' \varrho' \cdot \varphi(h'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir folgenden Wert für den *Cosinus eines Flächenwinkels* hh' ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Flächen h und h' :

$$(5) \quad \cos hh' = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}}.$$

Es seien 1, 2, 3 die Normalen p_1, p_2, p_3 der Axenebenen und 4, 5 die Kanten η, η' . Multipliziert man in (1) die zweite, dritte, vierte Zeile und die zweite, dritte, vierte Reihe mit

$$\sin \pi_2 \pi_3, \quad \sin \pi_3 \pi_1, \quad \sin \pi_1 \pi_2,$$

so ergibt sich:

$$(6) \quad \left| \begin{array}{cccc} \cos \eta \eta' & \sin \pi_2 \pi_3 \cos \eta \nu_1 & \sin \pi_3 \pi_1 \cos \eta \nu_2 & \sin \pi_1 \pi_2 \cos \eta \nu_3 \\ \sin \pi_2 \pi_3 \cos \nu_1 \eta' & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \sin \pi_3 \pi_1 \cos \nu_2 \eta' & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \sin \pi_1 \pi_2 \cos \nu_3 \eta' & \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{array} \right| = 0$$

oder, wenn $\cos \pi_i \pi_k$ mit c_{ik} bezeichnet wird:

$$(7) \quad \Delta \cos \eta \eta' = \sum_{ik=1}^3 c_{ik} \sin(\nu_i) \sin(\nu_k) \cos \eta \nu_i \cos \eta' \nu_k.$$

Die Koordinaten der Kanten η, η' sind nach S. 412:

$$\begin{aligned} \sin(\nu_i) \cos \eta \nu_i &= \sigma \cdot a_i \eta_i \\ \sin(\nu_k) \cos \eta' \nu_k &= \sigma' \cdot a_k \eta'_k, \end{aligned}$$

worin σ und σ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k = f(\eta), \quad \sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta'_k = f(\eta, \eta')$$

ein, so ergibt sich aus (7):

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta \cos \eta \eta' &= \sigma \sigma' \cdot f(\eta, \eta') \\ \Delta &= \sigma \sigma \cdot f(\eta) = \sigma' \sigma' \cdot f(\eta'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für den *Cosinus eines Kantenwinkels* $\eta \eta'$, ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Kanten η und η' :

$$(9) \quad \cos \eta \eta' = \frac{f(\eta, \eta')}{\sqrt{f(\eta) \cdot f(\eta')}}.$$

Die Identitäten, zu denen eine quadratische Form und die zu ihr adjungierte Form Anlass geben, lauten in dem vorliegenden Falle:

$$(10) \quad \begin{aligned} f(\eta) f(\eta') - f(\eta, \eta') f(\eta, \eta') &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdot \varphi((\eta \eta')) \\ \varphi(h) \varphi(h') - \varphi(h, h') \varphi(h, h') &= \frac{\Delta}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \cdot f((hh')). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe bildet man die Ausdrücke für den *Sinus* und die *Tangente* eines Flächenwinkels:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sin hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt{\frac{f((hh'))}{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}} \\ \tan hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \frac{\sqrt{f((hh'))}}{\varphi(h, h')} \end{aligned}$$

und eines Kantenwinkels:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sin \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \sqrt{\frac{\varphi((\eta \eta'))}{f(\eta) \cdot f(\eta')}} \\ \tan \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi((\eta \eta'))}}{f(\eta, \eta')}. \end{aligned}$$

Mit den Werten von ϱ aus (4) und σ aus (8) erhalten wir für die *Koordinaten einer Fläche* h :

$$(13) \quad \cos \mu \pi_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_i} \cdot \frac{h_i}{\sqrt{\varphi(h)}},$$

und für die *Koordinaten einer Kante* η :

$$(14) \quad \sin(\nu_i) \cos \eta \nu_i = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot a_i \eta_i}{\sqrt{f(\eta)}}.$$

12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten.

Sind h, h', h'' die Flächen einer Zone, so kann man nach (4) S. 408 die Verhältnisse der Indices von h'' darstellen durch die Indices der Flächen h, h' und eine *rationale Zahl* τ , die mit h'' variiert:

$$(15) \quad \begin{aligned} h_1'' : h_2'' : h_3'' &= h_1 + \tau h_1' : h_2 + \tau h_2' : h_3 + \tau h_3' \\ \tau &= -\frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Gehen wir zu den Koordinaten der Fläche über, so ergibt sich mit Rücksicht auf S. 415:

$$\begin{aligned} u_1'' : u_2'' : u_3'' &= u_1 + tu_1' : u_2 + tu_2' : u_3 + tu_3' \\ t &= \frac{\rho}{\rho'} \cdot \tau = -\frac{(u u'')_\alpha}{(u' u'')_\alpha} = -\frac{\sin h h''}{\sin h' h''}. \end{aligned}$$

t ist das *negative Teilungsverhältnis*, das die Lage der Fläche h'' in der Zone der Flächen h, h' bestimmt durch Angabe des Sinusverhältnisses, nach welchem h'' den Winkel hh' teilt. Wir können jetzt t und τ auch ausdrücken durch die Indices der Flächen h, h', h'' und die Axenelemente, denn nach (4) ist³¹⁾:

$$(16) \quad \begin{aligned} t &= -\frac{(hh')_\alpha}{(h'h')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}} \\ \tau &= -\frac{\sin hh''}{\sin h'h''} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h'')}{\varphi(h)}}. \end{aligned}$$

In analoger Weise lassen sich die Indices einer Kante η'' , die mit η und η' in einem Büschel liegt, darstellen durch die Indices von η, η' und eine rationale Zahl d :

$$(17) \quad \begin{aligned} \eta_1'' : \eta_2'' : \eta_3'' &= \eta_1 + d\eta_1' : \eta_2 + d\eta_2' : \eta_3 + d\eta_3' \\ d &= -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Koordinaten dieser Kante nach S. 412, 415:

$$\begin{aligned} \xi_1'' : \xi_2'' : \xi_3'' &= \xi_1 + \delta\xi_1' : \xi_2 + \delta\xi_2' : \xi_3 + \delta\xi_3' \\ \delta &= \frac{\sigma}{\sigma'} \cdot d = -\frac{(\xi\xi'')_\alpha}{(\xi'\xi'')_\alpha} = -\frac{\sin \eta \eta''}{\sin \eta' \eta''}, \end{aligned}$$

worin nach (8):

$$(18) \quad \delta = -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta'')}{f(\eta)}}, \quad d = -\frac{\sin \eta \eta''}{\sin \eta' \eta''} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta'')}{f(\eta)}}.$$

Sind gegeben die Axenelemente des Krystals, die Indices der Flächen h, h' und deren Winkel, so findet man in der Zone dieser Flächen diejenige Fläche h'' , für welche τ den Wert ± 1 hat, aus:

$$(19) \quad h_1'' : h_2'' : h_3'' = h_1 \pm h_1' : h_2 \pm h_2' : h_3 \pm h_3'$$

und den Winkel zwischen h'' und h oder h' aus:

$$(20) \quad \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh' + h'h''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh'}{\sin h'h + hh''} = \mp \sqrt{\frac{\varphi(h'')}{\varphi(h)}}.$$

31) Th. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 149; Geom. Kryst. 1881, p. 32, 75, 77, 85.

Zur logarithmischen Berechnung führt man den Hülfswinkel Θ ein durch:

$$\tan \Theta = \mp \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}}.$$

Dann ergibt sich der Winkel $h'h''$ aus:

$$\tan(h'h'' - \frac{1}{2}h'h) = \tan \frac{1}{2}h'h \cdot \tan(\Theta + 45^\circ).$$

Ein analoger Satz gilt für Kantenbüschel.

Auf die Beziehungen (19) und (20) gründet sich die *krystallographische Entwicklung* von Flächen oder Kanten eines Büschels aus zwei gegebenen Flächen oder Kanten durch fortgesetzte Addition gleichstelliger Indices³²⁾. Sie lässt sich veranschaulichen mit Hilfe der Raumgitterstruktur (Nr. 3). Denn in einem Raumgitter³³⁾ ist der Abstand \mathfrak{B} benachbarter Punkte auf einer Punktreihe η gegeben durch:

$$(21) \quad \mathfrak{B} = \sqrt{f(\eta)}$$

und der Flächeninhalt \mathfrak{S} des Elementarparallelogramms einer Netzebene η durch:

$$(22) \quad \mathfrak{S} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\varphi(h)}.$$

13. Flächendichte von Netzebenen. Der Flächeninhalt \mathfrak{S} und der Abstand der Ebene h von der nächsten benachbarten Netzebene sind umgekehrt proportional; denn das Produkt beider ist das konstante Volumen \mathfrak{V} des Elementarparallelepipedes des Raumgitters:

$$(23) \quad \mathfrak{V} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\Delta}.$$

Der Abstand benachbarter Netzebenen ist um so grösser, je dichter sie mit Gitterpunkten besetzt sind; die Flächendichte r ist gleich dem reziproken Werte des Flächeninhaltes \mathfrak{S} :

$$(24) \quad r \cdot \mathfrak{S} = 1.$$

Nach einer Hypothese von *A. Bravais* und *E. Mallard* treten die

32) *J. F. Chr. Hessel*, Krystallogometrie 1831, p. 210; *H. Grassmann*, Ableitung der Krystallgestalten aus dem allg. Gesetz der Krystallbildung, Progr. Otto-schule in Stettin 1839; Ges. math. u. phys. Werke 2² (1902), p. 115; *Fr. A. Quenstedt*, Beitr. z. rechn. Kryst. 1848; Grundr. d. best. u. rechn. Kryst. 1873; *E. Weiss*, Über die kryst. Entwicklung des Quarzsystems u. über kryst. Entw. im allgemeinen, Abh. naturf. Ges. Halle 5 (1860); *G. Junghann*, Ann. Phys. Chem. 152 (1874), p. 68; *V. Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 28 (1897), p. 1, 414; 29 (1898), p. 38; *E. v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 35 (1902), p. 25; *H. Baumhauer*, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1904), p. 628; *E. Sommerfeldt*, Zentralblatt f. Min. 1903, p. 537; 1905, p. 427.

33) *A. Bravais*, J. éc. polyt. 19 (1850), cah. 33; 20 (1851) cah. 34; wieder abgedruckt in: Études cristallogr. 1866; *E. Mallard*, Traité de crist. 1 (1879), p. 12, 298.

Netzebenen in dem Masse seltener als Krystallflächen auf, als sie weniger dicht besetzt sind. Diese Annahme dient dazu, das Raumgitter zu bestimmen, nach dem wahrscheinlich die Molekelschwerpunkte angeordnet sind³⁴). (Näheres hierüber in Teil C, Art. Mügge.)

14. Einfallswinkel einer Kante in Bezug auf eine Fläche.

Aus (2) ist der Zusammenhang der Indices $h_1 h_2 h_3$ einer Fläche h mit den Indices $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ ihrer Normale μ zu entnehmen. Wir verstehen jetzt unter den Geraden 1 bis 5 die Axen $\pi_1 \pi_2 \pi_3$, die Normale μ und die Normale ν_i einer Axenebene; dann folgt mit Rücksicht auf:

$$\cos \nu_k \pi_k \sin (\nu_k) = \sqrt{\Delta}$$

aus (2) die Relation:

$$(25) \quad \sqrt{\Delta} \sin (\nu_k) \cos \mu \nu_k = \Delta_{k1} \cos \mu \pi_1 + \Delta_{k2} \cos \mu \pi_2 + \Delta_{k3} \cos \mu \pi_3$$

oder wenn nach (13) und (14) die Indices der Fläche h und ihrer Normale μ eingeführt werden:

$$(26) \quad \text{P} \cdot a_k \mu_k = \Delta_{k1} \frac{h_1}{a_1} + \Delta_{k2} \frac{h_2}{a_2} + \Delta_{k3} \frac{h_3}{a_3}$$

$$\text{P} = \sqrt{\frac{\Delta \cdot \varphi(h)}{f(\mu)}}$$

Wir können nun den Cosinus des Einfallswinkels $\eta \mu$ einer Kante η in Bezug auf die Fläche h durch die Axenelemente und die Indices von h und η ausdrücken. Denn die Formel (7):

$$\Delta \cos \eta \mu = \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} \sin (\nu_i) \cos (\eta \nu_i) \sin (\nu_k) \cos (\mu \nu_k)$$

geht nach (14) und (25) über in:

$$\sqrt{\Delta \cdot f(\eta) \varphi(h)} \cdot \cos \eta \mu = \sum_{\lambda, i=1}^3 a_i \eta_i \frac{h_i}{a_i} \sum_{k=1}^3 c_{ik} \Delta_{k\lambda}$$

Die letzte Summe ist gleich 0 für $i \geq \lambda$ und gleich Δ für $i = \lambda$; demnach bleibt:

$$(27) \quad \cos \eta \mu = \sqrt{\frac{\Delta}{f(\eta) \varphi(h)}} (\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \eta_3 h_3).$$

Diese Beziehung gestattet, bei einer Transformation der Indices die neuen Axeneinheiten b_1, b_2, b_3 zu berechnen. Bezeichnet man die Schnittgeraden der auf S. 410 eingeführten Axenebenen f^1, f^2, f^3 mit ψ_1, ψ_2, ψ_3 und die Normale der Einheitsfläche k mit π , so verhalten sich die Axeneinheiten:

$$b_1 : b_2 : b_3 = \frac{1}{\cos \pi \psi_1} : \frac{1}{\cos \pi \psi_2} : \frac{1}{\cos \pi \psi_3}.$$

34) L. Sohncke, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1887), p. 209, 214.

Nun ist nach (27):

$$\cos \alpha \psi_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{f(\psi_1) \cdot \varphi(\alpha)}} \cdot | \alpha f^2 f^3 |$$

u. s. w., demnach⁸⁵⁾:

$$(28) \quad b_1 : b_2 : b_3 = \frac{\sqrt{f(\psi_1)}}{|\alpha f^2 f^3|} : \frac{\sqrt{f(\psi_2)}}{|f^1 \alpha f^2|} : \frac{\sqrt{f(\psi_3)}}{|f^1 f^2 \alpha|}.$$

15. Aufeinander senkrechte Flächen und Kanten. Besitzt ein Krystall zwei aufeinander senkrechte Flächenrichtungen h, h' , so besteht nach (5) die Gleichung:

$$(29) \quad \sum_{i,k=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h'_k = 0,$$

d. h. die sechs Grössen:

$$z_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k}$$

sind verbunden durch eine lineare homogene Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten r_{ik} :

$$(30) \quad \sum_{i,k=1}^3 z_{ik} r_{ik} = 0$$

$$2r_{ik} = h_i h'_k + h_k h'_i.$$

Umgekehrt ist das Bestehen einer solchen Relation zwar eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von zwei aufeinander senkrechten Flächenrichtungen, denn die Zahlen r_{ik} sind der *Bedingung* unterworfen, dass die aus ihnen gebildete Determinante verschwindet und die den Koeffizienten r_{11}, r_{22}, r_{33} adjungierten Unterdeterminanten vollständige Quadrate sind. Ein analoger Satz gilt für zwei aufeinander senkrechte Kanten⁸⁶⁾.

16. Krystallberechnung. Um die zur Beschreibung eines Krystallpolyeders notwendigen und ausreichenden Grössen zu gewinnen, muss ein der Symmetrie des Krystalls entsprechendes Axensystem gewählt werden. Dann reduziert sich die Beschreibung auf die Angabe der Symmetrieeigenschaften, der Axenelemente und der Indices je einer Fläche der vorhandenen einfachen Krystallformen. Im Folgenden sind zur Erläuterung der Berechnung nur trikline Krystalle berück-

35) A. T. Kupffer, Handb. d. rechn. Krystallonomie 1831, p. 494.; H. de Senarmont in: Traité de crist. par W. H. Miller, 1842, Note p. 198.

36) H. St. Smith, Proc. Math. Soc. London 8 (1877), p. 83. Hier sind auch die Fälle, in denen die Grössen z_{ik} durch zwei, drei, vier oder fünf homogene Gleichungen des ersten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten verknüpft sind, ausführlich behandelt.

sichtigt, in denen zu Axen irgend drei in einer Ecke zusammenstossende Kantenrichtungen gewählt werden können³⁷⁾.

Da es sich bei der geometrischen Untersuchung der Krystallpolyeder um Beziehungen zwischen Axenelementen, Indices und Winkeln handelt, so ordnen sich die Aufgaben der Krystallberechnung in drei Gruppen.³⁸⁾

17. Berechnung der Axenelemente. Zur Berechnung der fünf *Axenelemente* eines triklinen Krystalls: der drei Winkel zwischen den Axen und der beiden Verhältnisse der Axeneinheiten, sind mindestens fünf von einander unabhängige Winkel zu messen. Hierzu können benutzt werden:

A. vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, oder

B. fünf Flächen, von denen die eine zugleich eine der Diagonalfächen des vollständigen Vierflachs ist, das von den anderen bestimmt wird.

Die *einfachsten* Fälle (A) und (B) liegen vor, wenn drei dieser Flächen, die eine Ecke bilden, zu Axenebenen p_1, p_2, p_3 gewählt werden³⁸⁾. Dann ergeben sich die Winkel zwischen den Axen π_1, π_2, π_3 aus dem sphärischen Dreieck der Pole ν_1, ν_2, ν_3 der Axenebenen (Fig. 12).

(A) Werden nun die Verhältnisse der Axeneinheiten $a_1 : a_2 : a_3$ dadurch definiert, dass einer Fläche h , welche die Axen in endlichen Entfernungen schneidet, die Indices h_1, h_2, h_3 erteilt werden, so dienen zur Berechnung jener Verhältnisse nach (2) S. 414:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\sin \mu \nu_3 \nu_1}{\sin \mu \nu_3 \nu_2}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \mu \nu_1 \nu_2}{\sin \mu \nu_1 \nu_3}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\sin \mu \nu_2 \nu_3}{\sin \mu \nu_2 \nu_1}.$$

Sind z. B. die Winkel $\mu \nu_2$ und $\mu \nu_3$ gemessen, so findet man aus dem Dreieck $\mu \nu_2 \nu_3$, dessen Seiten gegeben sind, die Winkel $\mu \nu_2 \nu_3$ und $\mu \nu_3 \nu_2$. Daher sind auch die Winkel $\mu \nu_2 \nu_1$ und $\mu \nu_3 \nu_1$ bekannt.

(B) Werden die Axeneinheiten definiert mit Hülfe von zwei Flächen, von denen jede in die Zone einer Axe fällt, so benutzt man zu ihrer Berechnung die Relationen (1) auf S. 414. Es ist z. B. für eine Fläche t_1 aus der Zone der Axe π_1 mit den Indices $0 h_2 h_3$ und dem Pol τ_1 (Fig. 12):

$$\frac{h_2 a_3}{h_3 a_2} = \frac{\cos \tau_1 \pi_2}{\cos \tau_2 \pi_3} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_3 \nu_1}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_2 \nu_1} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin (\nu_3)}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin (\nu_2)}$$

oder

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \pi_3 \tau_1}{\sin \pi_1 \pi_2} \cdot \frac{\sin \nu_2 \tau_1}{\sin [\nu_2 \nu_3 - \nu_2 \tau_1]}.$$

37) Über die Vereinfachungen, die in der Berechnung höher symmetrischer Krystalle eintreten, geben die Lehrbücher der Krystallographie Auskunft.

38) W. H. Miller, Treatise 1839, chapt. VII.

Diese Beziehung und die analogen Gleichungen ergeben sich auch aus dem allgemeinen Ausdruck (11) S. 419 für die Tangente eines Flächenwinkels; zugleich ist ersichtlich, dass durch Auflösung von (11) *einwertige* Verhältnisse der Axeneinheiten nur in dem hier vorliegenden besonderen Falle zu erhalten sind.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem geht die letzte Formel über in:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \tan \tau_1 \nu_2.$$

A. Die Axenelemente eines triklinen Krystals können allgemein dadurch definiert werden, dass vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, beliebige ganze Zahlen als Indices erhalten; dabei ist zu beachten, dass die Determinante der Indices von drei Flächen in ihrem Vorzeichen mit dem Drehungssinn der von den Flächennormalen gebildeten Ecke übereinstimmen muss³⁹). Hierdurch sind, da es nur auf die Verhältnisse der Indices ankommt, acht Grössen willkürlich gewählt. In der That erfordern die Richtungen der drei Axen und die Verhältnisse der Axeneinheiten zu ihrer Bestimmung je zwei Grössen.

Sind von den sechs Winkeln zwischen vier derartigen Flächen fünf gegeben, so liefert die Relation (3) S. 418 zur Bestimmung des sechsten Winkels eine quadratische Gleichung; die Entscheidung über die beiden möglichen Fälle ist erst mit Hilfe des sechsten Winkels herbeizuführen.

Zur Berechnung der Axenelemente aus den sechs Winkeln dient nun der Ausdruck (5) S. 418 für den Cosinus eines Flächenwinkels, der mit Benutzung der Bezeichnung z_{ik} (S. 423) lautet:

$$\cos hh = \frac{\sum_{i,k=1}^3 z_{ik} h_i h'_k}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^3 z_{ik} h_i h_k \cdot \sum_{i,k=1}^3 z_{ik} h'_i h'_k}}.$$

Man findet also zunächst die sechs Grössen z_{ik} , auf deren Verhältnisse es allein ankommt, und darauf aus ihnen die Axenelemente⁴⁰).

Diese Berechnung ist von *B. Hecht* allgemein in der Weise durch-

³⁹) *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 5 (1887), p. 587, 589, 590.

⁴⁰) Eine ausführliche Darstellung spezieller Fälle gab *H. Dufet*, Bull. soc. franç. de min. 26 (1903), p. 190.

geführt worden, dass die Winkel und die Indices der Ausgangsflächen in den Endformeln symmetrisch auftreten⁴¹⁾.

M. Websky hat gezeigt, wie der Fall A mit Hilfe der Gesetze der Zonen und der rationalen Doppelverhältnisse trigonometrisch auf (B) zurückgeführt werden kann⁴²⁾.

B. Das soeben erwähnte Verfahren von *M. Websky* gestattet auch in diesem Falle, auf trigonometrischem Wege die Bedingungen von (B) zu erfüllen.

18. Berechnung der Indices. Zur Berechnung der *Indices* einer Krystallfläche ist die Kenntnis der Axenelemente nicht erforderlich in den folgenden Fällen:

Liegt eine Fläche h in zwei bekannten Zonen η, η' , so ergeben sich ihre Indices nach (5) S. 408 aus:

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\eta\eta')_1 : (\eta\eta')_2 : (\eta\eta')_3.$$

Fällt eine Fläche h''' in die Zone von drei bekannten Flächen, an die sie durch einen gemessenen Winkel angeschlossen ist, so ist das Doppelverhältnis der vier Flächen bekannt. Daher gelten die Beziehungen unter I, S. 415:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \mathfrak{G}h_1' - h_1'' : \mathfrak{G}h_2' - h_2'' : \mathfrak{G}h_3' - h_3'',$$

$$\mathfrak{G} = (h'h''h'''h) \cdot \frac{(h''h''')_\alpha}{(h'h''')_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Auf die Benutzung dieser Beziehungen lässt sich auch die Lösung der Aufgabe zurückführen, die Indices einer Fläche h zu bestimmen, die mit den bekannten Flächen h', h'', h''' in einer Zone liegt und mit einer dieser Zone nicht angehörenden Fläche k einen gegebenen Winkel einschliesst⁴³⁾. Denn man findet z. B. den Winkel hh' mit Hilfe der Relation:

$$\cos kh \sin h'h'' + \cos kh' \sin h''h + \cos kh'' \sin hh' = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{L} \sin hh' + \mathfrak{M} \cos hh' = \mathfrak{N},$$

worin:

$$\mathfrak{L} = \cos kh'' - \cos kh' \cos h'h',$$

$$\mathfrak{M} = \cos kh' \sin h'h',$$

$$\mathfrak{N} = \cos kh \sin h''h'$$

41) *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 7 (1891), p. 488; Anleitung zur Krystallberechnung 1893, p. 15—17.

42) *M. Websky*, Monatsber. Berlin. Akad. 1879, p. 339; *Th. Liebisch*, Geom. Kryst. 1881, p. 161.

43) *Th. Liebisch*, Geometr. Kryst. 1881, p. 176.

gesetzt ist, indem man die Zahl m und den Hilfswinkel ψ einführt durch:

$$\mathfrak{L} = m \cos \psi, \quad \mathfrak{M} = m \sin \psi,$$

so dass:

$$\sin(hh' + \psi) = \frac{\mathfrak{M} \sin \psi}{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{L} \cos \psi}{\mathfrak{L}}.$$

Hieraus ergeben sich zwei Werte für den gesuchten Winkel hh' ; der Anblick des Krystalls entscheidet, welcher von ihnen in Betracht kommt. —

Die Kenntnis der Axenelemente wird bei der Berechnung von Indices vorausgesetzt in folgenden Fällen.

Gehört eine Fläche h'' einer Zone an, in der nur zwei Flächen h, h' bekannt sind, und ist ihre Neigung gegen h oder h' gemessen, so kann man zunächst das Teilungsverhältnis jener Fläche (S. 420) und darauf ihre Indices ermitteln:

$$\tau = - \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(\bar{h})}{\varphi(h')}},$$

$$h_1'' : h_2'' : h_3'' = h_1 + \tau h_1' : h_2 + \tau h_2' : h_3 + \tau h_3'.$$

Um die Indices einer Fläche h zu berechnen, wenn zwei der Winkel bekannt sind, die sie mit den Axenebenen einschliesst (Fig. 12), beachte man die Beziehung S. 424:

$$\frac{h_2 a_3}{h_3 a_2} = \frac{\sin \mu \nu_1 \nu_3}{\sin \mu \nu_1 \nu_2} = \frac{\sin[(\nu_1) + \mu \nu_1 \nu_2]}{\sin \mu \nu_1 \nu_2}$$

und die analogen Gleichungen. Wird auf beiden Seiten die Einheit addiert und subtrahiert, so erhält man durch Division:

$$\tan\left[\mu \nu_1 \nu_2 + \frac{(\nu_1)}{2}\right] = \tan \frac{(\nu_1)}{2} \tan(135^\circ - \vartheta_1),$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{h_2 a_3}{h_3 a_2}.$$

Sind z. B. $\mu \nu_2$ und $\mu \nu_3$ gegeben, so findet man im Dreieck $\mu \nu_2 \nu_3$ die Winkel $\mu \nu_2 \nu_3$, $\mu \nu_3 \nu_1$ und darauf die Werte von ϑ_2 , ϑ_3 , so dass für die gesuchten Indices gilt:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2} \tan \vartheta_3, \quad \frac{h_1}{h_3} = \frac{a_1}{a_3} \cotg \vartheta_2.$$

Bei dieser Berechnung ist auf den Sinn der mit ihren Scheiteln in ν_2 und ν_3 liegenden Winkel zu achten⁴⁴⁾.

19. Berechnung der Flächenwinkel und Kantenwinkel. Die Berechnung der *Flächenwinkel* und *Kantenwinkel* eines Krystalls, von dem die Axenelemente und die Indices der Flächen gegeben sind,

44) *Th. Liebisch*, *Geom. Kryst.* 1881, p. 181.

kann immer ausgeführt werden mit Hülfe der allgemeinen Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen jener Winkel (5), (9), (11), (12) auf S. 418—419.

Wie eine nach Zonen vorschreitende Winkelberechnung durchgeführt werden kann, hat *M. Websky* dargelegt⁴⁵⁾.

20. Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente. Zwischen den auf solche Weise berechneten Werten der Flächenwinkel und den durch Messung erhaltenen Werten bestehen Differenzen, die aus Störungen des Krystallisationsvorganges und aus Beobachtungsfehlern entspringen. Die berechneten Werte sind Funktionen der Näherungswerte der Axenelemente, die aus den fünf Fundamentalwinkeln nach Nr. 17 abgeleitet wurden. Es sollen nun mit Hülfe aller Winkelmessungen *die wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente* berechnet werden, d. h. die Werte, für welche die Summe der mit den zugehörigen Gewichten p multiplizierten Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Flächenwinkeln ein Minimum ist. Diese Rechnung ist zuerst von *F. E. Neumann*⁴⁶⁾ durchgeführt worden. Ihre praktische Ausführung wurde vereinfacht von *B. Hecht*⁴⁷⁾, indem er an Stelle der Axenelemente die sechs Grössen (S. 423):

$$z_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} = z_{ki} = \frac{\Delta_{ki}}{a_i a_k}$$

einführte, deren Verhältnisse allein in Betracht kommen.

Es seien z_{ik}^0 die aus fünf Fundamentalwinkeln abgeleiteten Näherungswerte von z_{ik} , ω^0 der mit ihrer Hülfe berechnete Wert des Winkels der Flächen h, h' , dessen gemessener Wert mit ω' bezeichnet sei; p bedeute das Gewicht der Beobachtung. Ferner seien dz_{ik} die zu berechnenden Korrekturen von z_{ik}^0 und ω der mit den korrigierten Werten $z_{ik}^0 + dz_{ik}$ berechnete Winkel. Bezeichnet man nun:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ik}} \right)^0 = Q_{ik},$$

so ist:

$$\omega = \omega^0 + Q_{11} dz_{11} + Q_{22} dz_{22} + Q_{33} dz_{33} + Q_{23} dz_{23} + Q_{31} dz_{31} + Q_{12} dz_{12}.$$

Die Grössen Q_{ik} findet man durch Differentiation von (5) S. 418:

$$\cos \omega = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h)\varphi(h')}},$$

worin:

45) *M. Websky*, Berlin Ber. 1879, p. 339.

46) *F. E. Neumann*, Berlin Abhdl. 1830, p. 189 (Krystallsystem des Albites).

47) *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 5 (1887), p. 601, 614, 622, 627, 633, 637.

$$\varphi(h, h') = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h_i h'_k, \quad \varphi(h) = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h_i h_k, \quad \varphi(h') = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h'_i h'_k.$$

Es ergibt sich:

$$-\frac{\sin \omega d\omega}{\cos \omega} = \frac{d\varphi(h, h')}{\varphi(h, h')} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(h)}{\varphi(h)} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(h')}{\varphi(h')},$$

oder:

$$d\omega = \frac{\cotg \omega}{2} \left[\frac{d\varphi(h)}{\varphi(h)} + \frac{d\varphi(h')}{\varphi(h')} - 2 \frac{d\varphi(h, h')}{\varphi(h, h')} \right].$$

Setzt man hierin:

$$d\varphi(h) = \sum_{ik=1}^3 h_i h_k dz_{ik}, \quad d\varphi(h') = \sum_{ik=1}^3 h'_i h'_k dz_{ik}, \quad d\varphi(h, h') = \sum_{ik=1}^3 h_i h'_k dz_{ik},$$

so erhält man für die Koeffizienten von dz_{ik} :

$$Q_{ii} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ii}} \right)^0 = \frac{\cotg \omega^0}{2} \left[\frac{h_i^2}{\varphi^0(h)} + \frac{h'_i{}^2}{\varphi^0(h')} - 2 \frac{h_i h'_i}{\varphi^0(h, h')} \right],$$

$$Q_{ik} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ik}} \right)^0 = \frac{\cotg \omega^0}{2} \left[\frac{h_i h_k}{\varphi^0(h)} + \frac{h'_i h'_k}{\varphi^0(h')} - \frac{h_i h'_k + h_k h'_i}{\varphi^0(h, h')} \right].$$

Es sind nun die Größen dz_{ik} so zu bestimmen, dass:

$$\sum p(\omega' - \omega)^2,$$

oder:

$$\sum p(\omega' - \omega^0 - Q_{11} dz_{11} - Q_{22} dz_{22} - Q_{33} dz_{33} - Q_{23} dz_{23} - Q_{31} dz_{31} - Q_{12} dz_{12})^2$$

ein Minimum wird. Dabei kann eine der Größen dz_{ik} gleich Null gesetzt werden. Ein bequemes Schema für die Rechnung hat *Hecht* a. a. O. mitgeteilt⁴⁸⁾.

21. Anwendung mehrkreisiger Reflexionsgoniometer. Abweichend gestaltet sich die Krystallberechnung, wenn die Flächenwinkel nicht mit *einkreisigen Reflexionsgoniometern*⁴⁹⁾, sondern mit *zweikreisigen Theodolithgoniometern*⁵⁰⁾ gemessen werden. Diese In-

48) Über Ausgleichungsmethoden in der Krystallberechnung vgl. *H. Dauber*, Sitzungsber. Wien Akad. 39 (1860), p. 685; *A. Schrauf*, Lehrb. d. physik. Min. 1 (1866), p. 223; *V. von Lang*, Lehrb. d. Kryst. 1866, p. 351; *J. Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 5 (1881), p. 463; 22 (1893), p. 376; *A. Brezina*, Methodik der Krystallbestimmung 1884, p. 223; *A. Sella*, Riv. min. crist. 10 (1892), p. 33; *C. Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 333; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1903), p. 1.

49) Vgl. namentlich *M. Websky*, Zeitschr. f. Kryst. 4 (1880), p. 545.

50) *S. Czapski*, Zeitschr. f. Instr. 13 (1893), p. 1, 242; *V. Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 210; 24 (1895), p. 610; 29 (1898), p. 333; *E. v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 574; 32 (1900), p. 464; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 37 (1903), p. 50. — Das erste zweikreisige Goniometer wurde von *W. H. Miller* konstruiert Proc. Cambr. Phil. Soc. 4 (1882), p. 236.

strumente gestatten die wiederholten Justierungen eines Krystals, die bei jenen Apparaten für jede einzelne Zone erforderlich sind, zu vermeiden; sie bestimmen die Lage jeder Fläche durch zwei Winkel, die der geographischen Länge und Breite entsprechen (Polarkoordinaten Fig. 2). Die Vorzüge beider Messungsverfahren vereinigen die dreikreisigen Reflexionsgoniometer⁵¹⁾. Über den Gang der Berechnung, der durch geeignete Justierung der Krystalle bedeutend vereinfacht werden kann, handelt die unten angegebene Litteratur²⁾.

22. Rechtwinklige Hilfsaxensysteme. Zur Berechnung eines triklinen Krystals kann an Stelle des schiefwinkligen Systems krystallographischer Axen π_1, π_2, π_3 ein Hilfsaxensystem $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*$ von rechtwinkligen gleich langen Axen mit demselben Anfangspunkt eingeführt werden, dessen Vorteil darin besteht, dass wie bei den Krystallen des regulären Systems die Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen eines Winkels zwischen Flächen oder Kanten die einfachste Gestalt annehmen und die Indices einer Ebene und ihrer Normale einander gleich sind. Das Hilfsaxensystem ist so zu wählen, dass z. B. π_3 mit π_3^* und die Ebene $\pi_3\pi_1$ mit $\pi_3\pi_1^*$ zusammenfällt⁵³⁾. Die auf das Hilfsaxensystem bezogenen Werte der Indices von Flächen oder Kanten erhält man unter Berücksichtigung der Definition der Koordinaten in Nr. 9 mit Hilfe der Transformationsformeln, die den Übergang von einem schiefwinkligen Koordinatensystem in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit demselben Anfangspunkte vermitteln.

23. Perspektivische Krystallzeichnungen. Nach dem Gesetz der Zonen ist das Auftreten von Scharen paralleler Kanten charakteristisch für die Krystallpolyeder. Daher sind die perspektivischen Krystallzeichnungen stets Parallelprojektionen. Im Folgenden sollen orthogonale Projektionen benutzt werden. Zu ihrer Herstellung bieten sich zwei Verfahren dar.

I. Sind die Axenelemente und die Indices der Flächen eines Krystallpolyeders gegeben, so projiziert man zunächst das Axensystem auf die Bildebene \mathfrak{B} und findet dann die Projektionen der Kanten-

51) G. J. H. Smith, Min. Mag. 12 (1899), p. 175; 14 (1904), p. 1.

52) E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 32 (1900), p. 131, 446; G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 29; A. J. Moses u. A. F. Rogers, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1903), p. 209, 506; K. Stöckl, Zeitschr. f. Kryst. 39 (1904), p. 23; L. Borgström u. V. Goldschmidt, Zeitschr. f. Kryst. 41 (1906), p. 63.

53) C. Neumann, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 492; E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 632, 709; G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 505.

richtungen mit Hilfe einer, in einer Axenebene entworfenen, perspektivischen Linienprojektion des dem Polyeder entsprechenden Flächenbündels.

Die *indirekten* Projektionen der Axensysteme setzen voraus, dass eine Projektion von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen OA, OB, OC hergestellt sei. Wir nehmen an, dass in der Anfangslage die Ebene BOC in die Bildebene \mathfrak{B} falle und OC vertikal stehe. Darauf werde das System gedreht um OC um den Winkel ϱ im Sinne der Uhrzeigerbewegung und nach vorn geneigt, um die in \mathfrak{B} liegende Normale OE von OC um den Winkel σ . In dieser Stellung sind OF, OG, OH die senkrechten Projektionen der Axen auf \mathfrak{B} (Fig. 15). Bezeichnet man die Verkürzungsmassstäbe auf den Axen mit a, b, c und die Winkel $G OH = \varphi, HOF = \psi$, so bestehen folgende Beziehungen:

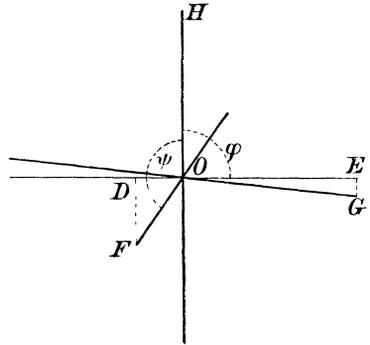


Fig. 15. Projektion von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen.

$$a : b : c = OF : OG : OH$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 \varrho \cos^2 \sigma} : \sqrt{1 - \sin^2 \varrho \cos^2 \sigma} : \cos \sigma.$$

$$\sin^2 \varrho = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \quad \sin^2 \sigma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \tan \varrho \sin \sigma = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\tan(\psi - 90^\circ) = \cot \varrho \sin \sigma = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Soll nach der Drehung um ϱ die Projektion der vorderen Axe OA gleich $1/r$ der Projektion OE der seitlichen Axe OB und nach der Neigung um σ die Abweichung DF von A unter die horizontale Gerade gleich $1/s$ von OE sein, so finden die Beziehungen statt⁵⁴⁾:

$$r = \frac{OE}{OD} = \cot \varrho, \quad s = \frac{OE}{OF} = \frac{1}{\sin \sigma}$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = r^2 + s^2 : r^2 s^2 + 1 : (r^2 + 1)(s^2 - 1)$$

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{1}{r s}, \quad \tan(\psi - 90^\circ) = \frac{r}{s}.$$

54) V. v. Lang, Lehrb. d. Krystallogr. 1866, § 71.

Die vielbenutzte *Mohs'sche* orthogonale Parallelprojektion⁵⁵⁾ fordert, dass in der Projektion des Hexaeders die rechte Seitenfläche $\frac{1}{3}$ so breit als die linke und die obere Endfläche, $\frac{1}{6}$ so hoch als die linke Seitenfläche breit oder, was dasselbe bedeutet, $\frac{1}{8}$ so hoch als das ganze Hexaeder breit erscheinen soll. In diesem Falle ist $r = 3$, $\mathfrak{s} = 8$ und:

$$\begin{aligned}\tan \varrho &= \frac{1}{3}, & \sin \sigma &= \frac{1}{8}; \\ \varrho &= 18^\circ 26' 6'', & \sigma &= 7^\circ 10' 51''; \\ a : b : c &= 8,54 : 24,02 : 25,10. \\ \varphi - 90^\circ &= 2^\circ 23' 9'', & \psi - 90^\circ &= 20^\circ 33' 22''.\end{aligned}$$

Angenähert ist:

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{1}{25}, \quad \tan(\psi - 90^\circ) = \frac{9}{25}.$$

Die Projektion steht sehr nahe der anisometrischen Projektion:

$$a : b : c = 8 : 23 : 24$$

und der monodimetrischen Projektion:

$$a : b : c = 1 : 3 : 3.$$

*Fr. Naumann*⁵⁶⁾ wählte $r = 3$, $\mathfrak{s} = 9$, so dass:

$$\begin{aligned}\varrho &= 18^\circ 26' 6'', & \sigma &= 6^\circ 22' 46''; \\ a : b : c &= 7 : 19 : 20; \\ \varphi - 90^\circ &= 2^\circ 7' 16'', & \psi - 90^\circ &= 18^\circ 26' 6''.\end{aligned}$$

Die Projektion ungleich langer schiefwinkliger Axen π_1 , π_2 , π_3 mit den Axenelementen:

$$\begin{aligned}OA : OB : OC &= a : b : c, \\ \pi_2 \pi_3 &= \alpha, \quad \pi_3 \pi_1 = \beta, \quad \pi_1 \pi_2 = \gamma\end{aligned}$$

ist nun in folgender Weise auszuführen:

Die Richtungen von OF , OG , OH in Fig. 15 seien bezeichnet mit X^* , Y^* , Z^* . π_3 falle mit Z^* zusammen und π_2 liege in der Ebene Y^*Z^* (Fig. 16). Bezeichnen wir noch den nach vorn rechts sich öffnenden Winkel der Ebenen $\pi_1 \pi_3$ und $\pi_2 \pi_3$ mit C :

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}},$$

so erhalten wir aus den rechtwinkligen Koordinaten der Punkte A , B , C :

55) *W. Haidinger*, Mem. of the Wernerian Nat. Hist. Soc. 1821—23. Frei übersetzt in Ann. Phys. Chem. 5 (1825), p. 507.

56) *Fr. Naumann*, Lehrb. d. rein. u. angew. Krystallogr. 2 (1830), p. 403.

$$\begin{aligned}
 OA_1 &= a \sin \beta \sin C, & A_1 A_3 &= -a \sin \beta \cos C, & AA_3 &= a \cdot \cos \beta, \\
 OB_1 &= b \sin \alpha, & & & BB_1 &= b \cdot \cos \alpha, \\
 & & & & OC &= c,
 \end{aligned}$$

durch Multiplikation mit den entsprechenden Verkürzungsmassstäben a, b, c die zur Konstruktion der Endpunkte A^*, B^*, C^* der Axen in der Bildebene erforderlichen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 OA_1^* &= OA_1 \cdot a, & A_1^* A_3^* &= A_1 A_3 \cdot b, & A^* A_3^* &= AA_3 \cdot c, \\
 OB_1^* &= OB_1 \cdot b, & BB_1^* &= BB_1 \cdot c, \\
 OC^* &= c \cdot c.
 \end{aligned}$$

Zuweilen ist es zur Gewinnung möglichst anschaulicher perspektivischer Zeichnungen zweckmässig, das Axensystem um andere Winkel

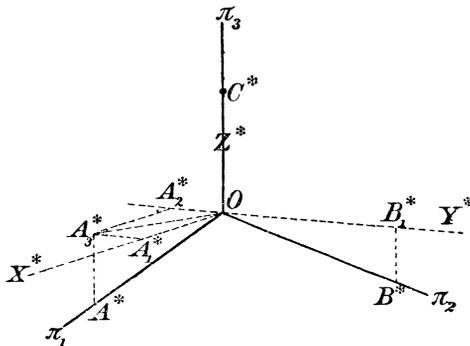


Fig. 16. Projektion ungleicher langer schiefwinkliger Axen.

gegen die Bildebene \mathfrak{B} zu drehen und ohne Vermittlung von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen *direkt* auf \mathfrak{B} zu projizieren. Eine Anleitung hierzu hat *St. Jolles* gegeben⁵⁷⁾. —

Es handelt sich nun um die *Konstruktion der Kantenrichtungen*⁵⁸⁾. Zu diesem Zwecke entwirft man in einer der Axenebenen eine perspektivische Linienprojektion des Flächenbündels, dessen Zentrum in den Endpunkt der gegenüberliegenden Axe gelegt wird. Die Verbindungsgeraden der Zonenpunkte der Linienprojektion mit dem Zentrum liefern die Gesamtheit der gesuchten Richtungen. Die Zeichnung des Kantenetzes eines Polyeders kann man an einem Eckpunkte beginnen, indem man der Reihe nach die Kanten parallel zu den entsprechenden Richtungen des Bündels aneinander fügt.

57) *St. Jolles*, Zeitschrift f. Kryst. 22 (1893), p. 1.

58) *F. H. Schröder*, Elem. d. rechn. Krystallographie 1852, p. 100.
Encyclop. d. math. Wissensch. V 1.

II. Perspektivische Krystallzeichnungen können auch aus den drei in Nr. 5 beschriebenen Projektionen abgeleitet werden. Wir setzen wieder voraus, dass die Projektionsebenen \mathfrak{E} , \mathfrak{E}' , \mathfrak{E}'' zusammenfallen. Die Bildebene \mathfrak{B} der perspektivischen Zeichnung gehe durch das Zentrum C des Bündels der Flächen, Kanten und Flächennormalen. Dann ist ihre Lage gegeben in \mathfrak{E} durch ihre Schnittgerade β , in \mathfrak{E}' durch die stereographische Projektion des Hauptkreises, in dem sie die Kugel der Polfigur schneidet. Die Zeichnung soll ausgeführt werden in den Projektionsebenen, in die wir die Bildebene durch Drehung um β umlegen. Dabei gelangt das Zentrum C nach dem Punkt \mathfrak{B}' , den wir

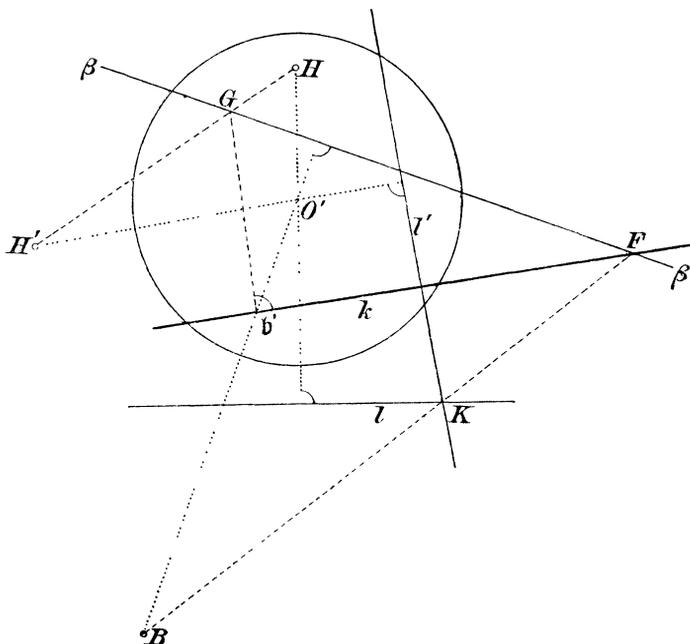


Fig. 17. Projektion der Kantenrichtungen mit Hilfe einer Linienprojektion der Flächen oder einer Punktprojektion der Flächennormalen.

erhalten, indem wir die stereographische Projektion \mathfrak{b} des Poles \mathfrak{b} von \mathfrak{B} auf die Ebene \mathfrak{E} senkrecht projizieren (vgl. Fig. 9).

a) Es sei gegeben in \mathfrak{E} die *Linienprojektion der Flächen* eines Krystallpolyeders. Wir suchen in \mathfrak{B} die Projektion k der Kantenrichtung α , in der sich die Flächen h , h' schneiden. Die Schnittgeraden dieser Flächen in \mathfrak{E} seien bezeichnet mit l , l' ; ihr Schnittpunkt K ist die Spur von α (Fig. 17). Die Gerade α des Bündels wird auf \mathfrak{B} senkrecht projiziert durch ihre Verbindungsebene mit der

h, h', g, z, d seien bezeichnet mit $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}', g, z, \mathfrak{d}$ (Fig. 18). Wird nun die Bildebene in die Projektionsebene durch Drehung um β umgelegt, so gelangen nach einem auf S. 404 angeführten Satze (vgl. Fig. 7) die Pole g, d in die Schnittpunkte g', d' der Geraden $\mathfrak{h}g, \mathfrak{b}d$ mit dem Grundkreise. Daher ist $g'd' = 90^\circ$. Folglich giebt die Senkrechte auf $g'C$ in C die Richtung der gesuchten Projektion⁶¹⁾.

24. Homogene Deformationen. Die in Nr. 11—15 angeführten Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices gelten nur unter der in Nr. 1 betonten Voraussetzung, dass die Temperatur und der äussere allseitig gleiche Druck konstant bleiben.

Erfährt ein homogener Krystall bei konstantem, allseitig gleichem Druck eine in seiner ganzen Ausdehnung gleichmässige *Aenderung der Temperatur*, durch die eine Zerstörung des krystallisierten Zustandes nicht bewirkt wird, so findet eine homogene Deformation statt, bei der die Symmetrie, der Zonenverband und die Indices der Flächen erhalten bleiben. Sie ist vollständig bestimmt, wenn das Deformationsellipsoid bekannt ist, dessen Hauptaxen nach *F. E. Neumann*⁶²⁾ *thermische Axen* genannt werden.

In den Fällen, in denen die Richtungen der thermischen Axen eine durch die Symmetrie des Krystalls bedingte permanente Lage nicht besitzen, können sie nur für eine Deformation aus einem bestimmten Anfangszustand (Temperatur Θ) in einen bestimmten Endzustand (Temperatur Θ') definiert werden; in jedem anderen Zustande, also auch während der Deformation, stehen diese Richtungen nicht aufeinander senkrecht.

*C. Neumann*⁶³⁾ hat gezeigt, wie man die Richtungen der Hauptaxen und die Werte der Hauptdilatationen berechnen kann, wenn ausser der Volumendilatation eine geeignete Anzahl von Flächenwinkeln vor und nach der Deformation gemessen sind. Da bei der thermischen Ausdehnung fester Körper die Änderungen der Koordinaten eines Punktes und der Richtungs-cosinus einer Geraden sehr klein sind, hat *C. Neumann* ihre zweiten Dimensionen vernachlässigt⁶⁴⁾. Für eine beliebig grosse homogene Deformation eines triklinen Krystalls ist die entsprechende Aufgabe von *B. Hecht*⁶⁵⁾ gelöst worden.

61) *F. Stöber*, Bull. soc. fr. min. 22 (1899), p. 42; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 16; *S. L. Penfield*, Amer. J. of Sc. 19 (1905), p. 68.

62) *F. E. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 27 (1833), p. 245.

63) *C. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 492; vgl. *J. Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 5 (1881), p. 436.

64) Vgl. *L. Fletcher*, Phil. Mag. (5) 16 (1883), p. 275.

65) *B. Hecht*, Zeitschr. f. Kryst. 11 (1886), p. 531; 14 (1888), p. 333.

Die Hauptaxen einer homogenen Deformation bilden einen besonderen Fall der *gleichwinkligen Geraden*, d. h. der doppelt unendlich vielen Tripel von Geraden, die vor und nach der Deformation dieselben Winkel miteinander einschliessen⁶⁶⁾.

Auch die durch einen *allseitig gleichen Druck* bei konstanter Temperatur erzeugte Kompression eines einheitlichen Krystalls ist im allgemeinen mit einer Änderung der Gestalt verbunden. Nur unter der Annahme, dass die Elastizitätsmoduln von der Grösse des Druckes unabhängig sind, bewahren die Hauptaxen des Deformationsellipsoids (von *F. E. Neumann*⁶⁷⁾ *Hauptdruckaxen* genannt) auch in triklinen Krystallen ihre Richtungen, wenn der Druck geändert wird.

Die durch eine gleichmässige Erwärmung hervorgerufene Deformation kann nur bei regulären Krystallen durch einen allseitig gleichen Druck kompensiert werden⁶⁸⁾.

B. Symmetrie und Struktur der Krystalle.

Von *A. Schönflies* in Königsberg.

25. Einleitende Erläuterungen, insbesondere zum kristallographischen Grundgesetz. Von den grundlegenden Eigenschaften der Krystalle sind wesentlich zwei für das Folgende von Wichtigkeit; die eine bezeichnen wir kurz als das *kristallographische Symmetriegesetz*, die andere ist das *Gesetz der rationalen Indices*, auch *kristallographisches Grundgesetz*⁶⁹⁾ genannt.

Im *Symmetriegesetz* kommt diejenige physikalische Eigenschaft der Krystallsubstanz zum Ausdruck, die sie von den amorphen Körpern unterscheidet. Während ein amorpher Körper sich längs verschiedener Richtungen im allgemeinen *physikalisch gleichartig* verhält,

66) *H. J. S. Smith*, Proc. Math. Soc. London. 2 (1869), p. 196; *L. Fletcher*, Phil. Mag. (5) 9 (1880), p. 81; 16 (1883), p. 275; *E. Blasius*, Ann. Phys. 22 (1883), p. 526; Zeitschr. f. Kryst. 11 (1885), p. 140; *L. Burmester*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23 (1878), p. 108; 47 (1902), p. 128.

67) *F. E. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 31 (1834), p. 177.

68) *Liebisch*, Physikal. Krystallogr. 1891, p. 576.

69) Die neueren Erörterungen über die Frage, worin das oberste Merkmal der Krystallsubstanz zu erblicken sei, haben zu den Problemen dieses Artikels keine nähere Beziehung und bleiben daher ausser Betracht. Vgl. darüber *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 99, 24 (1895), p. 245; *Goldschmidt*, 28 (1897), p. 1 u. 414; *Viola*, 34 (1901), p. 353; 35 (1902), p. 229; *G. Friedel*, Bull. soc. franc. de miner. 28 (1905), p. 95, sowie die Litteratur von Anm. 102.

zeigt ein Krystall nach *verschiedenen* von demselben inneren Punkt *O* ausgehenden Richtungen im allgemeinen *verschiedenes* Verhalten. Gibt es unter den von *O* ausgehenden Richtungen solche, längs deren der Krystall in jeder Hinsicht die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzt (*gleichwertige* Richtungen), so sind diese nicht etwa regellos um den Punkt *O* gelagert, bilden vielmehr stets eine mit *geometrischen Symmetrieeigenschaften* (Nr. 27) behaftete Figur⁷⁰), d. h. eine solche, die durch einfache Operationen, wie *Drehung*, *Spiegelung* u. s. w. mit sich zur Deckung gelangt (Nr. 29), und zwar mit der Massgabe, dass nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige *Symmetrieachsen* auftreten. Das gleiche gilt von der sogenannten *einfachen Krystallform*⁷¹), d. h. von den Ebenen, die auf den bezüglichen Geraden in gleichem Abstand von *O* senkrecht stehen, resp. von dem von ihnen gebildeten konvexen Polyeder.

Andere Symmetriearten, als die eben genannten, kommen in der Natur nicht vor; insbesondere wird eine fünfzählige Symmetrieaxe nie beobachtet. Das Symmetriegesetz ist daher ein *unmittelbares* Ergebniss der Erfahrung.

Unter dem *Gesetz der rationalen Indices* (oder der rationalen Doppelverhältnisse vgl. Nr. 6) versteht man bekanntlich das Folgende: Wenn man zu drei nicht in einer Ebene gelegenen Krystallkanten ein paralleles Dreikant konstruiert und als Masseinheit auf jeder der drei Axen des Dreikants eine Länge wählt, welche von einer alle drei Axen schneidenden, sonst aber beliebig ausgewählten Krystallfläche abgeschnitten wird, so schneidet jede andere Krystallfläche von jenen Axen Stücke ab, deren Verhältnisse durch rationale Zahlen gemessen werden.

Ob und inwiefern auch dieses Gesetz als eine *wirkliche Erfahrungstatsache* anzusehen ist, bedarf der näheren Erläuterung. Evident sagt es mehr aus, als durch unmittelbare Erfahrung je bestätigt werden kann. Denn die Frage, ob eine Zahl rational oder irrational sei, entzieht sich dem Genauigkeitsgrade jeder Messmethode. Es kommt hinzu, dass die Bildung der Krystalle kleinen Störungen unterworfen ist, die sich auch an den vollkommensten Krystallpolyedern durch geringe Winkel-

70) Lange Zeit wurde die geometrische Form als das wesentliche Kennzeichen der Krystallsymmetrie angesehen. Die Wichtigkeit des physikalischen Verhaltens wurde zuerst von *F. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie (1823), Vorrede, p. 3 u. 4, betont und wird seitdem allgemein anerkannt. In letzter Zeit ist man teilweise wieder zu stärkerer Berücksichtigung der morphologischen Verhältnisse zurückgekehrt. Vgl. auch die in Anm. 102 genannte Litteratur.

71) Diese soll im Folgenden kurz als „Krystallform“ bezeichnet werden.

schwankungen verraten (vgl. Nr. 20). Der gewöhnlichen Auffassung des Grundgesetzes und seiner vorwiegenden Anwendung in der praktischen Krystallographie entspricht es, wenn wir seine Aussage enger fassen, wenn wir nämlich unter den rationalen Zahlen, von denen das Gesetz spricht, die Verhältnisse *kleiner* ganzer Zahlen verstehen. In der Tat bewegen sich die ganzen Zahlen, welche bei den Indices der zumeist vorkommenden und am besten ausgebildeten Krystallflächen auftreten, in sehr engen Grenzen; sie überschreiten im allgemeinen nicht die Grösse 10. Wir hätten daraufhin nicht von dem „Gesetz der rationalen Indices“ schlechtweg, sondern von einem „Gesetze der durch kleine ganze Zahlen ausdrückbaren rationalen Indices“ zu sprechen. In dieser engeren Fassung würde das Gesetz offenbar direkt durch die Erfahrung bestätigt und zwar (mit Rücksicht auf die schon genannten Störungen beim Bildungsprozess der Krystalle) als angenähert gültig erwiesen werden können — wenn es in dieser Fassung überhaupt allgemein zutreffend wäre. Letzteres ist indessen nicht der Fall. Es kommen nämlich, wenn auch gewissermassen als Ausnahmen, Flächen vor (z. B. die sog. Vicinalflächen), deren Indices weit über die vorhergenannten Grenzen hinausgehen. Hieraus geht hervor, dass sich die Grösse der bei den Indices auftretenden ganzen Zahlen nicht allgemein gültig einschränken lässt.

Es bleibt also nichts anderes übrig, als an der ursprünglichen Fassung, nämlich der blossen Aussage von der Rationalität der Indices, festzuhalten. Damit verzichtet man aber zugleich auf die Möglichkeit einer *direkten* Bestätigung durch die Erfahrung, und muss sich, wie bei vielen andern physikalischen Gesetzen, mit einem *indirekten* Beweis begnügen, d. h. mit der *empirischen* Bestätigung der aus der Rationalität der Indices fließenden *theoretischen Folgerungen*. Unter allen diesen ist keine umfassender und prinzipieller als diejenige, die die Symmetrie der Krystalle betrifft. Hier aber werden die aus dem Gesetz der rationalen Indices fließenden Folgerungen durch die Beobachtung vollinhaltlich bestätigt. Das Gesetz der rationalen Indices schliesst nämlich ebenfalls das Auftreten von anderen als 2-, 3-, 4- oder 6-zähligen Symmetrieachsen absolut aus. Z. B. ist die 5-zählige Symmetrieachse mit diesem Gesetz unverträglich, weil sie Flächen mit irrationalen Axenabschnitts-Verhältnissen zur Folge haben würde. Indem man alle mit dem Gesetz der rationalen Indices verträglichen Symmetrieklassen aufstellt, gewinnt man ein vollständiges Einteilungsprinzip, dem sich die wirklich vorkommenden Krystalle unterordnen (vgl. Nr. 31).

In dieser Übereinstimmung dürfen wir einen vom naturwissen-

schaftlichen Standpunkte aus höchst befriedigenden Beweis des Gesetzes der rationalen Indices erblicken⁷²⁾.

Eine letzte wichtige Eigenschaft der Krystallsubstanz, die hier in Frage kommt, die sie allerdings mit jeder homogenen Substanz teilt, ist die *physikalische Gleichwertigkeit aller parallelen Richtungen*. Diese muss sich als Folge einer jeden molekularen Strukturtheorie ergeben.

26. Formulierung der mathematischen Probleme. Aus dem vorstehend geschilderten Sachverhalte entspringen zwei Aufgaben.

Die eine knüpft an die Thatsache an, dass die Symmetrieeigenschaften, die einem Krystall, wie überhaupt einem *Polyeder*, insbesondere einem *konvexen Polyeder* zukommen können, *sich gegenseitig bedingen*; ihre Art und Zahl ist durch *mathematische Gesetze* bestimmt, und es resultiert daher die Aufgabe, alle *theoretisch möglichen Verbindungen* von Symmetrieeigenschaften aufzustellen. Die Lösung dieser Aufgabe schliesst die Aufzählung und Ableitung aller Krystallsysteme und ihrer Unterabteilungen in sich ein (Nr. 31). Der erste, der in dieser Aufgabe ein geometrisches Problem erkannte und seine vollständige Lösung gegeben hat, war *C. Hessel*⁷³⁾.

Das zweite Problem knüpft an die Forderung an, eine *Hypothese* über die *molekulare Struktur* der Krystalle aufzustellen, aus der sich die obengenannten Grundgesetze als *notwendige Konsequenzen* ableiten lassen. Alle Strukturtheorien gehen davon aus, eine *regelmässige Anordnung der Krystallmolekeln* anzunehmen. Die mathematische Formulierung dieser Hypothese operiert mit einer sich nach allen

72) Es verdient bemerkt zu werden, dass das Symmetriegesetz und das Gesetz der rationalen Indices, wenn sie auch in der oben genannten Beziehung zu einander stehen, doch nicht aus einander gefolgert werden können. Einerseits kann aus dem Gesetz der rationalen Indices nicht entnommen werden, dass die Lage der *N* mit einander gleichwertigen Richtungen eines Krystalles gerade eine solche sein muss, dass sie, wie oben erwähnt, stets eine mit Symmetrie behaftete Figur bildet. Ebensowenig ist das Umgekehrte der Fall, und zwar deshalb, weil sich das Symmetriegesetz nur auf solche Flächen eines Krystalles bezieht, die durch das Symmetriegesetz mit einander verbunden sind, also als mögliche Flächen einer und derselben einfachen Krystallform auftreten können. Über die gegenseitige Beziehung der Indices solcher Krystallflächen, die verschiedenen einfachen Krystallformen angehören, kann es daher nichts aussagen.

73) Vgl. den Artikel über Krystallographie in *Gehler's* physikalischem Wörterbuch, p. 1062 ff. Eine zweite Darstellung giebt die Marburger Universitätsschrift: Über gewisse merkwürdige statische und mechanische Eigenschaften der Raumbilde (1862). Vgl. auch *L. Sohncke*, Die Entdeckung des Einteilungsprinzips der Krystalle durch *J. F. C. Hessel*, Zeitschr. f. Kryst. 18 (1891), p. 486.

Richtungen unbegrenzt ausdehnenden Krystallmasse, ersetzt die Krystallmolekeln zunächst durch Punkte (z. B. die Schwerpunkte) und gelangt so dazu, in dem unbegrenzten *regelmässigen Punktsystem* die charakteristische Struktur der Krystallsubstanz zu erblicken. Die erste Strukturtheorie dieser Art hat *A. Bravais*⁷⁴⁾ aufgestellt. Seine grundlegende Vorstellung wurde später durch *Ch. Wiener*⁷⁵⁾ und *L. Sohncke*⁷⁶⁾ verallgemeinert, in neuester Zeit endlich durch die Arbeiten von *E. v. Fedorow*⁷⁷⁾ und unabhängig von ihm durch *A. Schoenflies*⁷⁸⁾, im Anschluss an einen von *F. Klein* ausgesprochenen Gedanken⁷⁹⁾.

Die Vorstellung, dass um alle Krystallmolekeln herum die Krystallmasse in gleicher Weise gelagert ist, kann kaum durch eine einfachere ersetzt werden. Andererseits kann eine molekulare Theorie, mit *H. Hertz* zu reden, immer nur ein *Bild* der Naturvorgänge geben. Inwieweit das Bild den wirklichen Bau der Stoffe und die Wirkungsweise der Kräfte widerspiegelt, ist in allen Fällen eine offene Frage. Auch wird ein solches Bild im allgemeinen einfachere Annahmen machen, als es der Natur der Dinge entspricht. Andererseits besteht wieder in der Einfachheit des Bildes sein methodischer Vorzug, und die in ihm enthaltene Hypothese wird um so wertvoller sein, je leichter sie die Hauptgesetze des bezüglichen Gebietes abzuleiten gestattet. In dieser Hinsicht lässt die Strukturtheorie nichts zu wünschen übrig; denn sowohl die Symmetriegesetze und die Gleichwertigkeit paralleler Richtungen, wie auch das Gesetz der rationalen Indices sind *unmittelbare* und *prinzipielle Folgerungen der Strukturhypothesen* (Nr. 38); auch die übliche Systematik der Krystalle (Nr. 28) findet durch sie ihre Begründung. Was allerdings die *speziellen* gestaltlichen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle betrifft, so sind bisher nur wenige zu nennen, die aus den Strukturhypothesen ihre Erklärung gefunden haben oder für die eine solche versucht wurde — allerdings ist auch kaum eine Erscheinung bekannt, die gegen sie spräche⁸⁰⁾ (vgl. Nr. 49 ff.).

74) Mémoire sur les systèmes formés etc. und Études crystallographiques.

75) Grundzüge der Weltordnung, 2. Ausgabe (1869), p. 82 ff.

76) Vgl. besonders Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur, Leipzig 1879, in der sich auch eine eingehende historische Darstellung findet.

77) Gestaltenlehre, Petersburg 1885, und Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, ebenda 1890. Für die weitere Litteratur vgl. Anm. 151.

78) Krystallssysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891, und die vorher erschienenen Arbeiten in Math. Ann. 28 (1887), p. 319; 29 (1887), p. 50; 34 (1889), p. 172.

79) Vgl. auch *W. Barlow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 1 u. 25; (1896), p. 86.

80) Als merkliche Abweichungen sind möglicherweise die von *Beckenkamp*

In jedem Falle wird man die Vorstellung eines regelmässigen Aufbaues der Krystallmolekeln als eine erste Annäherung an die wirklichen Zustände der krystallinischen Substanz ansehen dürfen, ähnlich wie die Mechanik der sogenannten starren Körper eine erste Annäherung für das wirkliche Verhalten der in der Natur vorkommenden festen Körper liefert⁸¹⁾.

I. Die Symmetriegesetze und die 32 Symmetriegruppen.

27. Die Symmetrieeigenschaften und ihre Gesetze. Die Gesamtheit derjenigen N Richtungen, längs deren sich ein Krystall in jeder Hinsicht, also auch in seinen *sämtlichen* physikalischen Eigenschaften gleichartig verhält (vgl. Nr. 34), bezeichnen wir kurz als Figur F . Die Figur F solcher N gleichwertigen Richtungen ist, wie wir bereits oben (Nr. 25) erwähnten, identisch mit den N Loten, die man vom Mittelpunkt der *allgemeinen einfachen Krystallform* auf deren Seitenflächen fallen kann.

Für die in Nr. 25 erwähnten geometrischen *Symmetrieeigenschaften* der Figur F giebt es *vier einfachste Typen*; sie entsprechen der Art und Weise, auf die man die Figur F mit sich zur Deckung bringen kann⁸²⁾. Dies kann so geschehen, dass man 1) sie um eine durch O gehende Axe a dreht — a heisst *Symmetrieaxe*, genauer *Symmetrieaxe erster Art*⁸³⁾ —, 2) dass man sie gegen eine durch O gehende Ebene σ spiegelt — *Symmetrieebene* —, 3) dass man jede Richtung durch die entgegengesetzte ersetzt — O heisst *Symmetriezentrum*⁸⁴⁾ —, 4) dass man sie um eine durch O gehende Axe a dreht und ausserdem gegen eine zu dieser Axe senkrechte Ebene spiegelt — a heisst *Symmetrie-*

und anderen beobachteten anomalen Ätzfiguren zu betrachten. Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 14 (1888), p. 375 u. ff.

81) Damit erledigen sich die Ausführungen von *Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 29 (1898), p. 38; *Beckenkamp*, 32 (1900), p. 45; *Viola*, 34 (1901), p. 388. Vgl. auch die dynamischen Vorstellungen von Lord *Kelvin* in Nr. 33.

82) D. h. jede Richtung kommt in eine Lage, in der sich ursprünglich ebenfalls eine der N Richtungen befand.

83) Solche Axen sollen im Folgenden meist als *Symmetrieaxen* schlechthin bezeichnet werden. Die Axen werden als *einseitig* oder *zweiseitig* unterschieden, je nachdem ihre beiden entgegengesetzten Richtungen gleichwertig sind oder nicht. Im letzten Fall heissen sie auch *polar*.

84) *v. Fedorow* sagt „*Inversionszentrum*“ und versteht unter einem *Symmetriezentrum* den Schnittpunkt der *Symmetrieelemente* (Axen, Ebenen), Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 28.

*axe zweiter Art*⁸⁵). Eine Symmetrieaxe erster oder zweiter Art heisst *n-zählig*, wenn der kleinste Drehungswinkel, der die Deckung von *F* mit sich herbeiführt, der *n*te Teil von 2π ist.

Besitzt die Figur *F* eine Symmetrieaxe erster Art, so ist sie mit sich selbst auf mehrfache Art *kongruent*; besitzt sie eine der drei anderen Symmetrieeigenschaften, so ist sie sich selbst *spiegelbildlich gleich*⁸⁶).

Die Symmetrieeigenschaften, die ein Krystall resp. seine Figur *F* besitzen kann, sind, wie in Nr. 26 erwähnt, nicht unabhängig voneinander. Die kristallographisch wichtigsten Gesetze, die hier bestehen, sind folgende⁸⁷): 1) Die Schnittlinie von zwei Symmetrieebenen ist eine Symmetrieaxe; der zugehörige Winkel ist das Doppelte desjenigen, den die beiden Ebenen einschliessen. Insbesondere ist die Schnittlinie von zwei senkrechten Symmetrieebenen eine zweizählige Axe. 2) Besitzt umgekehrt ein Krystall eine *n-zählige* Axe und eine durch sie gehende Symmetrieebene, so besitzt er *n* solcher Ebenen, die gleiche Winkel miteinander einschliessen. 3) Von den drei Eigenschaften: Symmetrieebene, Symmetriezentrum und zweizählige Symmetrieaxe bedingen je zwei die dritte, wenn Axe und Ebene senkrecht aufeinander stehen. 4) Eine *n-zählige* Symmetrieaxe zweiter Art ist zugleich Symmetrieaxe erster Art und zwar vom doppelten Winkel. 5) Enthält ein Krystall mehrere Symmetrieaxen, die mehr als zweizählig sind, so müssen seine Symmetrieaxen mit denjenigen eines der bekannten regelmässigen *Euler'schen* Polyeder identisch sein.

28. Historische Entstehung der Krystalsysteme. Die Einteilung der Krystalle in Systeme ist ursprünglich unter wesentlicher Anlehnung an die äusseren Formen der Krystallindividuen erfolgt⁸⁸). Man pflegte solche Krystalle zu einem System zusammenzufassen, deren Flächen sich mit rationalen Indices auf gleichartige Koordinatensysteme beziehen lassen (Nr. 8). Als Koordinatenebenen und Koordinatenachsen benutzte man einerseits die *Symmetrieebenen*, die sich anschaulich am unmittelbarsten darboten, andererseits solche Richtungen (*Axen*),

85) Auch *axe de symétrie alterne* [*Curie*, Bull. de la soc. min. 7 (1884), p. 450]. *v. Fedorow* spricht von „zusammengesetzter Symmetrie“: Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 28.

86) Solche Auffassungen des Symmetriebegriffes, die von dem obigen verschieden sind [vgl. z. B. *Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 32 (1900), p. 45 u. 48; 33 (1900), p. 613], müssen hier unberücksichtigt bleiben. Vgl. auch Anm. 124.

87) Für den Beweis vgl. Nr. 29.

88) Die Arbeiten von *Hessel*, *Gadolin* u. s. w. (s. Litteraturübersicht p. 394 u. 395) kamen erst in neuester Zeit zur Geltung.

die auf Symmetrieebenen senkrecht stehen, oder sonst im Krystall ausgezeichnet sind, die aber nicht in allen Fällen Symmetrieachsen waren. Erst in neuerer Zeit ist die Benutzung von Symmetrieachsen, sowie überhaupt die Charakterisierung der Krystalle durch ihre Symmetrie, allgemeiner geworden. Demgemäss pflegen die Krystallographen die Krystalle folgendermassen in Systeme zu teilen:

- 1) *Reguläre (kubische, tesserale)* Krystalle; vier dreizählige Axen.
- 2) *Hexagonale* Krystalle; eine dreizählige oder sechszählige Axe.
- 3) *Tetragonale* Krystalle; eine vierzählige Axe.
- 4) *Rhombische* Krystalle; drei zueinander senkrechte ungleiche Axen.
- 5) *Monokline* Krystalle; eine ausgezeichnete Axe.
- 6) *Triklone* Krystalle; keine ausgezeichnete Richtung.

Im hexagonalen System werden die Krystalle mit dreizähliger Axe vielfach auch als *rhomboedrisches Krystallsystem* oder doch als *rhomboedrische Unterabteilung* des hexagonalen Systems bezeichnet.

Was die *Symmetrie* dieser Systeme betrifft, so ist die des rhombischen und monoklinen Systems nicht mehr einheitlich bestimmt. Die drei Axen des rhombischen Systems sind nicht für alle Krystalle zugleich zweizählige Symmetrieachsen, ebenso ist im monoklinen System nicht bei allen Krystallen eine zweizählige Symmetrieaxe vorhanden. (Vgl. Nr. 32.)

Die vorstehende Einteilung in sechs resp. sieben Systeme findet übrigens in den Strukturtheorien eine wesentliche Stütze (Nr. 36).

29. Die Deckoperationen und ihre Zusammensetzung. Die *mathematische* Theorie fasst, zumal mit Rücksicht auf die Strukturtheorien, ausser den Symmetrieeigenschaften auch die *Deckoperationen* ins Auge, in denen die Symmetrieeigenschaften gemäss dem Vorstehenden ihren Ausdruck finden. Der Symmetrieaxe entspricht eine *Drehung*; wir bezeichnen sie, falls sie um die Axe a stattfindet, durch $\mathfrak{A}(\alpha)$, wo α der Drehungswinkel ist; falls die Axe n -zählig ist, durch $\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$; ist insbesondere $n = 2$, also π der Drehungswinkel, so bezeichnen wir die Drehung auch als *Umwendung* \mathfrak{U} . Die drei anderen bezüglichen Deckoperationen heissen *Spiegelung*, *Inversion* und *Drehspiegelung*⁸⁹⁾, wir bezeichnen sie durch \mathfrak{S} , \mathfrak{I} und $\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, wenn a

89) Vgl. A. Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstruktur, p. 29. Für $n = 2$ ist die Drehspiegelung mit der Inversion identisch. Eine zweizählige Axe zweiter Art ist daher einem Symmetriecentrum äquivalent.

Statt der Drehspiegelung kann auch eine Drehung in Verbindung mit einer Inversion benutzt werden; vgl. Minnigerode, Neues Jahrb. f. Min. Beilagebd. 5 (1887), p. 145, u. 1894, 1, p. 92.

wieder eine n -zählige Axe ist. Sie heissen auch Deckoperationen *zweiter Art*, während man die Drehung auch *Deckbewegung* oder Deckoperation *erster Art* nennt.

Theoretisch ist es wichtig, auch diejenigen Deckoperationen zu betrachten, bei denen jede Richtung von F mit sich selbst zur Deckung gelangt. Man bezeichnet sie als *Identität* und hat dafür das Zeichen 1 eingeführt; es deutet an, dass diese Deckungsart auch so herstellbar ist, dass F in Ruhe bleibt.

Die zur Figur F zugehörige einfache Krystallform kann man in N Teilfiguren zerlegen, die bei jeder Deckoperation ineinander übergeführt werden. Sind alle Deckoperationen Drehungen, so sind alle Teilfiguren kongruent, im andern Fall sind sie theils kongruent, theils spiegelbildlich gleich.

Seien nun \mathfrak{L} und \mathfrak{M} irgend zwei Deckoperationen der Figur F . Wird dann auf F zunächst die Operation \mathfrak{L} und dann die Operation \mathfrak{M} angewandt, so wird F in der Endlage ebenfalls mit sich zur Deckung gelangt sein. Wir haben damit eine *neue* Deckoperation \mathfrak{N} von F definiert, die in der Aufeinanderfolge resp. in der Verbindung von \mathfrak{L} und \mathfrak{M} besteht, die man *Produkt* von \mathfrak{L} und \mathfrak{M} nennt und durch $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ bezeichnet⁹⁰). Diese Definition soll auch in dem Fall gelten, dass \mathfrak{L} und \mathfrak{M} die gleiche Deckoperation bedeuten; alsdann bezeichnet man $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^3$ u. s. w. und nennt $\mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}^3, \dots$ *Potenzen* von \mathfrak{L} .⁹¹)

Für die durch \mathfrak{L} und \mathfrak{M} bestimmte Operation \mathfrak{N} bestehen in den einfachsten Fällen folgende Sätze, die sich unmittelbar ergeben, wenn man eine von O ausgehende Gerade nacheinander den bezüglichen Operationen unterwirft und die Endlage mit der Anfangslage vergleicht.

1) Sind \mathfrak{S} und \mathfrak{S}_1 zwei Spiegelungen an den Ebenen σ und σ_1 , ist a ihre Schnittlinie und $\sphericalangle(\sigma\sigma_1) = \alpha$, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}(2\alpha)$. 2) Ist die Ebene σ senkrecht zur Axe u , so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$. 3) Ist a eine Symmetrieaxe zweiter Art und σ die zu ihr senkrechte Ebene, so ist gemäss der Definition $\mathfrak{U}(\alpha) = \mathfrak{U}(\alpha)\mathfrak{S}$; auch ist $\mathfrak{U}^2(\alpha) = \mathfrak{U}(2\alpha)$.

Diese Sätze bilden zugleich die Quelle derjenigen Gesetze, die wir oben (Nr. 27) für die Symmetrieeigenschaften ausgesprochen haben.

90) Die Operationen, die durch $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ dargestellt werden, sind im allgemeinen verschieden.

91) Ist \mathfrak{L} eine Drehung, so stellen also \mathfrak{L}^2 und \mathfrak{L}^3 eine Drehung um den doppelten und dreifachen Winkel dar.

Ferner bestehen folgende Sätze allgemeiner Art, die unmittelbar evident sind: 1) Das Produkt von zwei Operationen erster Art oder zwei Operationen zweiter Art ist eine Operation erster Art. 2) Das Produkt aus einer Operation erster Art und einer Operation zweiter Art ist eine Operation zweiter Art.

Endlich erwähne ich noch folgendes:

Für jede Deckoperation giebt es eine endliche Zahl von Wiederholungen, die die Figur F in ihre Anfangslage zurückführt; anders ausgedrückt, es existiert für jede Deckoperation eine gewisse *Potenz*, die die *Identität* liefert. Insbesondere ist:

$$(1) \quad \mathfrak{C}^2 = 1, \quad \mathfrak{S}^2 = 1, \quad \mathfrak{U}^2 = 1.$$

Ist ferner a eine n -zählige Axe, so hat man um a die Drehungen

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^2, \quad \dots, \quad \mathfrak{A}^{n-1}, \quad \mathfrak{A}^n = 1,$$

und wenn a eine $2n$ -zählige Axe zweiter Art ist, so hat man die Drehspiegelungen

$$\bar{\mathfrak{A}}, \quad \bar{\mathfrak{A}}^3, \quad \dots, \quad \bar{\mathfrak{A}}^{2n-1}$$

und die Drehungen

$$\bar{\mathfrak{A}}^2, \quad \bar{\mathfrak{A}}^4, \quad \dots, \quad \bar{\mathfrak{A}}^{2n-2}, \quad \bar{\mathfrak{A}}^{2n} = 1.$$

30. Der Gruppenbegriff. Bezeichnet man durch

$$(2) \quad \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}, \quad \dots$$

die *sämtlichen* voneinander verschiedenen Deckoperationen einer Figur F , so muss die Deckoperation, die durch das Produkt aus zweien oder mehreren von ihnen dargestellt wird, ebenfalls in der Reihe (2) auftreten. Die Reihe enthält also auch jede Potenz der Operationen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \dots$ und daher auch (Nr. 29) die Identität. Dies ist diejenige Eigenschaft, die man als *Gruppeneigenschaft* bezeichnet; man sagt, dass die obigen Operationen eine *Gruppe* G bilden⁹²⁾. Geht man zu den Symmetrieeigenschaften zurück, so heisst dies, dass jede Symmetrieeigenschaft in der Reihe auftritt, die durch irgend zwei von ihnen gemäss Nr. 27 bedingt wird.

Für die Beziehung der Figur F resp. der allgemeinen Krystallform zu der vorstehenden Gruppe gilt der Satz: Wird irgend eine durch den Mittelpunkt der Krystallform gehende Richtung den N Operationen der Gruppe unterworfen, so entstehen stets N gleichwertige Richtungen; analog entstehen sämtliche Flächen der Krystallform, wenn eine von ihnen allen Operationen der Gruppe unterworfen wird. Das Gleiche gilt für die N Teile, in die man die Krystallform gemäss Nr. 29 zerlegen kann.

92) Näheres findet man in Bd. I 1 6 dieser Encyklopädie.

Hat die durch die Reihe (2) definierte Gruppe G die Eigenschaft, dass ein Teil ihrer Operationen gleichfalls die Gruppeneigenschaft besitzt, so bilden diese eine *Untergruppe* von G . Die Zahl dieser Operationen ist stets ein genauer Teiler von N . Eine Untergruppe von G bilden gemäss Nr. 29 insbesondere die in der Reihe (2) enthaltenen Bewegungen.

31. Mathematische Ableitung aller Symmetriegruppen⁹³. Die Aufgabe, alle möglichen Krystallklassen abzuleiten, ist gemäss dem Vorigen in der *allgemeineren* Aufgabe enthalten, *alle überhaupt möglichen* Gruppen von Deckoperationen einer Figur F abzuleiten. Diese sollen *Symmetriegruppen* oder *Punktgruppen* heissen; aus ihnen werden wir die krystallographischen dadurch ausscheiden, dass in ihnen nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Axen auftreten dürfen (Nr. 25). Man scheidet sie in Gruppen *erster Art* und Gruppen *zweiter Art*, je nachdem in ihnen nur Deckoperationen erster Art oder auch solche zweiter Art vorkommen.

Die Gruppen *erster Art* kann man so ableiten, dass man nach allen möglichen Verbindungen von Symmetrieaxen fragt, die ein *Polyeder* gemäss den Sätzen von Nr. 27 besitzen kann⁹⁴). Es ergeben sich die folgenden:

93) Die Ableitung aller Symmetriegruppen resp. nur derjenigen, die krystallographische Bedeutung haben, ist von den verschiedensten Seiten nach den verschiedensten Methoden ausgeführt worden; sowohl von Krystallographen, wie von Mathematikern. Ausser *Hessel* (Anm. 3) ist zu erwähnen: *Bravais*, Journ. de math. Paris 14 (1849), p. 141 und Études cristallographiques, Journ. de l'éc. polyt. Heft 34 (1851), p. 229. In der ersten Arbeit zählt *Bravais* nur 31 Arten auf; die fehlende Art wird aber in der zweiten Arbeit p. 275 nebst Anm. doch erwähnt; vgl. Anm. 31. Ausserdem vgl. *Gadolin*, Acta soc. Fenn. Helsingfors 9 (1871), p. 1; *v. Fedorow*, Verhandl. d. russ. min. Ges. 20 (1884), p. 334; *P. Curie*, Bull. de la soc. min. de France 7 (1884), p. 89 u. 418; *H. Minnigerode*, Neues Jahrb. f. Min. Beilageband 5 (1887), p. 145; *F. Becke*, Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 73; *Viola*, N. Jahrb. f. Min. Beilageband 10 (1896), p. 167 und 497, wo die Ableitung mit Hilfe der Quaternionen geschieht; *V. v. Lang*, Wiener Berichte 105^{2a} (1896), p. 362; vgl. auch dessen Krystallographie 1866; *K. Rohn*, Abh. d. naturw. Ges. Isis, Dresden 1896, p. 72; *Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 27 (1897), p. 1; *v. Fedorow*, 28 (1897), p. 468; *G. Wulf*, Annuaire géol. et minéral. de la Russie, 2 (1897); *A. Schmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 33 (1900), p. 620; *V. de Souza Brandão*, Neues Jahrb. f. Min. 1901, 2, p. 37; *G. Tschermak*, 39 (1904), p. 433. Vgl. auch Anm. 140.

H. Schoute giebt eine Ableitung aller Unterabteilungen des regulären Systems für den vierdimensionalen Raum: Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences, Bordeaux 1895.

94) Geht man von anderen Symmetrieaxen aus, als solchen, die ein Polyeder haben kann, so folgen daraus notwendig *unendlich viele* andere Axen, die

1) Die *zyklische Gruppe*. Sie entspricht einer Figur F , die nur *eine einzige* n -zählige Symmetrieaxe besitzt. Die Gruppe, die durch C_n bezeichnet werde, besteht aus den Potenzen derselben Operation

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \text{ und enthält die Operationen} \\ (3) \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}, \mathfrak{A}^n = 1.$$

Die Gruppe existiert für jedes n .⁹⁵⁾

2) Die *Diedergruppe*, ebenfalls für jedes n existierend. Die Figur F besitzt *eine* n -zählige Symmetrieaxe a (*Hauptaxe*) und n zu ihr senkrechte zweizählige Axen u_1, u_2, \dots, u_n (*Nebenaxen*)⁹⁶⁾; die Axen sind also identisch mit den sämtlichen Symmetrieaxen einer *Doppelpyramide*. Die Gruppe, die wir mit D_n bezeichnen, enthält die $2n$ Operationen

$$(4) \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}, \mathfrak{A}^n = 1, \\ u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n.$$

3) Die *Gruppen der regelmässigen Körper*, deren Symmetrie mit derjenigen der regelmässigen Körper identisch ist. Solcher giebt es drei: die *Tetraedergruppe* T , die dem Tetraeder entspricht und vier dreizählige und drei zweizählige Axen enthält; die *Oktaedergruppe* O , die dem Oktaeder und Würfel entspricht und drei vierzählige, vier dreizählige und sechs zweizählige Axen enthält; endlich die *Ikosaedergruppe* J , die dem Ikosaeder und Dodekaeder entspricht und deren Symmetrieaxen besitzt. Sie hat jedoch keine krystallographische Bedeutung⁹⁷⁾.

Für *Gruppen zweiter Art* sind zunächst folgende allgemeine Sätze zu erwähnen: 1) In jeder Gruppe zweiter Art giebt es gleich viele Deckoperationen erster wie zweiter Art. 2) Die Deckoperationen zweiter Art kann man erhalten, indem man die Deckoperationen erster Art mit einer und derselben, übrigens beliebigen Operation zweiter Art multipliziert. 3) Jede Gruppe zweiter Art entsteht, indem man zu einer Gruppe erster Art noch eine geeignete Symmetrieeigenschaft zweiter Art hinzufügt; sie muss der Bedingung genügen, dass die zugehörige Operation zweiter Art die Axen der Gruppe in

entweder der Symmetrie eines Kegels oder der einer Kugel entsprechen. Vgl. Anm. 105.

95) Für $n = 1$ besteht die Gruppe nur aus der Identität, was mit einer einzähligen Axe identisch ist (Nr. 29).

96) Für $n = 2$ wird die Gruppe als *Vierergruppe* bezeichnet. Sie enthält drei zweizählige, zueinander senkrechte Axen. Wegen der Bezeichnungen vgl. *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884.

97) Für ihre mathematischen Eigenschaften vgl. das Citat in Anm. 96.

sich überführt. In dieser Weise sind alle Gruppen zweiter Art aus den Gruppen erster Art ableitbar⁹⁸). Man erhält folgende Typen:

1) Solche, die aus den Gruppen erster Art durch Hinzufügung eines Symmetriezentrums oder einer Symmetrieebene entstehen; und zwar muss die Symmetrieebene zugleich Symmetrieebene für die Axen der bezüglichen Gruppe erster Art sein. So entstehen aus C_n die Gruppen C_n^h mit n -zähliger Axe und horizontaler, zur Axe senkrechter Symmetrieebene⁹⁹), die Gruppen C_n^v mit n vertikalen, durch die Axe gehenden Symmetrieebenen, und für *ungerades* n die Gruppen C_n^i mit n -zähliger Axe und einem Symmetriezentrum¹⁰⁰). Aus D_n entstehen die Gruppen D_n^h mit einer horizontalen Symmetrieebene und n vertikalen, die durch die Nebenaxen gehen, und die Gruppen D_n^d mit n vertikalen Symmetrieebenen, die die Winkel der n Nebenaxen halbieren. Aus T entstehen zwei Gruppen T^h und T^d ; die erste besitzt drei Symmetrieebenen, deren jede zwei zweizählige Axen verbindet, die zweite besitzt sechs Symmetrieebenen, die durch je zwei dreizählige Axen gehen. Endlich entsteht aus O eine Gruppe O^h , der sämtliche eben genannten Symmetrieebenen zukommen; eine analoge Gruppe entsteht aus J .

2) Solche, die eine *einzig*e Symmetrieaxe zweiter Art enthalten. Sie entstehen, indem man die n -zählige Axe einer zyklischen oder Diedergruppe in eine $2n$ -zählige Axe *zweiter Art* verwandelt. Sie existieren nur für *gerades* n und sollen durch S_{2n} resp. S_{2n}^u bezeichnet werden. Die so definierten Gruppen S_{2n}^u sind aber mit den Gruppen D_n^d identisch. Die Gruppen S_{2n} sind für *ungerades* n mit C_n^i identisch; neue Gruppen ergeben sich also nur für *gerades* n .¹⁰¹)

Ein Symmetriezentrum enthalten die Gruppen $C_n^i = S_{2n}$ für *ungerades* n , die Gruppen C_n^h und D_n^h für *gerades* n , die Gruppen $D_n^d = S_{2n}^u$ für *ungerades* n und die Gruppen T^h und O^h . In allen diesen Gruppen sind wegen des Symmetriezentrums beide Richtungen einer jeden Axe gleichwertig⁸⁸).

32. Gruppentheoretische Systematik der Krystalle. Mit Rücksicht auf das Gesetz der rationalen Indices können von den vorstehenden Symmetriegruppen nur solche die Symmetrie eines wirk-

98) Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. Daher ergeben sich manche Gruppen zweiter Art im Folgenden mehrfach.

99) Die n -zählige Axe von C_n und D_n denke man sich vertikal.

100) Für *gerades* n ist C_n^i mit C_n^h identisch; vgl. Anm. 98.

101) Die Gruppen S_{2n} für *gerades* n sind diejenigen, die bei *Bravais* fehlen. Dies liegt daran, dass er meinte, mit den damals bekannten Symmetrieeigenschaften (Punkt, Axe, Ebene der Symmetrie) auszukommen. Vgl. Anm. 93.

lichen Krystalles darstellen, in denen 2-, 3-, 4- und 6-zählige Axen auftreten. Die Zahl der so definierten möglichen Krystallklassen ist 32.

Die Krystallklassen lassen sich auch in der Weise in *Systeme* einteilen, dass man diejenigen zusammenfasst, die in gewissen Symmetrieaxen übereinstimmen. Gegenüber der historisch und praktisch entstandenen Einteilung, die sich übrigens auch an der Hand der Gittertheorien einstellt (Nr. 36), ist diese Systematik insofern eine einheitliche, als sie nach einem einzigen Prinzip erfolgt. Doch ist zu bemerken, dass keine Systematik etwas absolut zwingendes besitzt, da die Art, wie man Krystalle verschiedener Symmetrie zu einer Gesamtklasse vereinigen will, teilweise subjektivem Ermessen unterliegt. Die Einteilung in Systeme ist daher auch nicht überall die gleiche¹⁰²⁾.

Von dem eben genannten Standpunkt aus kommt man zu folgenden *sechs* einheitlich definierten Systemen:

1) *Reguläres System*; die Symmetrie ist durch die Axen der Tetraeder- und Oktaedergruppe charakterisiert. Ihm gehören die Gruppen O^h , O , T^h , T^d und T an.

2) *Hexagonales System*, durch eine sechszählige Hauptaxe charakterisiert; zu ihm gehören die Gruppen D_6^h , D_6 , C_6^h , C_6^v , C_6 , S_6^u , S_6 .

3) *Tetragonales System*, mit vierzähliger Hauptaxe und den Gruppen D_4^h , D_4 , C_4^h , C_4^v , C_4 , S_4^u , S_4 .

4) *Trigonales System*, mit dreizähliger Hauptaxe und den Gruppen D_3^h , D_3 , C_3^h , C_3^v , C_3 .

5) *Digonales System*, mit nur zweizähligen Axen und den Gruppen D_2^h , D_2 , C_2^h , C_2^v , C_2 , S_2 ¹⁰³⁾.

6) *Monogonales System*, ohne jede Axe, mit den Gruppen C_1^h und C_1 , wo C_1^h nur eine Symmetrieebene enthält und C_1 eine Gruppe ohne jede Symmetrie ist (die also nur die Identität enthält)⁹⁵⁾.

Der Unterschied zwischen der vorstehenden Einteilung und der historischen ist folgender:

Von den Gruppen des vorstehenden hexagonalen und trigonalen Systems pflegt man die Gruppen D_6^h , D_6 , C_6^h , C_6^v , C_6 , D_3^h , D_3 dem

102) Von neueren Arbeiten über Abgrenzung und Definition der Krystall-systeme, bei denen übrigens die Symmetrie nicht mehr den alleinigen Einteilungsgrund abgibt, und für eine damit zusammenhängende Bevorzugung des Syngoniebegriffs vgl. *Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 107; 24 (1895), p. 605; 28 (1897), p. 36; 29 (1898), p. 654; *Goldschmidt*, 31 (1899), p. 135; 32 (1900), p. 49; *de Souza Brandão*, Neues Jahrb. f. Min. 1901, 2 p. 37; *G. Friedel*, Bull. soc. franc. de minéral. 28 (1905), p. 142.

103) Die Gruppe S_2 besitzt nur ein Symmetriezentrum, das gemäss Anm. 19 mit einer zweizähligen Axe zweiter Art identisch ist.

hexagonalen System zuzurechnen, und die Gruppen D_3^d , D_3 , C_3^h , C_3^v , C_3 als *rhomboedrisches System* zusammenzufassen resp. als rhomboedrische Unterabteilung des hexagonalen Systems. Ferner teilt man die Gruppen des digonalen und monogonalen Systems in drei Systeme, in das *rhombische* mit den Gruppen D_2^h , D_2 , C_2^v , das *monokline* mit den Gruppen C_2^h , C_2 , C_1^h und das *trikline* mit den Gruppen S_2 und C_1 .

33. Die Unterabteilungen der Krystallsysteme. Für jede dieser Einteilungen gibt es in jedem System eine Gruppe höchster Symmetrie; sie heisst die *Hauptgruppe* oder *Holoedrie*; die andern Gruppen sind Untergruppen der Hauptgruppe (Nr. 30) und enthalten entweder die Hälfte oder nur den vierten Teil der Deckoperationen der Hauptgruppe. Sie heissen demgemäss *Hemiedrie* resp. *Tetartoedrie*. Die zugehörigen Krystallformen besitzen ebenfalls nur die Hälfte resp. den vierten Teil der Flächen der holoedrischen Krystallform. Werden die rhomboedrischen Krystalle als Unterabteilung des hexagonalen Systems betrachtet, so giebt es eine Gruppe des hexagonalen Systems, nämlich C_3 , die nur den achten Teil der Operationen der Hauptgruppe D_6^h enthält; sie wird als *Ogdoedrie* bezeichnet. Die den einzelnen Untergruppen zukommenden Bezeichnungen stimmen nicht bei allen Forschern überein und hängen teilweise von der Gestalt der Krystallform ab.

Hemiedrien und Tetartoedrien, die nur aus *Deckbewegungen* bestehen, insbesondere also diejenigen Hemiedrien, die *alle* Deckbewegungen der Hauptgruppe enthalten, pflegt man *enantiomorph* zu nennen. Den zugehörigen Krystallklassen kommt nur *Axensymmetrie* zu, aber keine Symmetrieeigenschaft zweiter Art, und die zugehörige allgemeine Krystallform ist sich daher nicht selbst spiegelbildlich gleich. Hier können daher Krystallindividuen auftreten, von denen das eine das Spiegelbild des anderen ist, die sich also durch einen Links- resp. Rechtssinn unterscheiden.

34. Die Symmetrie der einzelnen physikalischen Erscheinungen. Die physikalischen Erscheinungen eines Krystalles stimmen jedenfalls längs je N gleichwertiger Richtungen überein. Sie zerfallen überdies in zwei verschiedene Klassen, je nachdem sie ihrer Natur nach in entgegengesetzten Richtungen übereinstimmen oder nicht; im letzten Fall werden sie auch als Erscheinungen *polarer* Natur bezeichnet. Beispiele der ersten Art sind die Ausdehnungserscheinungen, Beispiele der zweiten Art die pyroelektrischen. Im ersten Fall besitzen sie ein Symmetriezentrum, auch wenn die für den Krystall charakteristische Symmetrie ein solches nicht enthält. Die Symmetriegruppe derjenigen

physikalischen Eigenschaften, denen ausser der Krystallgruppe noch ein Symmetriezentrum zukommt, ergibt sich, indem man die Krystallgruppe mit einer Inversion multipliziert (Nr. 31). Für solche physikalischen Eigenschaften werden sich daher mehrere Krystallklassen auf eine einzige reduzieren; es bleiben nur diejenigen übrig, die bereits in Nr. 31 als mit einem Symmetriezentrum behaftet aufgeführt wurden, nämlich die Gruppen O^h und T^h vom regulären System, D_6^h und C_6^h vom hexagonalen, D_4^h und C_4^h vom tetragonalen, D_3^d und C_3^i vom rhomboedrischen, D_2^h und C_2^h vom rhombischen und die Gruppe S_2 vom monoklinen System.

In mancher physikalischen Hinsicht können sich die 32 Klassen noch weiter reduzieren. So ist für gewisse optische Erscheinungen die Krystallsymmetrie stets mit der Symmetrie einer zentrischen Fläche zweiter Ordnung, nämlich eines Ellipsoids, identisch. Ein solches ist entweder eine Kugel, ein Rotationsellipsoid oder ein dreiaxiges Ellipsoid. Demgemäss besitzen in dieser Hinsicht die Krystalle des regulären Systems die Kugelsymmetrie, die des hexagonalen, tetragonalen und rhomboedrischen Systems die Symmetrie eines Rotationsellipsoids und die übrigen die Symmetrie eines dreiaxigen Ellipsoids¹⁰⁴).

Allgemein gilt der Satz, dass die Symmetriegruppe, die einem Krystall in Bezug auf eine gewisse physikalische Eigenschaft zukommt, immer dann mit der spezifischen Symmetriegruppe des Krystalles identisch ist, wenn die physikalische Eigenschaft *keine* Eigensymmetrie besitzt, was z. B. für die pyroelektrischen Erscheinungen der Fall ist. Wenn aber der physikalischen Eigenschaft eine gewisse Eigensymmetrie zukommt, so besitzt der Krystall bezüglich dieser Eigenschaft diejenige Symmetrie, die aus der Verbindung dieser spezifischen Symmetrie mit der Krystallsymmetrie besteht¹⁰⁵).

II. Die Strukturtheorien und die 230 Strukturgruppen.

35. Die Raumgitter und die Gruppen von Translationen.

Wie in Nr. 26 erwähnt wurde, führen die Strukturtheorien auf das mathematische Problem, alle möglichen *regelmässigen Molekelanordnungen* resp. alle *regelmässigen Punktsysteme* zu bestimmen.

104) Nach der Lage des Ellipsoids zum Krystall hat man *fünf* Klassen zu unterscheiden. Für weitere Beispiele vgl. *Schoenflies*, Krystallsysteme, p. 227 ff.; *Hilton*, Crystallography, p. 98 ff.

105) Diese Symmetrie braucht nicht immer eine der 32 Klassen zu sein, wie es in dem obigen Beispiel der Fall ist, wo die Symmetrie einer Kugel auftritt. Vgl. Anm. 94.

Die einfachsten regelmässigen Punktsysteme sind die *Raumgitter*, bestimmt durch die sämtlichen Schnittpunkte dreier Scharen äquidistanter paralleler Ebenen, die den Raum in lauter kongruente Parallelepipeda *II* zerlegen¹⁰⁶). Jede dieser Ebenen enthält unendlich viele Punkte des Gitters, die ein Netz kongruenter Parallelogramme darstellen, und heisst deshalb *Netzebene*. Desgleichen enthält auch *jede* Ebene, die drei Gitterpunkte verbindet, ein Netz kongruenter Parallelogramme und wird demgemäss als Netzebene bezeichnet. Ferner enthält jede Gerade, die zwei Gitterpunkte verbindet, unendlich viele Gitterpunkte in gleichen Abständen. Der Abstand von zwei benachbarten Punkten dieser *Punktreihe* heisst ihr *Parameter*. Ausser dem Raumgitter betrachten wir noch die sämtlichen eben erwähnten kongruenten Parallelepipeda *II*. Augenscheinlich ist jedes von ihnen von der Gesamtheit der übrigen auf gleiche Art umgeben; man sagt deshalb, dass sie eine *reguläre Raumteilung* bestimmen (Nr. 44). Auch erfüllen sie den Raum *lückenlos*.

Wird als *Deckbewegung* des Raumgitters resp. der Raumteilung eine solche Bewegung bezeichnet, die jeden Gitterpunkt in einen Gitterpunkt, also auch die Parallelepipeda ineinander überführt, so gibt es für ein Raumgitter unendlich viele *Schiebungen* oder *Translationen*, die Deckbewegungen sind. Übt man nämlich auf ein Parallelepipeton *II* diejenige Translation aus, die es in irgend ein anderes Parallelepipeton überführt, so gehen alle Parallelepipeda ineinander, und das Raumgitter in sich über. Es ist daher jede Translation eine Deckbewegung, die nach Länge und Richtung gleich der Verbindungslinie zweier Gitterpunkte ist.

Unter allen diesen Translationen gibt es drei einfachste, nämlich diejenigen, die nach Länge und Richtung durch die Kanten von *II* dargestellt werden; wir bezeichnen sie durch τ_x , τ_y , τ_z .¹⁰⁷) Diese heissen *primitive* Translationen¹⁰⁸) des Gitters. Wendet man nämlich den im Gebiet der Zusammensetzung der Strecken üblichen Begriff

106) Die Raumgitter und ihre Eigenschaften werden zuerst von *C. F. Gauss*, Gött. gelehrte Anzeigen 1831, Juli 9. und Journ. f. Math. 20 (1831), p. 318 erwähnt. Vgl. auch Werke 2 (1863), p. 188.

107) Die Bezeichnung setzt die Kanten von *II* als Koordinatenachsen voraus.

108) Weitere Sätze über solche Translationen ergeben sich durch Verallgemeinerung derjenigen, die man über die Perioden der elliptischen Funktionen ableitet (vgl. Encykl. Bd. II B Art. *Harkness*, Elliptische Funktionen). Z. B. gibt es für ein Gitter unendlich viele Tripel primitiver Translationen. Dasselbe Gitter kann also auf mannigfache Art als Schnitt von drei Scharen paralleler Ebenen erhalten werden. Das von je drei primitiven Translationen gebildete Parallelepipeton hat konstantes Volumen u. s. w.

der *geometrischen Summe* an, so ist jede Translation τ , die zwei Gitterpunkte verbindet, in der Form

$$(5) \quad \tau = m_1 \tau_x + m_2 \tau_y + m_3 \tau_z$$

darstellbar, wo m_1, m_2, m_3 irgendwelche positive oder negative ganze Zahlen sind. Diese Gleichung besagt, dass die Lagenänderung, die durch die Translation τ herbeigeführt wird, mit derjenigen äquivalent ist, die durch m_1 -malige Folge der Translation τ_x , m_2 -malige von τ_y und m_3 -malige von τ_z entsteht.

Es ist klar, dass alle Translationen, die ein Gitter in sich überführen, eine Gruppe bilden; zu jedem Gitter gehört also eine Translationsgruppe. Es ist aber auch das Umgekehrte der Fall. Geht man nämlich von irgend drei Translationen τ_x, τ_y, τ_z aus, die ein Parallelepipedon II bestimmen und unterwirft dies den sämtlichen durch die Gleichung (5) definierten Translationen, so bilden die Ecken aller aus ihm hervorgehenden Parallelepipeda dasjenige Raumgitter, dessen drei erzeugende Ebenenscharen den Seitenflächen von II parallel sind, und sämtliche Translationen, die dies Raumgitter in sich überführen, sind mit denen von Gleichung (5) identisch.

36. Einteilung der Raumgitter nach der Symmetrie. Man kann den Raumgittern Symmetrieeigenschaften erteilen, wenn man das Parallelepipedon II geeignet wählt, und zwar so, dass es selbst eine gewisse Symmetrie besitzt. Wir bezeichnen es als das *charakteristische Parallelepipedon*. Wählt man z. B. II als gerade quadratische Säule und legt durch die Mitte dieser Säule alle ihre Symmetrieachsen und Symmetrieebenen, so sind sie zugleich Symmetrieachsen und Symmetrieebenen des Raumgitters; das Gleiche gilt für die Mitte einer jeden derartigen Säule und sogar auch für ihre Eckpunkte.

Die Aufgabe, alle in Bezug auf die Symmetrie zu unterscheidenden Raumgitter zu finden¹⁰⁹), führt zu folgenden *vierzehn* Typen.

1) Die Gitter vom *regulären Typus*. Deren gibt es drei Arten. Die einfachste besteht aus lauter Würfeln, deren Ecken die Gitterpunkte bilden. Die andern ergeben sich, wenn man noch die Mitten der Würfel oder die Mitten der Seitenflächen hinzufügt; das charakteristische Parallelepipedon ist in beiden Fällen ein Rhomboeder¹¹⁰).

109) Diese Aufgabe wurde zuerst von *M. L. Frankenheim* behandelt; vgl. die Lehre von der Cohäsion, Breslau, 1835, p. 311, und System der Krystalle, Nova Acta Leopoldina 29 (1842), p. 483. Eine zweite elegante Lösung gab *A. Bravais*, Journ. éc. polyt. 19, Heft 33 (1850), p. 1. Die Lösung von *Frankenheim* enthält ein Versehen, vgl. Anm. 42. Vgl. auch *L. Sohncke*, Ann. Phys. Chem. 132 (1867), p. 75.

110) Damit ist gemeint, dass alle Flächen von II Rhomben sind; ein reguläres Rhomboeder ist es nicht.

2) Die Gitter vom *hexagonalen Typus*. Es giebt nur eine Art. Das charakteristische Parallelepipedon ist eine gerade rhombische Säule; die in eine und dieselbe Ebene fallenden Grundflächen bilden ein rhombisches Netz, das zugleich ein Netz von regulären Dreiecken oder auch von zentrirten regulären Sechsecken darstellt.

3) Die Gitter vom *tetragonalen Typus*. Es giebt zwei Arten. Die einfachste ist aus quadratischen Säulen aufgebaut, die andere entsteht, wenn man noch die Säulenmitten hinzufügt. Für sie ist das charakteristische Parallelepipedon wieder ein Rhomboeder.

4) Gitter vom *rhomboedriscen Typus*. Es giebt nur eine Art, das Gitter ist aus regulären Rhomboedern aufgebaut.

5) Gitter vom *rhombischen Typus*. Es giebt vier Arten. Die einfachste ist aus lauter rechtwinkligen Parallepipeden aufgebaut. Zwei andere entstehen aus ihr, indem man die Mitten der Parallepipeda oder die Mitten ihrer Seitenflächen hinzufügt, und die vierte Art ist aus geraden rhombischen Säulen aufgebaut.

6) Gitter vom *monoklinen Typus*. Es giebt zwei Arten. Die einfachste ist aus geraden Parallepipeden mit beliebiger Grundfläche aufgebaut, die andere entsteht aus ihm durch Hinzufügung der Mitten oder auch der Mitten der Seitenflächen¹¹¹⁾. Im ersten Falle heisst das charakteristische Parallelepipedon eine rhomboidische Säule, im zweiten eine klinorhombische Säule.

7) Gitter vom *triklinen Typus*, die aus beliebigen Parallelepipedon aufgebaut sind.

Jedem dieser Gitter kommt als spezifische Symmetrie die holoedrische Symmetrie desjenigen Krystallsystems zu, dem sein Name entspricht, was man am Aufbau des Gitters unmittelbar erkennt.

Die Raumgitter zerfallen also ihrer Symmetrie nach in die nämlichen sieben Klassen, die die empirisch gewonnene Einteilung der Krystalle geliefert hat. Diese bemerkenswerte Thatsache hat den Ausgangspunkt der neueren Strukturtheorien abgegeben. Es war *Bravais*, der es verstand, dies zunächst rein geometrische Resultat krystallographisch zu verwerten und darauf eine für alle 32 Klassen gleichmässig angelegte molekulare Theorie zu gründen.

37. Die Bravais'sche Theorie. *R. J. Haiiy*¹¹²⁾ ging von der Vorstellung aus, dass die kleinsten individuellen Teile der Krystalle (*molécules intégrantes*) eine Form haben, die durch ihre Hauptspaltungs-

111) Dies Gitter ist bei *Frankenheim* doppelt gezählt; vgl. Anm. 40.

112) *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux*, Paris 1784, sowie *Traité de minéralogie*, Paris 1801.

ebenen bestimmt wird, und sich mit ihren Flächen lückenlos an einander schliessen¹¹³⁾. Diese Formen waren entweder parallelepidisch oder tetraedrisch oder prismatisch. In den beiden letzten Fällen lassen sie sich gemäss der Annahme *Haiüy's* aber gleichfalls zu Gruppen zusammenschliessen, die ein Parallelepipedon bilden, und zwar so, dass ihre Schwerpunkte ein Raumgitter bilden. Er dachte sich nämlich die parallelepidischen Bausteine schichtenweise in der Art gelagert, dass der Rand einer jeden Schicht gegen die benachbarte (z. B. die untere) um einen, zwei oder mehr Bausteine zurückbleibt (*molécules soustractives*). Annäherungsweise bilden dann diese Schichten von parallelepidischen Bausteinen gewisse Pyramiden, deren Flächen geometrisch durch die äusseren Kanten der Bausteine der einzelnen Schichten definiert sind, und die so definierten Pyramidenflächen liefern nach *Haiüy* die Krystallflächen.

Die Idee, dass die *Schwerpunkte* von *Haiüy's* Molekeln ein *Raumgitter* darstellen, wurde in präziser Form allerdings erst von *Seeber*¹¹⁴⁾ und *Delafosse*¹¹⁵⁾ ausgesprochen. An sie knüpfte *Bravais*¹¹⁶⁾ an, der von der *Einteilung der Gitter nach der Symmetrie* ausging und so die erste organische Strukturhypothese aufstellte. Seine Theorie läuft darauf hinaus, dass die unbegrenzte Krystallmasse aus lauter diskreten und *kongruenten* Molekeln besteht, die *gitterartig* im Raum verteilt sind und sich *sämtlich in paralleler Lage* befinden. Hat nun die Molekel die gleiche Symmetrie, wie das bezügliche Raumgitter, und wird sie so in das Gitter eingesetzt, dass ihre Symmetrieachsen und Symmetrieebenen mit denen des Gitters übereinstimmen, so wird auch das so gebildete Molekelgitter die holoedrische Symmetrie des bezüglichen Krystallsystems besitzen. Setzt man ferner in die Gitterpunkte Molekeln, deren Symmetrie einer Unterabteilung dieses Krystallsystems entspricht, so wird den so konstruierten Molekelgittern gerade die Symmetrie dieser Unterabteilung zukommen. In der That geht das Molekelgitter in diesem Fall ausser durch die Translationen auch durch alle diejenigen Deckoperationen in sich über, die eine Molekel in sich überführen, also der bezüglichen Krystallklasse entsprechen.

Die Verallgemeinerung des Vorstehenden besagt, dass, welcher Art auch die Molekeln sein mögen, die man parallel orientiert in die

113) Er liess allerdings gewisse Ausnahmen zu; vgl. *Sohncke*, Krystalstruktur, p. 11.

114) *Ann. Phys. Chem.* 76 (1824), p. 229, 349.

115) *Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. roy. de Paris* 8 (1843), p. 649.

116) Vgl. die in der Litteraturübersicht genannten Schriften.

sämtlichen Punkte eines Gitters einsetzt, dem Molekelgitter entweder die *gesamte* Symmetrie des Gitters oder nur *ein Teil* dieser Symmetrie zukommt. Seine Symmetrie ist daher stets mit der Symmetrie einer der 32 Krystallklassen identisch. Die *Bravais'schen* Molekelgitter zerfallen also rücksichtlich ihrer Symmetrie in die nämlichen 32 Klassen wie die Krystalle.

38. Ableitung der krystallographischen Grundtatsachen aus der Bravais'schen Theorie. Die eben genannte Thatsache, der wir auch bei den andern Strukturtheorien begegnen werden, bildet unser theoretisches Hauptresultat. Das gesamte Symmetriegesetz, insbesondere auch der fundamentale Satz, dass Symmetrieaxen nur 2-, 3-, 4- oder 6zählig sein können, erscheint also als *notwendige und prinzipielle Folgerung der zu Grunde gelegten Hypothese*.

Dasselbe gilt aber auch von den beiden andern oben (Nr. 26) genannten Grundeigenschaften der Krystallsubstanz, nämlich von der *Gleichwertigkeit paralleler Richtungen* und dem *Gesetz der rationalen Indices*. Die Gleichwertigkeit paralleler Richtungen ist eine unmittelbare Folge der gitterartigen Struktur. Genau genommen trifft dies allerdings nur für diejenigen zu, die irgend zwei Parallelepipeda der Raumteilung (Nr. 35) in der gleichen Weise durchdringen. Da aber die Dimensionen der Parallelepipeda gleich den Abständen der Krystallmolekeln sind, so ist dies praktisch mit der Gleichwertigkeit aller parallelen Richtungen gleichbedeutend¹¹⁷⁾.

Um endlich das Gesetz der rationalen Indices abzuleiten, hat man von der unmittelbar einleuchtenden Auffassung auszugehen, dass als Krystallflächen nur solche Flächen auftreten können, die Netzebenen des Gitters sind. Jede derartige Ebene ist durch drei Punkte bestimmt, und diese sind immer Endpunkte dreier von demselben Gitterpunkt ausgehender Translationen. Ihre Koordinaten sind daher ganzzahlige Vielfache der Translationen τ_x, τ_y, τ_z (Nr. 35), die bezügliche Ebene hat daher rationale Indices¹¹⁸⁾. Die Indices ergeben sich insbesondere als kleine Zahlen, wenn man die weitere Voraussetzung macht, dass sich diejenigen Netzebenen im allgemeinen am leichtesten als

117) Die Konstatierung ungleichwertiger paralleler Richtungen liegt jenseits der Grenzen der Beobachtung. Damit erledigen sich die Bemerkungen von *Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 31 (1899), p. 97 u. 34 (1901), p. 353. Sie könnten in gleicher Weise gegen jede atomistische Theorie homogener Substanzen gerichtet werden.

118) Eine Ableitung giebt auch *F. Haag*, Programm des Gymn. Rottweil 1887. Auch behandelt er die Aufgabe, auf Grund der Strukturtheorien die Indices aller in einer gegebenen Zone liegenden Flächen zu finden. Zeitschr. f. Kryst. 15 (1883), p. 585.

Krystallflächen ausbilden, die am dichtesten mit Gitterpunkten besetzt sind¹¹⁹⁾.

Aus dem Umstand, dass jede Netzebene als mögliche Krystallfläche zu betrachten ist, folgt übrigens, dass jede Verbindungslinie zweier Gitterpunkte eine mögliche Krystallkante sein kann¹²⁰⁾.

39. Die Bravais'sche Grenzbedingung und die Mallard'sche Strukturauffassung. Für den Aufbau eines einzelnen Krystalles aus seinen Bausteinen giebt es in der *Bravais'schen* Theorie noch einigen Spielraum. Im allgemeinen hat man für dasselbe Krystallsystem mehrere Gitter zur Verfügung¹²¹⁾, andererseits ist die Molekel nur der Beschränkung unterworfen, genau die Symmetrie der bezüglichen Krystallklasse zu besitzen. *Bravais* ging nämlich von der Ansicht aus, dass die Symmetrie der Molekel diejenige des Gitters *mechanisch bedingt*, so dass das Gitter dem Krystallsystem entspricht, zu dem der Krystall gehört¹²²⁾. Die Molekelsymmetrie darf alsdann nicht unter eine gewisse Grenze sinken; sie muss nämlich mit derjenigen einer Unterabteilung des bezüglichen Krystallsystems identisch sein. Man spricht demgemäss von einer Grenzbedingung, die die *Bravais'sche* Theorie der Molekel auferlegt.

Man kann aber auch von der Ansicht *Bravais'* absehen, zumal sie durch besondere Gründe nicht gestützt wird. Dies haben insbesondere *Mallard*¹²³⁾ und seine Schüler gethan. An und für sich ist es nämlich auch möglich, Gitter von symmetrischem Typus mit Molekeln ohne Symmetrie oder von sehr niedriger Symmetrie zu verbinden, ebenso umgekehrt Molekeln hoher Symmetrie in ein Gitter von niedriger Symmetrie einzusetzen. Endlich kann man auch die Molekeln so in die Gitterpunkte einsetzen, dass die Symmetrieachsen und Symmetrieebenen der Molekel nicht mit denen des Gitters zusammenfallen. Wie dem auch sei, so wird jedes so gebildete Molekelgitter im streng mathematischen Sinn nur diejenigen Symmetrieeigen-

119) Über Netzdichtigkeit vgl. auch *E. v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 209.

120) Dadurch erledigt sich auch die mehrfach erörterte Frage, ob eine dreizählige Symmetrieaxe eine Krystallkante sein kann, in positivem Sinne.

121) *L. Wulff* hat darauf die Einführung verschiedener Hemiedrien und Tetartoedrien gleicher Symmetrie gestützt, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 474 ff. Die Einteilung nach der Symmetrie ist damit allerdings verlassen. Vgl. auch *Blasius*, Münch. Ber. 1889, p. 47, sowie Anm.

122) So heisst es Journ. éc. polyt. 20 (1851), p. 201 ff.: „Polyeder, zu einem Krystall zusammentretend, bilden dasjenige Raumgitter, das mit ihnen die meisten Symmetrieelemente gemein hat.“

123) Ann. d. mines 10 (1876), p. 60 ff. u. 19 (1881), p. 259.

schaften besitzen, die sowohl der Molekel als auch dem Gitter zukommen. Es giebt nun aber Krystalle, die man zwar einem System niederer Symmetrie zurechnen muss, die sich aber von den Krystallen höherer Symmetrie nur wenig unterscheiden (wie die *pseudosymmetrischen*) und in ihrem Verhalten denen des höheren Krystallsystems sehr nahe kommen. *Mallard* hat daher pseudoreguläre Krystalle in der Weise aufgebaut, dass er in ein reguläres Gitter eine Molekel setzt, die nahezu regulär ist, so dass auch das Molekelgitter selbst nahezu als eine sich regulär verhaltende Anordnung zu betrachten ist. In ähnlicher Weise verfährt auch *Wallérand*¹²⁴); er benutzt überdies auch Gitter geringer Symmetrie mit Molekeln hoher Symmetrie, um durch sie gewisse physikalische Erscheinungen zu erklären (vgl. Nr. 48).

Die *Mallard*'schen Modifikationen der *Bravais*'schen Auffassung sind hiermit nicht erschöpft; wir werden ihnen unten (Nr. 41) noch einmal begegnen. Ihm und allen denen, die sich ihm in der Struktur-auffassung anschliessen, ist aber das Bestreben gemeinsam, möglichst eng an die *Bravais*'schen Ideen anzuknüpfen und das Gitter als Grundlage beizubehalten. Ist doch sowohl der Begriff des Gitters, wie auch die Symmetrie des mit Molekeln besetzten Gitters der Anschauung fast unmittelbar einleuchtend. Thatsächlich führen jedoch auch die *Mallard*'schen Vorstellungen schon teilweise über die *Bravais*'sche Theorie hinaus und liefern Beispiele der allgemeineren Auffassung, die sich nicht auf gitterartigen Aufbau und parallele Orientierung beschränkt, sondern mit dem allgemeinsten Begriff regelmässiger Punktsysteme und Molekelanordnungen operiert.

40. Die Verallgemeinerung der Bravais'schen Strukturhypothese. Es scheint verständlich, wenn sich die mathematischen und die kristallographischen Vorstellungen im Gebiete der Strukturtheorien nicht völlig decken. Die mathematische Problemstellung muss naturgemäss nach den *allgemeinsten* regelmässigen Molekelanordnungen fragen, aus denen die Grundgesetze der Krystallsubstanz als unmittelbare Folgerungen sich ergeben; der Krystallograph wird bestrebt sein, von allen derartigen Anordnungen die *einfachsten* auszusuchen, und das sind unbestreitbar diejenigen, deren Molekeln parallele Lage haben.

124) Bull. de la soc. min. de France 27 (1898), p. 625; vgl. auch *Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 32 (1900), p. 48 u. 34 (1901), p. 596, der allerdings meint, dass eine „rhomboedrisch ogdoedrische“ Molekel sehr wohl gesetzmässige Symmetrie besitze, wenn sie auch nicht durch die bisher üblichen Symmetrielemente definierbar sei! Vgl. auch Anm. 86.

Wenn insbesondere *Bravais* der einzelnen Molekel genau die Symmetrie zuweist, die der Krystall besitzt, und so die zu erklärende Eigenschaft direkt in die kleinsten Teilchen verlegt, so kann dieser Grundgedanke sicher an Einfachheit nicht übertroffen werden. Umgekehrt wird man es aber als einen methodischen Fortschritt betrachten können, wenn man im Stande ist, für die Erklärung der Symmetrie ganz auf die Qualität der Molekel zu verzichten. Vielleicht wird sich der Krystallograph zu der *Bravais*'schen Auffassung, der Mathematiker zu der allgemeineren hingezogen fühlen. Übrigens hat die allgemeinere Auffassung auch unter den Krystallographen Anhänger gefunden. *Sohncke*, dem wir sie in erster Linie verdanken, wies insbesondere darauf hin, dass in der *Bravais*'schen Theorie solche Anordnungen der Molekeln ausgeschlossen sind, bei denen ihre Centra ebene Netze von lückenlos aneinander liegenden Sechsecken (wie Bienenzellen) bilden¹²⁵). Dazu kommen noch physikalische Erwägungen. Die Erscheinungen der Cirkularpolarisation, die man an gewissen Krystallen beobachtet, legen es nahe Strukturen in Betracht zu ziehen, bei denen die Molekeln eine schraubenförmige Anordnung besitzen, also nicht parallel orientiert sein können¹²⁶). Zu dieser Auffassung kommt übrigens auch *Mallard*; auch er konstruiert für denselben Zweck Molekelanordnungen schraubenförmiger Art, bei denen die Gitteranordnung verlassen ist, und die bereits spezielle Fälle von regelmässigen Molekelanordnungen allgemeinsten Art sind¹²⁷).

Zu diesen Molekelanordnungen kann man übrigens auch so gelangen, dass man von einem *Bravais*'schen Molekelgitter ausgeht und die in den Gitterpunkten sitzenden symmetrischen Krystallmolekeln in N kongruente resp. spiegelbildlich gleiche Bestandteile zerlegt, die durch die Deckoperationen der Krystallklasse in einander übergehen (Nr. 29). Man kann dies auch so thun, dass diese N Bestandteile räumlich getrennt sind¹²⁸). Wird dies für alle Molekeln eines Molekelgitters in gleicher Weise ausgeführt, so werden offenbar seine Deckoperationen, also auch seine Symmetrie, nicht geändert. Nichts

125) Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur, p. 23.

126) *Sohncke* zeigt, dass für jede Krystallklasse, in der man optisch drehende Krystalle kennt, solche Punktsysteme vorhanden sind, die ihrer Struktur nach optisch drehend sein müssen; Zeitschr. f. Kryst. 19 (1891), p. 529 u. 25 (1896), p. 529; vgl. auch *Barlow*, ebenda 27 (1897), p. 468 ff.

127) Ann. d. mines 10 (1876), p. 181 u. 19 (1881), p. 273.

128) In dieser Weise hat sich übrigens *Bravais* seine Molekeln vorgestellt, jeder der N Teile kann dann noch aus weiteren physikalischen oder chemischen Elementen bestehen. Vgl. hierzu auch *G. Friedel*, Bull. soc. de l'industr. minéral. 3, 4 (1904).

hindert nun, in den N einzelnen Bestandteilen der Molekeln die konstituierenden Krystallbausteine zu erblicken. Thut man dies, so gelangt man zu einem Molekelhaufen allgemeinerer Struktur, bei dem die Bausteine nicht mehr sämtlich parallel orientiert sind und der die gleiche Krystallsubstanz darzustellen vermag, wie das Molekelgitter, von dem wir ausgingen.

Der prinzipielle Unterschied zwischen den so gebildeten Strukturen und den *Bravais'schen* Gittern besteht darin, dass hier die konstituierenden Bausteine eine beliebige Form haben können, während sie in der *Bravais'schen* Theorie gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen müssen. Geht man diesem Gedanken nach, so kommt man zu der Forderung, alle Strukturen aufzusuchen, bei denen die Symmetrie nur von der *Anordnung* abhängt und eine *besondere Qualität* der Molekel nicht mehr nötig ist. Eine mit solchen Strukturen operierende Theorie kann als *reine* Strukturtheorie bezeichnet werden. Die erste Anregung hierzu ist von *Chr. Wiener*⁷⁵⁾ und *L. Sohncke*⁷⁶⁾ ausgegangen. Sie gelangten dazu, indem sie den Begriff der regelmässigen Anordnung dahin ausdehnten, dass sie nur verlangten, jede *Molekel*, resp. *der sie geometrisch vertretende Punkt soll von der Gesamtheit aller übrigen auf die gleiche Art umgeben sein*. Die Aufsuchung aller derartigen Punktsysteme, die sich nach allen Seiten unbegrenzt erstrecken, ist das allgemeine mathematische Problem (Nr. 26), das sich hier ergibt.

41. Die Deckoperationen und Symmetrieeigenschaften der all-gemeinsten regelmässigen Strukturen. Die eben definierten allgemeinen Punktsysteme sind vollständig durch die Eigenschaft charakterisiert, dass wenn A und B irgend zwei seiner Punkte sind, das Punktsystem so Punkt für Punkt mit sich zur Deckung gebracht werden kann, dass A auf B fällt. Die Gitter stellen den einfachsten Typus dieser Punktsysteme dar.

Wie in Nr. 29 hat man auch hier *zwei verschiedene* Arten von Deckoperationen zu unterscheiden. Eine Operation, die einen Molekelhaufen, Molekel für Molekel mit sich zur Deckung bringt, kann wieder entweder eine *Bewegung* oder aber eine *Operation zweiter Art* sein. Im ersten Fall ist der Molekelhaufen sich selbst mehrfach *kongruent*, im zweiten ist er sich selbst auch *spiegelbildlich gleich*.

Abgesehen von den *Translationen* giebt es noch zwei Arten *ein-fachster* Bewegungen, die einen Molekelhaufen mit sich zur Deckung bringen, *Drehungen* und *Schraubungen*. Die Schraubungsaxe soll ebenfalls *n-zählig* heissen, wenn ihr Drehungswinkel der n^{te} Teil von 360° ist; die zugehörige Gleitungs-komponente t hat immer eine solche Länge,

dass ihr n -faches eine Decktranslation des Molekelhaufens ist. Auch die so definierte Schraubungsaxe muss als eine n -zählige *Symmetrieaxe* des Molekelhaufens angesehen werden, da der Molekelhaufen als allseitig unbegrenzt angenommen wird (vgl. Nr. 26). Es giebt Fälle, in denen Drehungsaxen überhaupt fehlen und nur Schraubenaxen auftreten.

Von Operationen zweiter Art kann ausser den drei in Nr. 29 erwähnten noch eine *Spiegelung* an einer Ebene auftreten, die mit einer *Gleitung* längs dieser Ebene verbunden ist. (*Ebene gleitender Symmetrie.*) Die Gleitung t ist immer die Hälfte einer dem Molekelhaufen zukommenden Decktranslation τ . Auch diese Ebene muss als *Symmetrieebene* von ihm betrachtet werden; es kann vorkommen, dass Symmetrieebenen ganz fehlen und nur Ebenen gleitender Symmetrie auftreten.

Ist $\mathfrak{S}(t)$ die eben definierte Operation, so ist $\mathfrak{S}^2 = 2t = \tau$; ist ferner \mathfrak{A} die Schraubung um eine n -zählige Axe, so ist $\mathfrak{A}^n = nt = \tau$. In diesen Gleichungen finden die vorstehenden Definitionen ihren mathematischen Ausdruck.

42. Die Bewegungsgruppen und die Gruppen zweiter Art. Deckoperationen giebt es bei einem regulären Punktsystem immer unendlich viele. Die Zahl der zugehörigen Symmetrieaxen und Symmetrieebenen ist gleichfalls unendlich gross, und von der Art und Verteilung dieser Axen und Ebenen im Raum wird offenbar die Symmetrieart des Punktsystems resp. des Molekelhaufens abhängen. Die genauere Analyse dieser Frage führt wieder auf den Gruppenbegriff. Werden nämlich zwei Deckoperationen eines Punktsystems hintereinander ausgeführt, so stellen sie offenbar wieder eine Deckoperation dar; die Deckoperationen besitzen daher *Gruppencharakter* (Nr. 30), und es giebt auch für jedes regelmässige Punktsystem eine *ihm zugehörige Gruppe von Deckoperationen*. Auch hier besteht der Satz, dass man alle Punkte eines regelmässigen Punktsystems erhält, wenn man irgend einen Raumpunkt den sämtlichen Operationen der bezüglichen Gruppe unterwirft. Die Begriffe des regelmässigen Punktsystems resp. des regelmässigen Molekelhaufens und der Gruppe von Deckoperationen sind also *äquivalent*, und die Aufgabe, alle Gattungen regelmässiger Molekelhaufen zu finden, ist daher gleichwertig mit der Aufgabe, *alle räumlichen Gruppen von Deckoperationen* zu bestimmen.

Selbstverständlich sind nur solche Raumgruppen krystallographisch brauchbar, deren Punktsysteme sich allseitig unbegrenzt erstrecken und deren Punkte nicht unendlich nahe aneinander kommen können¹²⁹⁾.

129) D. h. der Abstand zweier Punkte muss oberhalb einer endlichen Grösse bleiben, nämlich der Dimension der Molekeln.

Die Punkte sind ja Vertreter der Molekeln und je zwei Molekeln müssen ausserhalb von einander liegen.

Alle Punkte, die aus einem Ausgangspunkt durch alle Operationen der Gruppe hervorgehen, sollen *homologe* Punkte heissen.

Die *Bewegungsgruppen*, d. h. diejenigen, die nur Bewegungen enthalten, sind zuerst von *C. Jordan*¹³⁰⁾ abgeleitet worden, später nochmals von *Sohncke*⁷⁶⁾, der verschiedene Irrtümer der *Jordan'schen* Resultate berichtigte. Solcher Gruppen giebt es 65.¹³¹⁾ Die Gruppen, die auch Deckoperationen zweiter Art enthalten, wurden von *A. Schoenflies*¹³²⁾ und *v. Fedorow*¹³³⁾ bestimmt. Solcher giebt es 165, so dass es insgesamt 230 krystallographisch verwendbare Gruppen giebt, d. h. solche, die den beiden am Ende der Nr. 41 aufgestellten Bedingungen genügen¹³⁴⁾. Für diese Gruppen und die zu ihnen gehörigen Molekelhaufen gelten folgende Sätze¹³⁵⁾.

1) Jeder zu einer der 230 Gruppen \mathcal{G} gehörige Molekelhaufen entsteht, indem man eine beliebige Molekel den sämtlichen Operationen der Gruppe unterwirft.

2) Jede der 230 Gruppen enthält unter ihren Deckoperationen unendlich viele Translationen, die eine Gruppe bilden und ein Raumgitter bestimmen¹³⁶⁾. In jedem regelmässigen Molekelhaufen sind daher auch solche Molekeln enthalten, deren Centra ein Gitter bilden. Diese Translationsgruppe heisse \mathcal{L} .

3) Jede der 230 Gruppen ist einer der 32 Punktgruppen *isomorph*, worunter folgendes zu verstehen ist. Sei G eine dieser 32 Gruppen und \mathcal{G} eine ihr isomorphe Raumgruppe. Enthält dann G irgend eine n -zählige Symmetrieaxe a , so giebt es in \mathcal{G} unendlich viele zu a *parallele* n -zählige Symmetrieaxen, die gemäss Nr. 41 Drehungsaxen wie Schraubenaxen sein können. Enthält G ferner eine Symmetrieebene, so enthält \mathcal{G} unendlich viele ihr *parallele* Symmetrieebenen,

130) Ann. di matemat. (2) 2 (1869), p. 167 u. 322.

131) Bei *Sohncke* treten noch 66 Gruppen auf, da eine doppelt gezählt ist.

132) Math. Ann. 28 (1887), p. 319; 29 (1887), p. 50 u. 34 (1889), p. 173.

133) Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, Petersburg 1890 (russisch). Die Notwendigkeit, auch diese Gruppen in Betracht zu ziehen, wurde von *Fedorow* schon in seiner Gestaltenlehre (1885) betont.

134) Eine Aufzählung und Beschreibung der Gruppen sowie ihrer Symmetrieelemente giebt auch *Barlow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 1; eine vergleichende Zusammenstellung giebt *H. Hilton*, Centralbl. f. Mineral. 1901, p. 746.

135) Für diese Sätze vgl. *Schoenflies*, Krystalsysteme, und *H. Hilton*, Crystallography.

136) Vgl. auch *K. Rohn*, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 51 (1899), p. 445 u. Math. Ann. 53 (1900), p. 440.

die (Nr. 41) auch Ebenen gleitender Symmetrie sein können. Enthält G ein Symmetriecentrum, oder eine n -zählige Axe zweiter Art a' , so enthält \mathcal{G} unendlich viele Symmetriecentren resp. unendlich viele zu a' parallele n -zählige Axen zweiter Art.

4) Dies lässt sich auch so ausdrücken. Seien

$$(6) \quad \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$$

die Operationen von G , an Zahl N , so entsprechen jeder einzelnen von ihnen unendlich viele gleichartige Operationen von \mathcal{G} . Ist z. B. \mathcal{L} eine Drehung $\mathcal{R}(\alpha)$, so giebt es in \mathcal{G} unendlich viele Drehungen oder Schraubungen vom gleichen Winkel um parallele Axen, und zwar erhält man *alle* diese Drehungen oder Schraubungen, indem man irgend eine von ihnen mit sämtlichen Translationen, die in \mathcal{G} enthalten sind, multipliziert (Nr. 29). Wählt man nun je unter diesen unendlich vielen gleichartigen Operationen von \mathcal{G} je eine einzelne aus, und sind

$$(7) \quad \mathcal{L}', \mathcal{M}', \mathcal{N}' \dots$$

N derartige Operationen, so erhält man dem Vorstehenden gemäss *alle* Operationen von \mathcal{G} , indem man noch jede der Operationen (7) mit den *sämtlichen* Translationen der in \mathcal{G} enthaltenen Translationsgruppe \mathcal{T} multipliziert.

5) Sei m die der Gruppe G entsprechende symmetrische Bravais'sche Molekel, so kann man sie gemäss Nr. 30 so entstehen lassen, dass man irgend einen ihrer N Teile den Operationen (6) unterwirft. Wenn man nun irgend eine Molekel zunächst den Operationen 7) unterwirft, so ergibt sich dadurch gemäss 4) ein Komplex von N Molekeln, dessen Individuen zu den N Teilen von m parallel orientiert sind¹³⁷⁾. Unterwirft man nun diesen Komplex noch den sämtlichen Translationen von \mathcal{T} , so dass er sich gitterartig im Raum wiederholt, so entstehen alsdann gemäss 4) die *sämtlichen* Molekeln des zu \mathcal{G} gehörigen Molekelhaufens. Die *Orientierung* der Molekeln ist daher für alle Gruppen \mathcal{G} , die derselben Punktgruppe G isomorph sind, die *gleiche* und zwar diejenige, die bei der Auflösung eines Molekelgitters in einen allgemeineren Molekelhaufen entsteht.

Da der zu \mathcal{G} gehörige Molekelhaufen so erzeugt werden kann, dass man von einem gewissen Komplex von N Molekeln ausgeht und ihn allen Translationen von \mathcal{T} unterwirft, sagt man auch, dass der

137) Der Komplex entsteht also immer dadurch aus den N Individuen einer symmetrischen Molekel Bravais', dass man diese N Individuen parallel mit sich um geeignete kleine Strecken verschiebt. Bei den einfachsten Gruppen \mathcal{G} reduzieren sich diese Verschiebungen auf Null, und der Komplex ist mit der Molekel von Bravais identisch.

Molekelhaufen resp. das zugehörige Punktsystem aus N *ineinander gestellten Gittern* besteht.

6) Die in Nr. 31 abgeleiteten Sätze über Punktgruppen übertragen sich auf die räumlichen Gruppen. In jeder Raumgruppe \mathcal{G} , die auch Operationen zweiter Art enthält, bilden die in sie eingehenden Bewegungen eine Untergruppe \mathcal{G}' , und auch hier können die Deckoperationen zweiter Art von \mathcal{G} so erhalten werden, dass man zu ihren Bewegungen noch eine geeignete Operation zweiter Art hinzufügt. Der Hauptwert dieses Satzes besteht darin, dass man an ihm eine Methode hat, um sämtliche Gruppen \mathcal{G} zweiter Art abzuleiten. Um nämlich aus einer der 65 Bewegungsgruppen \mathcal{G}' eine Gruppe zweiter Art zu erhalten, kann man zu ihr jede Operation zweiter Art hinzufügen, die die sämtlichen Axen der Gruppe \mathcal{G}' ineinander überführt¹³⁸).

43. Die reine Strukturtheorie. Aus den vorstehenden Gruppensätzen ergeben sich für die zu ihnen gehörigen Molekelhaufen die folgenden Eigenschaften.

1) Die Ausgangsmolekeln, aus denen sie gebildet sind, sind durchaus beliebig. Die konstituierenden Bausteine der Krystalsubstanz unterliegen also keinerlei geometrischer oder physikalischer Beschränkung. Sie können durchaus asymmetrisch sein¹³⁹) und auch selbst wieder atomistisch aus einzelnen Teilchen bestehen u. s. w. (Vgl. auch Nr. 45.)

2) Die in jeder Gruppe \mathcal{G} enthaltene Translationsgruppe \mathfrak{T} bewirkt, dass der für die *Bravais'sche* Theorie abgeleitete Satz von der *krystallographischen Gleichwertigkeit aller parallelen Richtungen*, sowie die Geltung des Gesetzes der rationalen Indices auch hier zutrifft.

3) Aus dem Isomorphismus zwischen der Gruppe \mathcal{G} und der Gruppe G folgt, dass dem zu \mathcal{G} gehörigen Molekelhaufen genau die *Symmetrie der Gruppe G zukommt*. Dazu betrachte man die Figur F der N gleichwertigen Richtungen der Gruppe G und bezeichne die Geraden, die aus einer Richtung g durch die Operationen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \dots$ von G hervorgehen, mit g_1, g_m, g_n, \dots . Ist dann g' irgend eine zu g parallele Gerade des Raumes, so werden die unendlich vielen Geraden

138) Diese Methode kann man auch benutzen, um die 65 Bewegungsgruppen zu erhalten. Ist \mathcal{G}' eine solche von niederer Symmetrie, so erhält man eine von höherer Symmetrie, indem man zu \mathcal{G}' eine Axe hinzufügt, die Symmetrieaxe für alle Axen von \mathcal{G}' ist.

139) Dies wird neuerdings auch von den Krystallographen mehrfach gefordert. Vgl. z. B. *Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 31 (1899), p. 109 und *Beckenkamp*, 32 (1900), p. 48.

g'_i , die aus g' durch die unendlich vielen Operationen \mathcal{L}' hervorgehen, zu g_i parallel sein, ebenso alle Geraden g'_m zu g_m u. s. w. Die zu einander krystallographisch gleichwertigen Richtungen des Molekelhaufens sind also genau den N Richtungen der Gruppe G parallel.

Als Hauptergebnis der Theorie ergibt sich also auch hier, dass die Symmetrie jedes regelmässigen Molekelhaufens einer der 32 Klassen entspricht¹⁴⁰).

4) Ist \mathcal{G} eine Gruppe zweiter Art, so enthält der zugehörige Molekelhaufen zwei Arten von konstituierenden Molekeln, die einander spiegelbildlich gleich sind¹⁴¹). Jede Deckbewegung von \mathcal{G} führt jede Molekel in eine ihr kongruente über, jede Operation zweiter Art in eine solche, die ihr spiegelbildlich gleich ist. Den Krystallen, die in enantiomorphen Formen auftreten können, die also zu den 65 Gruppen erster Art gehören, entsprechen Molekelhaufen mit nur kongruenten Molekeln und zwar ist die eine Form aus Molekeln der einen Art, die andere Form aus Molekeln der andern Art aufgebaut¹⁴²).

Es bleibt die Frage offen, welche der 230 Gattungen von Molekelhaufen auch in praktischer Hinsicht brauchbar sind. L. Wulff¹⁴³) hält nur diejenigen für zulässig, in denen je N Molekeln sich zu einer natürlichen Einheit zusammenfassen lassen und zwar soll diese natürliche Einheit wieder ein symmetrischer Komplex sein. Diese Zusammenfassung stellt den umgekehrten Prozess dar, durch den wir in Nr. 48 von dem Bravais'schen Gitter zu den allgemeinen Strukturen übergangen, und so sind die Wulff'schen Strukturen mit den Bravais'schen Gittern gleichwertig; geometrisch unterscheiden sie sich von ihnen nur in der Bezeichnung und krystallographisch nur in der Frage, was man als die Einheit des krystallographischen Aufbaus betrachten will.

140) Eine Ableitung der 32 Klassen auf Grund der Strukturtheorie giebt Barlow, Zeitschr. f. Kryst. 34 (1901), p. 1. Der analoge Beweis von Viola, ebenda (1902) 35, p. 236 ist irrig.

141) Die Notwendigkeit, beide Arten von Molekeln zu berücksichtigen, wurde zuerst von Fedorow betont in seinen russischen Schriften, vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 39. Eine eigentliche Beschränkung der Molekelqualität ist hierin übrigens nicht enthalten. Die Gleichberechtigung der Begriffe kongruent und spiegelbildlich gleich geht durch die ganze Krystallographie, sie muss deshalb auch in den Grundlagen der Theorie notwendig zum Ausdruck kommen. Auch führt die Bravais'sche Auffassung, die die Molekel in N Elemente auflöst¹²⁸), zu der gleichen Konsequenz. Hierin liegt also keine Hypothese, sondern eine mathematische Folgerung vor. Vgl. hierzu Sohneke, Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 447 und Schönflies, Zeitschr. f. phys. Chemie 10 (1892), p. 517.

142) Diese Konsequenz trifft übrigens auch für die Bravais'sche Theorie zu.

143) Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 503.

44. Reguläre Raumteilungen von gitterartiger Struktur. In der Theorie der Raumgitter sahen wir, dass einem Raumgitter eine reguläre Raumteilung entspricht, gebildet von den sämtlichen Parallelepipeden, die das Gitter ausmachen. Sie stellen unendlich viele parallel orientierte Polyeder dar, die den Raum *regelmässig und lückenlos* erfüllen. Dieser Begriff, dessen krystallographische Wichtigkeit offenbar ist, lässt sich verallgemeinern; man kann die Aufgabe stellen, den Raum in allgemeiner Weise mit kongruenten Polyedern in paralleler Lage regelmässig und lückenlos zu erfüllen. In dieser Form ist die Aufgabe allerdings noch unbestimmt; bestimmt wird sie erst, wenn man die Polyeder als *konvex* annimmt.

Die vorstehende Frage hat zuerst *E. v. Fedorow* gestellt und beantwortet¹⁴⁴). Es gibt fünf Gattungen solcher Polyeder. Sie haben sämtlich einen Mittelpunkt, ihre Flächen paaren sich in kongruente parallele Polygone, die selbst parallele Kanten und einen Mittelpunkt haben. *Fedorow* bezeichnet sie deshalb als *Paralleloeder* (Parallelflächner). Sie können 3, 4, 6 und 7 parallele Flächenpaare besitzen, und stellen in den einfachsten Fällen einen Würfel, eine gerade sechseckige Säule, ein Rhombendodekaeder, einen von vier Sechsecken und acht Rhomben begrenzten Körper¹⁴⁵), endlich ein Kubooktaeder dar, d. h. die Durchdringungsfigur eines Würfels mit einem Oktaeder. Die übrigen Polyeder dieser Art entstehen aus ihnen durch affine Änderung.

Bei jeder Raumteilung, die aus derartigen Polyedern besteht, bilden die Centra der Polyeder ein Raumgitter, wie es auch oben für die Parallelepipeda der Fall ist. Ferner geht die ganze Raumteilung in sich über, d. h. jedes Polyeder in ein anderes, falls man eine diesem Gitter zugehörige Translation ausführt.

45. Allgemeinsten Begriff der regulären Raumteilung und der Fundamentalbereich. Der wichtige Begriff der regulären Raumteilung lässt sich auf folgende Art, die auch auf Gitter anwendbar ist, verallgemeinern. Man gehe von irgend einem regulären Punktsystem aus und lege um alle seine Punkte kongruente Kugeln, die ausserhalb von einander liegen, so giebt es zu jedem Punkt einer dieser Kugeln in allen andern die *homologen* (Nr. 42). Dies bleibt bestehen, wenn wir die Kugeln wachsen lassen. Dabei werden die Kugeln einander allmählich durchdringen, und den ganzen Raum lückenlos ausfüllen.

144) Gestaltenlehre 1885. Vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 115. Vgl. auch Lord *Kelvin*, Proc. Lond. Roy. Soc. 55 (1894), p. 1.

145) Diesen benutzt *Fedorow* für seine krystallographische Theorie nicht; vgl. Nr. 46 und Anm. 155.

Auf Grund dieser Vorstellung lässt sich für jeden Punkt, resp. jede Kugel ein gewisses Polyeder definieren, das *Fundamentalebene* heisst und zwar auf folgende Weise.

Seien p und p' zwei Punkte des Punktsystems, S und S' die um sie gelegten Kugeln und sei S' die resp. eine erste Kugel, in die die Kugel S eindringt. Dann durchdringen sich S und S' in einem Kreise k , und es sei ε die Ebene dieses Kreises. Wir ersetzen dann die Kugeln für das weitere Wachstum durch diejenigen Teile, die auf der einen resp. der andern Seite von ε liegen, dann wird, wenn S und S' um p resp. p' wachsen, zwar der Kreis k wachsen, aber so, dass die Ebene ε sich der Lage nach nicht ändert. Diese Ebene ε liefert also eine Grenzebene des um p resp. p' sich bildenden Polyeders. Die übrigen Grenzebenen werden von den Ebenen gebildet, die sich bei der weiteren Durchdringung von S mit andern Nachbarkugeln ergeben.

Alle sich so um p, p', \dots bildenden Polyeder enthalten in ihrem Innern lauter homologe Punkte. Ist nun \mathcal{G} die Raumgruppe, zu der das betrachtete Punktsystem gehört, so ist klar, dass alle diese Polyeder durch jede Operation von \mathcal{G} mit einander zur Deckung gelangen; sie sind entweder sämtlich kongruent oder teils kongruent, teils spiegelbildlich gleich, je nachdem \mathcal{G} eine Gruppe erster oder zweiter Art ist. Diese Polyeder bilden also wieder eine *reguläre Raumteilung* und stellen deren *Fundamentalebenen* dar¹⁴⁶); wir bezeichnen sie durch φ .

In jedem Fundamentalebene φ liegt je eine, die Krystallsubstanz bildende Molekel und zwar an homologer Stelle. Dieser Bereich bildet also den *Spielraum*, in dem die Molekel an *beliebiger* Stelle und von *beliebiger* Qualität angenommen werden kann; *in ihm kann der Krystallograph nach Belieben schalten und walten*. Die in ihm enthaltene Substanz stellt daher die *kleinste krystallographische Einheit* des Aufbaues dar¹⁴⁷).

Der auf die vorstehende Weise sich bildende Fundamentalebene ist immer ein *konvexes* Polyeder; insbesondere bilden sich für die Gitter resp. die Translationsgruppen die soeben in Nr. 44 abgeleiteten Paralleloedertypen. Wir bezeichnen sie in ihrer Bedeutung als Fundamentalebenen der Gitter durch φ_r . Bei den andern Gruppen \mathcal{G}

146) Dieser Fundamentalebene deckt sich im wesentlichen mit dem, was Fedorow als *Stereoder* bezeichnet.

147) Das Verhältnis der krystallographischen Molekel zur physikalischen und chemischen bleibt hier ausser Betracht. Über die Form der Molekeln und die mit ihnen möglichen dynamisch geschlossenen Gruppen, die räumliche Polygone sind, hat kürzlich A. Nold spezielle Hypothesen aufgestellt und näher erörtert; vgl. Zeitschr. f. Kryst. 40 (1904), p. 13 und 433.

kann der Fundamentalbereich φ noch mannigfache Formen annehmen; das zu \mathcal{G} gehörige Punktsystem hängt nämlich von der Wahl des Ausgangspunktes ab, und dieser ist beliebig wählbar.

Was den *rein geometrischen* Begriff des zu einer Gruppe \mathcal{G} gehörigen Fundamentalbereichs betrifft, so ist seine *allgemeinste* Definition *wesentlich allgemeiner*, als die vorstehende¹⁴⁸⁾. Diese Definition besagt, dass das Innere des Bereichs keine zwei homologen Punkte (Nr. 42) enthält, aber von jeder Art homologer Punkte mindestens einen, im Innern oder auf der Oberfläche¹⁴⁹⁾. Er kann im übrigen beliebig begrenzt sein, geradflächig und krummflächig¹⁵⁰⁾, konkav oder konvex, er kann auch in mehrere Teile zerfallen, und dies gilt, was auch \mathcal{G} für eine Gruppe ist¹⁵¹⁾. Es gilt sogar auch für die Translationsgruppen. Insbesondere stellen immer N Fundamentalbereiche φ von \mathcal{G} , die sich aus einem solchen durch die Operationen 7) von Nr. 42 ergeben, einen Fundamentalbereich φ_z der in \mathcal{G} enthaltenen Translationsgruppe dar, und man kann sie immer so wählen, dass sie zusammen ein Polyeder bilden, das freilich nicht immer konvex zu sein braucht.

46. Die Strukturauffassung von E. v. Fedorow¹⁵²⁾. *Fedorow* legt den von ihm abgeleiteten Parallelfächern eine grundlegende Bedeutung für die Struktur der Krystallsubstanz bei, besonders mit Rücksicht darauf, dass ihrer nur eine sehr beschränkte Zahl existiert. Seine Auffassung kann als eine tiefere Ausgestaltung der Ideen von *Hauy* bezeichnet werden¹⁵³⁾. Wesentlich für sie sind zwei grundlegende Vorstellungen. Erstens geht auch er davon aus, dass die Krystallmolekeln parallel orientiert sind; er erblickt insbesondere in seinen konvexen Parallelfächern die natürlichen Einheiten des Krystallaufbaues, und nimmt an, dass die Krystallsubstanz eine lückenlose und regelmässige Wiederholung solcher Bereiche bildet, innerhalb deren sich die Molekeln in ebenfalls paralleler Orientierung befinden. Er be-

148) Vgl. *Schönflies*, Krystallsysteme u. Krystallstruktur, p. 569 ff.

149) Die Punkte der Oberfläche paaren sich im allgemeinen zu je zweien, die einander homolog sind.

150) Man erhält solche, wenn man z. B. die Kugeln durch Ellipsoide ersetzt. Vgl. Lord *Kelvin*, The molecular tactics of a cristall, Oxford 1894.

151) *Fedorow* nahm ursprünglich an, dass dies nur für seine asymmorphen Gruppen zutrifft, und sah hierin einen der Gründe, die gegen ihre kristallographische Wahrscheinlichkeit sprechen; vgl. z. B. *Zeitschr. f. Kryst.* 20 (1892), p. 65 und 24 (1895), p. 239. Diese Annahme trifft aber dem Obigen gemäss nicht zu; sie beruht auf einer irrtümlichen Auffassung der Arbeiten von *Schoenflies*.

152) *Zeitschr. f. Kryst.* 20 (1892), p. 28; 24 (1895), p. 209; 25 (1896), p. 113; 28 (1898), p. 238; 37 (1903), p. 22; vgl. auch den Schluss von Nr. 37.

153) Vgl. *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 587.

zeichnet die Bereiche als *Molekelsphäre*. Er betrachtet sie jedoch nicht als die Molekeln selbst oder als deren Wirkungssphäre, sondern als Bereiche, die sozusagen die Krystallsubstanz bei der Bildung des Krystalles respektiert. Die physikalische Bedeutung des Wortes ist also etwas unbestimmt.

Es sind aber nicht alle Parallelfächner als Molekelsphären zulässig. Bei der grossen Bedeutung, die der Begriff der *Affinität* in der geometrischen und physikalischen Krystallographie besitzt, und da insbesondere alle Krystallformen mit denen höchster Symmetrie affin sind, soll die Molekelsphäre — und dies ist die zweite Grundvorstellung — immer ein solcher Parallelfächner sein, der aus einem höchsten Symmetrie durch affine Veränderung hervorgehen kann¹⁵⁴), d. h. aus einem Würfel, einer sechsseitigen regulären Säule, dem regulären Rhombendodekaeder und dem regulären Kubooktaeder¹⁵⁵). Diese bezeichnet er deshalb als *normale* Paralleloeder; ich bezeichne sie im Folgenden durch Φ . Hierzu kommt endlich noch die durch die Erfahrung geforderte Annahme, dass die Molekeln aus zwei Arten bestehen, die einander spiegelbildlich gleich sind.

Im Anschluss hieran hat *Fedorow* für jede der 230 Gruppen alle diejenigen Raumteilungen bestimmt, bei denen die Fundamentalbereiche entweder normale Paralleloeder Φ sind, oder sich doch zu solchen zusammenschliessen lassen, und teilt darnach die Gruppen resp. die Strukturen in *symmorph*, *hemisymmorph* und *asymmorph*. Die symmorphen Strukturen sind mit den *Bravais'schen* in der Sache identisch; bei ihnen ist nämlich die Zusammenfassung der Fundamentalbereiche (Stereoder) φ in Paralleloeder so möglich, dass diese direkt mit den Fundamentalbereichen φ_z der in \mathcal{G} enthaltenen Translationsgruppe, resp. des zugehörigen Gitters identisch sind; ihre Centra sind die Gitterpunkte, und es werden sich also im Centrum von Φ alle für \mathcal{G} resp. für die bezügliche Krystallklasse charakteristischen Symmetrieelemente schneiden. Die Centra aller Bereiche Φ bilden also ein einziges Raumgitter.

Hemisymmorph nennt *Fedorow* die Gruppe \mathcal{G} resp. die zugehörige Struktur, wenn sich die Fundamentalbereiche φ von \mathcal{G} nur so zu Paralleloedern Φ zusammenfassen lassen, dass sich in den Centren der Paralleloeder nur die Axen der Symmetrie schneiden. Die Symmetriecentren und Symmetrieebenen fallen hier in die Oberfläche dieser

154) *Fedorow* sagt, durch Zug resp. Schiebung.

155) Ausser diesen konvexen Paralleloedern giebt es nur noch ein anderes und zwar einen Zwölfflächner, der von 8 Parallelogrammen und 4 Sechsecken begrenzt ist. Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 66.

Paralleloeder. Je zwei solche Paralleloeder sind einander spiegelbildlich gleich, und erst beide zusammen liefern den Fundamentalbereich φ_z der in \mathcal{G} enthaltenen Translationsgruppe, und bilden damit einen Raumteil, aus dem durch parallel orientierte Wiederholung die ganze Raumteilung sich ergibt. Dieser Bereich ist aber selbst kein konvexes Polyeder. Die Centra der Bereiche Φ bilden in diesem Fall *zwei* Raumgitter, von denen jedes das Spiegelbild des andern ist; je eines wird von den Centren solcher Paralleloeder Φ gebildet, die unter sich kongruent sind.

Bei den asymmorphen Gruppen lassen sich aus den Fundamentalbereichen φ keine Paralleloeder Φ bilden, durch deren Centra alle für die Gruppe charakteristischen Axen gehen. Paralleloederteilungen können allerdings auch hier möglich sein, aber die Paralleloeder gehen nur durch Drehungen oder Schraubungen in einander über. Ihre Centra bilden *mehr als zwei* Raumgitter. Solche Strukturen hält aber *Fedorow* für nicht wahrscheinlich; sie verstossen gegen seine obige Annahme. Er verwirft also alle diejenigen, die nur Schraubenaxen enthalten¹⁵⁶⁾, während gerade sie es waren, die *Sohncke* veranlassten, über die *Bravais'sche* Theorie und die Idee der parallelen Orientierung hinauszugehen.

Übrigens ist die *Fedorow'sche* Vorstellung in sich nicht völlig konsequent. Er postuliert einerseits, dass der Krystall sich aus parallel orientierten konvexen Paralleloedern aufbaut, andererseits sind die beiden Paralleloeder, die bei den hemisymmorphen Systemen zusammen den Fundamentalbereich der Translationsgruppe bilden, nicht parallel orientiert; erst ihre Verbindung stellt einen Bereich dar, der sich in paralleler Lage durch den ganzen Raum wiederholt; dieser aber ist nicht mehr konvex. Allerdings lässt sich diese Inkonsequenz im Rahmen der *Fedorow'schen* Vorstellungen nicht vermeiden¹⁵⁷⁾.

Gemäss dem Vorstehenden ist nach *Fedorow* für die Struktur der Krystallsubstanz nicht allein die *Symmetrie* sondern auch die *Form der bezüglichen Paralleloeder* und ihre *Teilung in Stereoder*¹⁴⁶⁾ charakteristisch. Die Struktur ist also ausser durch die Symmetrie auch durch die Art der Raumteilung bedingt; erkennbar ist sie an der Symmetrie, an den Wachstumsrichtungen und den „polymorphen Varia-

156) Hiergegen polemisiert *Barlow*, Zeitschr. f. Kryst. 27 (1896), p. 449.

157) *Fedorow* bezeichnet die Gesamtmolekel auch als zusammengesetztes Paralleloeder und sagt, dass hier nur die untergeordneten Molekeln einfache Paralleloeder sind; die Paralleloeder „im strengen Sinn des Worts“ seien überall parallel orientiert. Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 116.

tionen¹⁵⁸). Er gelangt so zu so vielen verschiedenen Strukturarten, als es Raumteilungen der eben genannten Art giebt und zwar zu 353 symmorphen, zu 287 hemisymmorphen und zu 1725 asymmorphen¹⁵⁹). Er unterscheidet schliesslich noch ordinäre und extraordinäre. Diese Unterscheidung kommt nur für symmorphie und hemisymmorphie in Frage; extraordinär sind die Strukturen, resp. Raumteilungen, wenn die Paralleloeder Φ , die man aus den Fundamentalbereichen bilden kann, nicht so sind, dass alle charakteristischen Axen durch ihre Centra gehen, sondern wenn sie teilweise auf der Oberfläche liegen. Auch diese hält *Fedorow* nicht für krystallographisch wahrscheinlich¹⁶⁰).

Die Analogie zu *Häuy* tritt auch in *Fedorow's* Ansichten über Spaltbarkeit zu Tage¹⁶¹). Die Spaltung soll immer so eintreten, dass sich alle Paralleloeder längs der gleichen Flächen von ihren benachbarten trennen; dies kann längs einer, zweier und dreier Flächen geschehen. Als Spaltungsebenen treten daher solche auf, die zu den Grenzflächen oder Diagonalfächen der Paralleloeder Φ parallel sind.

47. Die Kugelpackungen. *W. Barlow*¹⁶²) ist der erste gewesen, der die regelmässigen Kugelpackungen ableitete und sie benutzte, um mit ihnen ein Bild gewisser symmetrischer Strukturen zu gewinnen. Auch hat er sie bereits in Bezug auf ihre Dichte untersucht.

Ausführlicher hat sich Lord *Kelvin* mit derartigen Packungen beschäftigt. Seine Vorstellungen berühren sich mit denjenigen von *Fedorow*, ohne jedoch vorläufig nähere Beziehung zu den Symmetriefragen zu besitzen¹⁶³). Lord *Kelvin* geht von der *Bravais'schen* Theorie

158) Vgl. besonders Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 66, 21 (1893), p. 590.

159) Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 218.

160) Die Ansichten *Fedorow's* laufen darauf hinaus, dass er nicht allein die Form der Bereiche, sondern auch ihre Lage zu den Axen und Ebenen der Gruppe, d. h. also, ihre gegenseitige Lage in Betracht zieht. Es gibt Gruppen, die die gleiche Axenverteilung enthalten, und zwar in der Weise, dass alle Axen bei der einen Gruppe Drehungsaxen, bei der anderen Schraubenaxen sind. Die möglichen Paralleloeder sind in beiden Fällen die gleichen, z. B. quadratische oder sechsseitige Säulen, sie haben auch gleiche Lage zu den einzelnen Axen, ihre Lage zueinander ist aber verschieden. Im ersten Falle bilden ihre Grundflächen horizontale Schichten, im zweiten sind sie schraubenartig gelagert. Nur die erste Lagerung hält *Fedorow* für krystallographisch möglich, die zweite, die einer asymmorphen Struktur entspricht, nicht.

161) Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 70.

162) Nature 1883, Nr. 738, p. 186 und 205. Vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 692 sowie die ausführliche Darstellung in den Proc. Roy. Soc. Dublin N. S. 8 (1898), p. 527.

163) Proceed. Roy. Soc. Edinburgh 16 (1889), p. 693; Proc. Roy. Soc. London

aus, hat sie aber so umgebildet, dass er zum Gitter ebenfalls die Bereiche Φ konstruiert, und in ihnen die Krystallbausteine sieht. Er hat insbesondere auch solche regelmässigen Strukturen aufgestellt, bei denen die gitterartig angeordneten Bausteine einander in Punkten berühren, und geprüft, wann sie die höchste mechanische Stabilität besitzen. Die einfachsten Strukturen dieser Art sind die oben erwähnten Kugelpackungen¹⁶⁴). Die Centra der Kugeln, die eine und dieselbe Kugel berühren, bilden immer eines der vier regulären Paralleloeder Φ ; die Zahl dieser Kugeln kann 6, 8 und 12 betragen. Die am wenigsten dichte und stabile Packung ist diejenige, bei der jede Kugel von 6 andern berührt wird, so dass Φ ein Würfel ist; die dichteste und stabilste ist diejenige, bei der es 12 sind, die ein reguläres Rhombendodekaeder bestimmen; je 8 Kugeln treten für die sechsseitige Säule und das Kubooktaeder auf¹⁶⁵).

Durch affine Veränderung kann man derartige Packungen aus Ellipsoiden erhalten, die sich je nur in einem Punkt berühren; dabei gehen die regulären Paralleloeder in diejenigen über, die *Fedorow* als normale (Nr. 46) bezeichnet. Man kann also Kugeln und geeignete Ellipsoide so lagern, dass ihre Symmetrie und Struktur mit derjenigen eines der 14 Raumgitter, d. h. also mit der Holoedrie eines der sieben Krystallsysteme identisch ist¹⁶⁶).

Die dynamischen Vorstellungen über das molekulare Verhalten der Krystallsubstanz, die Lord *Kelvin* auf Grund dieser Strukturhypothese ausgebildet hat, beruhen wesentlich darauf, dass die Molekeln von anziehenden und abstossenden Kräften bewegt werden, die in den Molekelcentren ihren Sitz haben, und deren Intensität von der Entfernung abhängt¹⁶⁶). Für manche Erscheinungen benutzt er auch die Vorstellung, dass man zwei Molekelsysteme, die der dichtesten Packung entsprechen, bei denen also jede Molekel von 12 andern rhombendodekaedrisch umgeben ist, in gewisser Weise kombiniert, und zwar so, dass jede Molekel des einen Systems von je viere des andern Systems in der Weise umgeben ist, dass diese ein reguläres Tetraeder bilden, und jene dessen Mittelpunkt innehat¹⁶⁷).

55 (1894), p. 1 u. *The Molecular Tactics of a Crystal*, Oxford 1894. Vgl. auch *Math. u. phys. papers* 3, p. 395.

164) Sie werden auch schon in *Fedorow's* *Gestaltenlehre* (1885) erwähnt. Vgl. auch *Zeitschr. f. Kryst.* 28 (1897), p. 232. Vgl. auch *E. Feerett*, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 1 (1904), p. 437.

165) Rein geometrisch sind es beim Kubooktaeder 14 Kugeln; diese durchdringen aber einander. Materielle Kugeln giebt es daher nur acht.

166) *Phil. Mag.* (5) 36 (1893), p. 414 u. *Proc. Roy. Soc. London* 54 (1894), p. 59.

167) *Phil. Mag.* (6) 4 (1902), p. 139. Vgl. auch ähnliche Vorstellungen in

*Barlow*¹⁶⁸) und im Anschluss an ihn *W. J. Sollas*¹⁶⁹) haben die Strukturen Lord *Kelvin's* so verallgemeinert, dass sie auch Kugeln von zwei und drei verschiedenen Grössen benutzen, einerseits um möglichst dichte Lagerungen herbeizuführen, andererseits um Bilder solcher Substanzen zu gewinnen, bei denen man die Molekel (um dem verschiedenen Molekularvolumen der einzelnen chemischen Bestandteile gerecht zu werden) als aus zwei und drei verschiedenen Atomen oder Atomgruppen bestehend betrachten muss. *Barlow* macht überdies für ihre Wirkung aufeinander solche Annahmen, dass die Molekeln dem Ziel der dichtesten Lagerung zustreben.

Der Problem der dichtesten Kugelpackungen ist einer mathematischen Verallgemeinerung fähig, indem man die Kugeln durch irgend welche kongruente *konvexe*, sich nirgends durchdringende Körper ersetzt. Eine erste Lösung desselben, die jedoch nicht fehlerfrei ist, gab Lord *Kelvin*¹⁷⁰). Nach ihm giebt es nur solche Packungen, bei denen sich jeder einzelne Körper entweder auf die Oberfläche von 12 anderen stützt, die ein Rhombendodekaeder bilden, oder aber von 14, die ein Kubooktaeder bilden. Eine abschliessende Behandlung verdankt man *H. Minkowski*¹⁷¹). Er bestimmt, falls der konvexe Körper *K* — den man übrigens als Körper mit Mittelpunkt voraussetzen darf — beliebig gegeben ist, dasjenige aus den Körpermitteln bestehende Gitter, das für ihn die dichteste Lagerung bewirkt; er findet insbesondere, dass dieses auf *drei* verschiedene typische Arten möglich ist; darunter eine, die Lord *Kelvin* entgangen ist¹⁷²). Es bleibt noch die Frage, ob, wenn der Ausgangskörper symmetrisch ist, auch das zugehörige Raumgitter symmetrisch ist, und zwar so, dass auch das *Molekelgitter*

3 (1902), p. 257. Dies stimmt mit gewissen analogen Resultaten über isomorphe Körper überein. Die *Cauchy'sche* Molekulartheorie, die mit Centralkräften zwischen punktuellen Molekeln operiert, führt im Gebiet der Elastizitätstheorie zu einer unrichtigen Gleichung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten. Dies wird durch den *Poisson'schen* Ansatz, der den Molekeln ihre Körperform lässt, und demgemäss mit Kräften und Kräftepaaren operiert, vermieden. Vgl. auch die ausführliche Darstellung von *W. Voigt*, Abhandl. d. Gött. Ges. d. Wiss. Bd. 34 (1887).

168) Report of the British Assoc. 1891, p. 581 u. Zeitschr. f. Kryst. 29, p. 433 (1898).

169) Proc. Roy. Soc. London 63 (1898), p. 270 u. 67 (1900), p. 495.

170) The Baltimore Lectures on molecular dynamics, 2. Aufl., London 1904, p. 618 ff.

171) Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1904.

172) Lord *Kelvin* geht bei seinem Ansatz von der nicht zutreffenden Annahme aus, dass bei der dichtesten Lagerung immer vier sich gegenseitig berührende Körper auftreten, wie bei den Kugeln.

selbst Symmetrie besitzt; insbesondere ob man zu Molekelgittern für jede der 32 Symmetrieklassen gelangt. Erst dann würden diese Packungen im Sinne der Strukturtheorien der Symmetrie der Krystalle entsprechen. Diese Frage ist bisher nicht untersucht worden.

Fedorow, der in seiner Gestaltenlehre die Kugelpackungen ebenfalls abgeleitet hat, hält die Vorstellung von Lord *Kelvin* deshalb für nicht wahrscheinlich¹⁷³⁾, weil die Krystalle nicht die Tendenz zeigten, die rhombendodekaedrischen Formen auszubilden, die den dichtesten Packungen entsprechen, sondern vielmehr solche Formen, die bei einem Minimum der Oberfläche den grössten Inhalt haben, nämlich die kubooktaedrischen¹⁷⁴⁾.

48. Beziehungen der verschiedenen Strukturtheorien zu einander. *L. Sohncke* hat in seinen Arbeiten dem Begriff der regelmässigen Anordnung nicht die in Nr. 41 erörterte allgemeine Bedeutung gegeben. Er ging von der beschränkenden Annahme aus, dass die Regelmässigkeit in *Deckbewegungen* resp. in der *Kongruenz* des Molekelhaufens mit sich zum Ausdruck kommt¹⁷⁵⁾ und operiert deshalb nur mit *Bewegungsgruppen*. Die Bewegungsgruppen führen jedoch, wenn man die Molekel *beliebig* annimmt, ihrer Natur nach nur zu Molekelhaufen mit *Axensymmetrie*. Dies tritt in *Sohncke's* ersten Arbeiten nicht deutlich hervor, weil er in ihnen nicht mit den Molekelhaufen, sondern mit den Punktsystemen operierte und im Punkt gelegentlich nicht den *formalen*, sondern den *wirklichen* Vertreter der Molekel sah. Punktsysteme, deren Symmetrie über diejenige der bezüglichen Bewegungsgruppe hinausgeht, kann man dann, wenn überhaupt, nur so ableiten, dass man dem konstituierenden Punkt eine *besondere Lage* zu den Axen der Gruppe anweist¹⁷⁶⁾. Die Symmetrie der Struktur beruht aber dann nicht ausschliesslich auf der Anordnung, sondern auch auf der Symmetrie der Molekel, ähnlich wie es bei den *Bravais'schen* Gittern der Fall ist.

Sohncke hat deshalb, als die Arbeiten von *Fedorow* und *Schönflies* erschienen waren, seine Theorie etwas erweitert¹⁷⁷⁾. Er meinte, alle

173) Zeitschr. f. Kryst. 28 (1898), p. 232.

174) Vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 27 (1897), p. 43, wo *Fedorow* zeigt, dass bei gegebenen Volumen mit höherer Symmetrie die Oberfläche kleiner wird.

175) Entwicklung einer Theorie der Krystalstruktur, p. 28. Es muss aufpassen, dass *Sohncke* im Gegensatz hierzu bei der Ermittlung aller regelmässigen ebenen Punktsysteme die Regelmässigkeit im Sinne von Nr. 41 gefasst hat. Vgl. J. f. Math. 77 (1873), p. 48.

176) Für die Verwendung der 65 Gruppen zur Erzeugung von Punktsystemen bestimmter Symmetrie vgl. *L. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 503 ff.

177) Zeitschr. f. Kryst. 14 (1888), p. 426 u. 25 (1896), p. 529

Fälle zu umfassen, wenn er den erzeugenden Raumpunkt durch eine Gruppe von n Punkten ersetzt, die nunmehr zusammen die erzeugende Molekel versinnbildlichen. Die Einführung dieser n -Punktner hat übrigens einen doppelten Zweck. Ein aus einer Raumgruppe abgeleitetes Punktsystem kann nämlich infolge der Symmetrie des Punktes, die derjenigen einer *Kugel* gleich ist, unter Umständen eine höhere Symmetrie erhalten, als der bezüglichen Raumgruppe entspricht¹⁷⁸⁾; in einem solchen Fall soll der unsymmetrische n -Punktner die Symmetrie des Punktsystems *negativ* beeinflussen. Er soll sie zweitens auch *positiv* beeinflussen, was natürlich nur bei besonderer Wahl der n Punkte möglich ist¹⁷⁹⁾.

Zu diesem Behuf genügt es aber Zwei-Punktner zu verwenden, und zwar ist dies für alle diejenigen Krystalle nötig, die einer Gruppe zweiter Art entsprechen. Ist nämlich \mathcal{G} irgend eine Gruppe zweiter Art und \mathcal{G}' die in ihr enthaltene Bewegungsgruppe, so hat man zu dem Punktsystem, das mit \mathcal{G}' gebildet ist, nur diejenigen Punkte hinzuzufügen, die sich aus ihnen durch die in \mathcal{G}' enthaltenen Operationen zweiter Art ergeben. Dabei sind die Punkte von \mathcal{G}' Vertreter von kongruenten Molekeln, die übrigen Punkte vertreten Molekeln, die ihnen spiegelbildlich gleich sind; je zwei von ihnen zusammen bilden die erzeugende Molekel im Sinne *Sohncke's*. Beschränkt man also *Sohncke's* erweiterte Theorie auf den vorstehend genannten Fall, so ist sie von der reinen Strukturtheorie geometrisch nur in der Bezeichnung unterschieden. Allerdings ist die Frage, wie der zweite Raumpunkt anzunehmen ist, gerade die Hauptsache, und ihre volle Beantwortung ist nichts anderes als die Ableitung der 165 Gruppen zweiter Art.

Die Beziehung der *Bravais's*chen Theorie zu den allgemeineren Strukturtheorien ist bereits in Nr. 40 angedeutet worden. Konstruiert man um die Gitterpunkte die Paralleloeder Φ , so enthält jedes von ihnen je eine *Bravais's*che Molekel. Löst man die *Bravais's*chen Molekeln in ihre N gleichartigen Bestandteile auf, so liegen diese N Bestandteile symmetrisch um die Gitterpunkte herum und man kann Φ in N einander teils kongruente, teils spiegelbildliche Teile zerlegen, so dass jeder dieser Teile einen dieser Bestandteile einschliesst. Jeder dieser Teile stellt überdies einen Fundamentalbereich φ derjenigen

178) Ein einfaches Beispiel liefert die cyklische Gruppe C_n , die zu n Ecken eines regulären n -Ecks als zugehörigem Punktsystem führt. Dieses Punktsystem gestattet *stets* auch Umwendungen um die Symmetrieachsen des Polygons.

179) Einzelne Systeme obiger Struktur gab bereits *I. Haag* an, Programm d. Gymn. Rottweil, 1887.

Gruppe \mathcal{G} dar, die den allgemeineren Molekelhaufen in sich überführt, der durch Auflösung jeder *Bravais'schen* Molekel in ihre N Bestandteile entstanden ist.

Ist dagegen \mathcal{G} *irgend eine andere* Raumgruppe, so existiert zwar für sie (Nr. 42) immer noch eine Gruppe von Translationen und man kann zu ihr resp. um die Gitterpunkte immer noch die Fundamentalbereiche Φ des Gitters konstruieren. Auch jetzt noch liegen in jedem Φ die N Punkte, die den N Molekeln entsprechen, aber sie liegen nicht mehr symmetrisch gegen die Mittelpunkte von Φ , sondern haben allgemeinere Lage. Demgemäss bilden auch die zu ihnen gehörigen N Fundamentalbereiche φ nicht mehr das konvexe Paralleloeder Φ , sondern ein komplizierteres konkav-konvexes Paralleloeder, das ebenfalls ein Fundamentalbereich φ_r des Gitters ist; und dieses Paralleloeder füllt ebenfalls in gleicher Orientierung lückenlos den Raum aus. Man hat also auch hier lauter parallel orientierte Molekelkomplexe¹⁸⁰⁾.

Für die Anschauung ist es einfacher, auch in diesen Fällen von den Bereichen Φ und ihrer Anordnung auszugehen, in jeden von ihnen die N Molekeln hineinzusetzen¹⁸¹⁾ und mit N in einander stehenden Gittern zu operieren (Nr. 42). Man darf aber nicht vergessen, dass eine *beliebige* Wahl dieser N Molekeln in Φ die Symmetrie der Struktur nicht verbürgt, und dass dies nur dann der Fall ist, wenn ihre Lage eine solche ist, wie sie einer der 230 Gruppen \mathcal{G} entspricht¹⁸²⁾.

Um endlich die *Fedorow'schen* Strukturen in dieser Hinsicht zu charakterisieren, ist zunächst folgendes zu bemerken. Man kann die ganz allgemeine Frage stellen, wie man überhaupt die Krystalsymmetrie zerlegen kann, so dass ein Teil durch die Molekelsymmetrie repräsentiert wird, während der andere Teil in der Anordnung, also der eigentlichen Struktur zum Ausdruck kommt. Die mathematische Erörterung dieser Frage führt zu folgendem Resultat¹⁸³⁾. Ist \mathcal{G} irgend eine der 230 Raumgruppen, so kann es vorkommen, dass

180) Es kann hier nicht erörtert werden, ob es krystallographisch zweckmässiger ist, die Molekeln oder die Molekelkomplexe als die individuellen Einheiten aufzufassen.

181) In dieser Weise hat *Mallard* die von ihm benutzten allgemeinen Strukturen konstruiert; vgl. Anm. 57.

182) Die Krystallographen haben hierauf nicht immer Rücksicht genommen; vgl. *Mallard* a. a. O. u. *Lord Kelvin* a. a. O.

183) *Schönflies*, Krystalsysteme, p. 601 und Nachr. d. Götting. Ges. d. Wiss. 1890, p. 239.

☉ eine der 32 Punktgruppen als Untergruppe enthält; sie sei G' . Es giebt dann unendlich viele Punkte des Raumes, durch die alle für G' charakteristischen Symmetrieelemente hindurchgehen; um diese Punkte herum ordnen sich die Fundamentalbereiche zu symmetrischen Polyedern P zusammen, die die Symmetrie der Gruppe G' besitzen, und die sich ebenfalls lückenlos durch den Raum fortsetzen. Man könnte daher auch in diesen Polyedern P , resp. in den in ihnen enthaltenen Molekelkomplexen, deren Symmetrie der Gruppe G' entspricht, die Einheit des Aufbaues erblicken.

Die Strukturen, die *Fedorow* allein als krystallographisch wahrscheinlich hält, sind nun dadurch definierbar, dass bei ihnen die Gruppe G' entweder geradezu diejenige Gruppe G ist, die mit ☉ isomorph ist, oder diejenige Untergruppe von G , die aus allen Bewegungen von G besteht. Dem ersten Fall entsprechen die symmorphen Systeme, dem zweiten Fall die hemisymmorphen. Im ersten Fall ist also wie bei *Bravais* die Symmetrie der Krystallmolekel mit der spezifischen Krystalsymmetrie identisch; im zweiten zerfällt der Krystall in zwei Arten spiegelbildlich gleicher Molekeln, deren Axensymmetrie mit der spezifischen Krystalsymmetrie übereinstimmt und deren Centra zwei Raumgitter bilden. Dies sind diejenigen Strukturen, die *Fedorow* zu den *Bravais*'schen hinzufügt. Eine weitere Eigenschaft der *Fedorow*'schen Vorstellungen ist dann noch die für ihn charakteristische Bevorzugung der vier obengenannten Parallelfächner und ihre Bedeutung für die Ausbildung der Krystallflächen.

C. Zur Prüfung der Strukturtheorien an der Erfahrung.

Von O. Mügge in Königsberg.

49. Einleitung. Nachdem die 32 Symmetrieklassen der endlichen Figuren bekannt geworden waren, sind mit Hilfe von Winkelmessungen und Beobachtung der Ätzfiguren, des pyroelektrischen Verhaltens, Untersuchung auf Zirkularpolarisation u. a. unter den natürlichen und künstlichen Krystallen Vertreter von 29 jener Klassen aufgefunden, während von drei Klassen (tetragonal-sphenoidische Tetartoedrie; hexagonal-trigonale Hemiedrie¹⁸⁴) und Tetartoedrie) solche bisher nicht oder nicht mit Sicherheit bekannt geworden sind. Diejenigen Elemente dagegen, welche geeignet wären für Krystalle derselben Symmetrieklasse G die jedem einzelnen zukommende Raum-

184) Hierher gehört nach den Untersuchungen von *H. Dufet* (Bull. soc. franç. de min. 9 (1886), p. 36) das zweibasische Silberorthophosphat.

klasse \mathcal{O} zu bestimmen, nämlich die Zahl der Arten der parallel denselben Richtungen verlaufenden Axen und Ebenen der einfachen und zusammengesetzten Symmetrie und die Grösse der Deckschiebungen, sind bisher in keinem Falle vollständig und unzweifelhaft bekannt, vielmehr nur z. T. und mit einiger Wahrscheinlichkeit und auch dies nur für wenige Krystalle ermittelt. Auch nach Bestimmung der Raumgruppe würde zur vollständigen Kenntnis der Struktur noch erforderlich sein die Fixierung der Lage der Kristallmoleküle zum Axensystem der Gruppe bzw. zum Fundamentalbereich (vgl. *Schoenflies* Nr. 20) wie die Bestimmung von Form und Beschaffenheit der Moleküle¹⁸⁵), Aufgaben, deren Lösung noch kaum in Angriff genommen ist.

50. Formen der Krystalle. Vielfache Versuche sind gemacht worden, aus der Art und Grösse der auftretenden Formen wenigstens die Art des Raumgitters, d. h. das primitive Tripel der drei kleinsten Deckschiebungen festzustellen. Aus dem Umstande, dass Flächen mit komplizierten Indizes nur selten auftreten, solche aber nur sehr dünn mit Netzknoten besetzt sein würden¹⁸⁶), hat man geschlossen, dass an jedem Krystall diejenigen Flächen vorherrschen werden, welche am dichtesten mit Teilchen besetzt sind¹⁸⁷). Damit steht in guter Übereinstimmung, dass, wie zuerst *P. Curie*¹⁸⁸) dargelegt hat, an einem Krystall *ceteris paribus* diejenigen Flächen zur Ausbildung gelangen werden, für welche die Oberflächenspannung im Kontakt mit der Mutterlauge ein Minimum ist, was dann eintritt, wenn die Oberfläche so dicht wie möglich mit Teilchen besetzt ist¹⁸⁹). Die Anwendung

185) *Schoenflies*, Krystallsyst. u. Krystallstruktur 1891, p. 609.

186) Da eine jede Ebene eines regelmässigen Punktsystems, welche unendlich viele Punkte desselben enthält, einer Ebene, welche durch drei Punkte eines seiner Raumgitter geht, parallel ist, gilt das Rationalitätsgesetz auch für jede solche Ebene (*Sohncke*, Ann. Phys. Chem. 16 (1882), p. 489).

187) *Schoenflies* Nr. 38, Anm. 119.

188) *P. Curie*, Bull. soc. franç. de min. 8 (1885), p. 145.

189) Nach *Mallard* (Traité de cristallographie 1 (1879), p. 303) sind die inneren Kräfte, die auf einen in seiner Mutterlauge wachsenden Krystall an der Oberfläche einwirken, im allgemeinen erheblich grösser als die äusseren, namentlich von der Lösung ausgehenden. Gleichgewicht zwischen beiden kann nur bestehen, wenn erstere hinreichend klein werden, was dann am ehesten eintreten soll, wenn die Maschen der Grenzflächen möglichst eng werden. — Für die Berechnung der Netzdichten bestimmter Ebenen in den Raumgittern hat *Bravais* (Études cristall. in Journ. de l'éc. polyt. 20, Paris 1851, p. 156) Formeln entwickelt; die Lage der Punkte in beliebigen Ebenen einiger Sohncke'scher Punktsysteme regulärer Symmetrie ist von *Fr. Haag* untersucht (Zeitschr. f. Kryst. 15 (1889), p. 589). Das von *Fr. Haag* (Die regulären Krystallkörper, Progr. Gymn. Rottweil 1887) für reguläre Krystallformen berechnete Verhältnis zwischen

dieses Grundsatzes wird, abgesehen davon, dass eine *quantitative* Beziehung zwischen Netzdicke und Flächen-Häufigkeit und -Grösse dadurch nicht gegeben ist, durch folgende, z. T. schon von *Bravais*¹⁹⁰⁾ selbst hervorgehobene Umstände sehr erschwert bzw. unmöglich gemacht:

a) Die Indices der Krystallflächen sind nicht immer einfache Zahlen¹⁹¹⁾; auch bei den an den Krystallen vorherrschenden Flächen sind sie vielfach nur vicinal zu solchen¹⁹²⁾.

b) Welche Flächen für Krystalle einer Art als die herrschenden zu betrachten sind, wäre nur durch eine umfangreiche statistische Untersuchung aller an *allen* Krystallen dieser Art bekannten Flächen zu ermitteln. Das Resultat einer solchen Untersuchung wäre gleichwohl von geringem Gewicht, denn es ist bekannt, wie auch nach *P. Curie's* Hypothese zu erwarten, dass der Habitus der Krystalle in hohem Grade von den Umständen bei ihrer Bildung abhängt, derart, dass z. B. bei künstlichen Krystallen durch bestimmte Zusätze zur Mutterlauge ein vollständiger Wechsel der auftretenden Formen bewirkt werden kann, ohne dass die Struktur, soweit sie in den physikalischen Eigenschaften zum Ausdruck kommt, eine merkliche Änderung erfährt¹⁹³⁾.

c) Die Raumgitter sind ihrem Begriffe nach zentrisch-symmetrisch, daher Fläche und Gegenfläche gleichartig erscheinen, während dies bei Krystallen durchaus nicht allgemein der Fall ist.

Die schon von *Frankenheim*¹⁹⁴⁾ und *Bravais*¹⁹⁵⁾ angestellten, dann

Oberfläche und Volumen ist ebenfalls von physikalischer Bedeutung, u. a. für die absolute Grösse der Krystalle.

190) *Bravais*, l. c. 20, p. 168.

191) Solche mit komplizierten Indizes sind z. B. beobachtet am Anatas (*Seligmann*, Zeitschr. f. Kryst. 11 (1886), p. 337), am Wolfsbergit (*Penfield* und *Frenzel*, Amer. Journ. of sc. 4 (4) (1897), p. 27) u. a.

192) Vgl. *M. Schuster*, Tschermaks min. u. petr. Mitteil. 5 (1883), p. 397, u. 6 (1885), p. 301 (Danburit), ferner *Miers*, London, Phil. Trans. Roy. Soc. 202 A (1903), p. 459. Danach ändern sich die Indices der Vicinalflächen der Alaunoktaeder während des Wachstums derselben und zwar bemerkenswerterweise nicht stetig, sondern sprungweise.

193) Z. B. Steinsalz, Alaun. Wird die Formänderung durch Aufnahme von Farbstoffen hervorgerufen, so können diese in sonst farblosen Krystallen Pleochroismus bewirken (*Gaubert*, Bull. soc. franç. de min. 23 (1900), p. 211; 25 (1902), p. 223; 28 (1905), p. 180), mit welchem öfter geringe Änderungen der Brechungsexponenten Hand in Hand gehen (*Dufet*, Bull. soc. franç. de min. 13 (1890), p. 271; *Hlawatsch*, Zeitschr. f. Kryst. 27 (1897), p. 605).

194) System der Krystalle in Leopoldina, Nova Acta Acad. nat. cur. 19 (1842), p. 471. Die Ordnungen, in welchen dort die bis dahin bekannten natür-

von *Sohncke*¹⁹⁶), *Mallard*¹⁹⁷), *v. Fedorow*¹⁹⁸), *Muthmann*¹⁹⁹) und *Tutton*²⁰⁰) u. a. wiederholten Versuche, die Krystallen bestimmter Art zukommende Struktur aus der Art, Häufigkeit und Grösse der auftretenden Krystallflächen zu ermitteln, sind daher alle mit grosser Unsicherheit behaftet und haben gerade für die wenigen Krystalle, über deren Struktur, wenn man sie als raumgitterartig annimmt, sich etwas Sicheres aussagen lässt, meist zu Ergebnissen geführt, welche mit den nach anderen, sichereren Methoden gewonnenen in Widerspruch stehen. Ebenso können die Betrachtungen von *G. Friedel*²⁰¹), der den Zwillingsflächen eine besonders grosse Bedeutung für die Struktur zuschreibt, nicht befriedigen. Er geht von der Thatsache aus, dass manche Krystalle (sog. mimetische) Zwillingsbildung namentlich nach solchen Flächen und Kanten eingehen, welche für ihren Flächenkomplex nahezu, aber im allgemeinen nicht ganz, Symmetrieebenen bzw. Symmetrieachsen sind, gewisse Flächen des einen Krystalls daher gewissen (im allgemeinen physikalisch ungleichwertigen) des zweiten nahezu parallel werden. Schreibt man den Krystallen also Raumgitterstruktur zu, so wird nahezu in der Verlängerung gewisser Punktreihen des einen Gitters über die Grenzfläche beider hinaus eine Punktreihe des zweiten liegen; dasselbe gilt von den Netzebenen. *Friedel* macht nun die Annahme, dass allgemein dieser Umstand wesentlich für das Zustandekommen einer Zwillingsverwachsung sei, dass man daher unter den für eine Krystallart möglichen und nach ihrem

lichen und künstlichen Krystalle zusammengefasst sind, entsprechen je einer seiner Strukturarten.

195) *Études* 1, p. 171—191. Es werden dort als Beispiele für die Raumgitter einzelne Minerale namhaft gemacht; *Br.* giebt aber keine eingehende Begründung, sondern empfiehlt seine Annahmen mehr den Beobachtungen der Mineralogen.

196) Namentlich *Zeitschr. f. Kryst.* 13 (1888), p. 230.

197) *Traité de crist.* 1, cap. XVI, 1879.

198) *Zeitschr. f. Kryst.* 20 (1892), p. 74. Die hier für die als Metaleucit und Metaboracit bezeichneten Modifikationen des Leucit bzw. Boracit angegebenen Strukturen sind mit ihrem optischen Verhalten in Widerspruch; auch ist nicht ersichtlich, worauf sich die Annahme dieser Strukturen und der für Perowskit angenommenen gründet.

199) *Zeitschr. f. Kryst.* 22 (1894), p. 520. Die dort für das Monokaliumphosphat und Verwandte zum Zweck der Berechnung des sog. topischen Axenverhältnisses angenommene Struktur erscheint sehr unsicher, abgesehen davon, dass die angenommene Symmetrieklasse sich als nicht richtig erwiesen hat.

200) *Zeitschr. f. Kryst.* 24 (1895), p. 26.

201) *Études sur les groupements cristallins* (Bull. soc. de l'industrie minérale (4) 3 u. 4, Saint-Étienne 1904).

Habitus wahrscheinlichen Gittern dasjenige wählen müsse, bei welchem möglichst viele Punktreihen des einen Gitters und möglichst nahe in die Verlängerung des damit verzwillingten fallen. Abgesehen davon aber, dass das Gitter eines Krystals so nicht eindeutig zu bestimmen ist, muss es sehr zweifelhaft erscheinen, ob die Annahme *Friedel's allgemein* berechtigt ist. In Wirklichkeit ist z. B. das nach diesem Gesichtspunkte für ein mimetisches Mineral, nämlich Aragonit, angenommene Raumgitter mit den einfachen Schiebungen desselben nicht verträglich (vgl. S. 489 u. Anmerkung 226).

Nach *v. Fedorow*²⁰²⁾ entsprechen die „Wachstumsrichtungen“ eines Krystals den Flächen seiner Paralleloeder, welche die Form der Molekülsphäre für ihn vorstellen. Zu einer jeden Fläche des Paralleloeders gehört eine (dazu im allgemeinen nicht senkrechte) Wachstumsrichtung, deren Indices bei geeigneter Orientierung die gleichen sind und nur die Werte 0 und 1 annehmen. Die Paralleloeder sind nach seinen Beobachtungen über das Wachstum²⁰³⁾ in allen Fällen die durch die kleinste Oberfläche bei gleichem Volumen ausgezeichneten Heptapalleloeder. Später²⁰⁴⁾ ist *v. Fedorow* durch die Diskussion der Indices der Flächen von acht flächenreichen regulären Krystallen zu dem Schluss geführt, dass sämtlichen regulären Krystallen hexaedrische Struktur zugeschrieben werden muss; indessen ist er neuerdings²⁰⁵⁾ zu der Überzeugung gekommen, dass das bis jetzt von ihm „angewandte Verfahren nicht imstande ist, auf festem Boden die Strukturart aufzuklären“.

*F. Becke*²⁰⁶⁾ schliesst aus der wichtigen Rolle, welche die Oktaederflächen bei der Ätzung des Flussspates, und zwar unabhängig von der Natur des Ätzmittels spielen, dass ihnen eine besondere strukturelle Bedeutung zukomme, welche sich vermutlich auch in der oktaedrischen Spaltung zeigt und auf eine Verwandtschaft mit einem *Bravais'schen* oktaedrischen Gitter (Würfel mit zentrierten Flächen) schliessen lässt.

202) *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 69.

203) *F.'s* Mitteilungen (auch diejenigen in Zeitschr. f. Kryst. 28 (1897), p. 235) reichen nicht aus, das Gewicht seiner Beobachtungen zu beurteilen. Er betont, dass die Heptapalleloeder nicht der dichtesten Kugelpackung entsprechen.

204) *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 223.

205) *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 40 (1905), p. 530.

206) *F. Becke*, Tschermaks min. u. petr. Mitteil. 11 (1890), p. 421. Ähnlich *H. Baumhauer* am Anatas, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 255; er betont mit Recht, dass ein Schluss aus Form und Lage der Ätzfiguren auf die Struktur im allgemeinen nicht statthaft ist, da beide mit der Natur, Konzentration und Temperatur des Ätzmittels veränderlich sind.

51. Die Spaltung. Die Fähigkeit der Krystalle, nach ebenen Flächen von bestimmter Lage, nicht aber mit annähernd gleicher Vollkommenheit auch nach den ihnen nächst benachbarten Ebenen spaltbar zu sein, weist, wie neuerdings u. a. v. *Fedorow*²⁰⁷⁾ und namentlich *G. Friedel*²⁰⁸⁾ betont haben, auf sprungweise Änderung der Kohäsion und damit auf die Unstetigkeit der Krystallsubstanz hin. Sie hat zuerst *Torbern Bergman*²⁰⁹⁾, dann *Haily* auf die Idee geführt, die Krystalle sich aus kleinen Teilchen von der Form der Spaltungskörper aufgebaut zu denken; diese Teilchen wurden schliesslich von *Bravais*²⁰⁹⁾ durch diskrete Massenpunkte ersetzt. Er berücksichtigte, wie auch schon *Frankenheim*²¹⁰⁾ und später fast alle Autoren, die Spaltungsebenen namentlich bei der Aufstellung der Krystalle, indem er ihnen die einfachsten Indices beilegte. Diese erscheinen dann in den Raumgittern als die am dichtesten besetzten Ebenen, haben gleichzeitig den grössten Abstand, und in ihnen ist daher die zur Ebene parallele (tangentielle) Kohäsion ein Maximum, die dazu senkrechte ein Minimum. Im Einklang damit steht in der Tat, dass alsdann auch die meisten und namentlich die häufigsten Krystallflächen in der Regel einfache Indices erhalten, dass ferner bei Krystallen mit sehr vollkommener monotomer Spaltbarkeit (z. B. glimmerähnliche Substanzen) die sonst noch auftretenden Krystallflächen meist *steil* zu der Spaltfläche geneigt sind, was also auf grossen Abstand der der Spaltfläche parallelen Netzebenen schliessen lässt; dass endlich bei regulären Krystallen, wo das Verhältnis zwischen Netzdichte und Abstand der Netzebenen für Flächen von einfachen Indices (wie es die Spaltflächen regulärer Krystalle stets sind) keine so extremen Werte annehmen kann wie in Systemen niederer Symmetrie, auch Beispiele so vollkommener Spaltbarkeit wie in letzteren kaum bekannt sind und Analoges auch zutrifft beim Vergleich der Vollkommenheit der Spaltung nach Flächen prismatischer und pyramidalen einfacher Formen mit der nach pinakoidalen. Indessen bemerkte schon *Bravais*, dass die Vollkommenheit der Spaltung nach einer Fläche und die Häufigkeit ihres Vorkommens als Krystallfläche keineswegs stets Hand in Hand gingen, wie es nach seiner Theorie zu erwarten war. In der Tat ist anzunehmen, dass für die Spaltbarkeit beiderseits der Spalt-

207) v. *Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 15 (1889), p. 116.

208) *G. Friedel*, Bull. soc. franç. de min. 28 (1906), p. 95.

209) Litteratur bei *Sohncke*, Entw. einer Theorie d. Krystallstruktur, 1879, p. 8.

210) *Frankenheim*, Syst. d. Krystalle in Leopoldina, Nova Acta etc. 19^a (1842), p. 471.

ebene dieselben Kräfte in Frage kommen, für die Bildung der Krystallflächen ganz verschiedene.

Im Speziellen wäre gegen *Bravais'* Annahme hinsichtlich der Ursache der Vollkommenheit der Spaltung namentlich geltend zu machen, dass danach die Vollkommenheit der Spaltung bei allen nach derselben Form spaltbaren regulären Krystallen genau dieselbe sein müsste, nur undeutlich spaltbare, wie Granat, Analcim, Spinelle etc. neben so vollkommen spaltbaren wie Bleiglanz, Zinkblende etc. dürften nicht vorkommen; auch müsste die Vollkommenheit der hexaedrischen Spaltbarkeit zu der der oktaedrischen und dodekaedrischen allemal in einem konstanten Verhältnis stehen, wenn es, wie angenommen, auf die Qualität der Moleküle nicht ankäme. Das ist indessen kaum zulässig; so ist es denn auch kaum gelungen, durch die Annahme bestimmter Gitter das Vorkommen vollkommener Spaltbarkeit gleichzeitig nach verschiedenen Flächen dem Verständnis näher zu bringen und die Resultate von Versuchen, aus der Spaltbarkeit auf die Art des Gitters zu schliessen, sind z. T. sehr zweifelhaft²¹¹), z. T. unrichtig²¹²).

Wie *Sohncke*²¹³) gezeigt hat, fallen in den regelmässigen Punktsystemen die Bedingungen grössten Abstandes zweier paralleler Nachbarbenen und dichtester Besetzung derselben nicht zusammen, und die Vollkommenheit der Spaltung kann auch bei regulären Krystallen sehr verschiedene Grade annehmen. Dieser Umstand würde also in der Tat regelmässige Punktsysteme zur Erklärung der Spaltbarkeit besser geeignet erscheinen lassen als die Raumgitter, indessen fehlt es jetzt zugleich an einem Kriterium für die Vollkommenheit der Spaltung, weil der Begriff der Netzdichtigkeit wie des Abstandes der Spaltebenen zunächst seinen Sinn verliert. Die von *Sohncke* darüber (l. c.) gemachten Annahmen sind im Grunde willkürlich, auch auf bestimmte Krystalle nicht anwendbar, da bei keinem über die das Punktsystem bestimmenden Konstanten auch nur Vermutungen berechtigt sein würden²¹⁴).

211) Vgl. z. B. *W. Muthmann*, Zeitschr. f. Kryst. 15 (1889), p. 73.

212) So an dem krystallographisch und physikalisch von *Tutton* so ausserordentlich sorgfältig untersuchten Kaliumsulfat, das nach seinen einfachen Schiebungen nur ein pseudohexagonales Gitter haben kann (vgl. unt. S. 487, Anm. 226), während ihm *Tutton* (Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 30) auf Grund der Flächenhäufigkeit und Spaltbarkeit ein Gitter nach rechtwinkligen rhombischen Parallelipeden zuweist.

213) *Sohncke*, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 220.

214) *Sohncke's* Beispiele (l. c.) sind z. T. wenig glücklich, denn die Spaltbar-

Während nach der Annahme *Bravais'* Spaltbarkeit nach beliebigen rationalen Flächen, wenn auch mit ungleicher Vollkommenheit, miteinander verträglich erscheinen, hält *v. Fedorow*²¹⁵⁾ Spaltbarkeit in demselben Krystall nur nach gewissen Ebenen für möglich. Er macht die Annahme, dass, wenn Spaltung eintritt, sämtliche Paralleloeder des einen Teiles sich nach einem und demselben Gesetze von denen des andern, wenigstens in der nächsten Umgebung des Stosspunktes, trennen. Sind z. B. die Paralleloeder Hexaeder und trennen sie sich nur nach *einer* Fläche, so herrscht Spaltbarkeit nach dem Hexaeder, trennen sie sich nach zweien, so ist Spaltbarkeit nach dem Rhombendodekaeder, bei Trennung nach dreien nach dem Oktaeder vorhanden. Da aber die Paralleloeder eines Krystalls im allgemeinen noch mannigfaltige Formen haben können, auch die Umstände, von welchen es abhängt, ob Trennung nach 1, 2 oder 3 Flächen desselben gleichzeitig eintritt, nicht bekannt sind, wird auch bei der *v. Fedorow'schen* Annahme nicht ersichtlich, welche Spaltbarkeiten in demselben Krystall miteinander verträglich sind²¹⁶⁾.

52. Translationsvermögen. Zur Bestimmung der Deckschiebungen, welche für jede Strukturart charakteristisch sind, lassen sich die als *Translationen*²¹⁷⁾ bezeichneten Vorgänge bisher nicht verwenden. Sie bestehen zwar in Bewegungen ganz gleicher Art wie jene gedachten, indem sie keinerlei Änderung in der physikalischen Orientierung der verschobenen Teile nach sich ziehen, indessen ist ihr Betrag naturgemäss stets ein so grosses Vielfaches der kleinsten Deckschiebung, dass auf diese selbst kein Schluss möglich ist. In Einklang mit der Raumgitterstruktur steht aber die Rationalität der Translationsrichtung, und die Thatsache, dass deren Indices stets sehr einfache Zahlen sind, lässt analog wie für die Spaltflächen vermuten, dass der Abstand der Teilchen längs ihnen besonders klein ist; nicht ersichtlich ist aber, weder weshalb nicht auch nach anderen Richtungen von einfachen Indices als den beobachteten Translation möglich ist, noch weshalb die verschobenen Teile gegenüber den in Ruhe gebliebenen längs bestimmten Ebenen, den Translationsebenen, sich abgrenzen, noch weshalb Translation zuweilen nur in *einem* Sinne, nicht auch

keit des Quarzes ist kaum sicher bekannt, die des Orthoklases nach {110} vermutlich nur eine Absonderung.

215) *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 70.

216) Auch die Annahmen von *Barlow* (Zeitschr. f. Kryst. 29 (1898), p. 485), u. *Living* (das. 30 (1899), p. 513) erscheinen willkürlich und geben keine Handhabe zur Ermittlung der Struktur.

217) *O. Mügge*, Neues Jahrb. f. Min. etc. 1 (1889), p. 145.

im entgegengesetzten möglich ist. Letzterer Umstand macht es besonders wahrscheinlich, dass auch hier die Form (Qualität) der kleinsten Teilchen von erheblicher Bedeutung ist²¹⁸). — *Sollas*²¹⁹) an die Translation des Steinsalzes anknüpfende Vorstellungen über dessen Struktur tragen der Thatsache nicht Rechnung, dass die Translationen keine Änderungen der physikalischen Orientierung nach sich ziehen.

53. Einfache Schiebungen. Die den Translationen ähnlichen und vielfach auch an Krystallen derselben Art beobachteten einfachen Schiebungen nach Gleitflächen sind, wie *v. Fedorow*²²⁰) gezeigt hat, die einzigen mit der Raumgitterstruktur verträglichen mechanischen Deformationen der Krystalle, bei welchen dieselben ihrer Art nach unverändert bleiben, und zwar können dieselben nach *v. Fedorow* nur so erfolgen, dass der deformierte Teil *in Zwillingstellung* zum ursprünglichen entweder nach einer rationalen Fläche oder nach einer rationalen Kante gelangt. Im ersten Falle ist jene rationale Fläche die Gleitfläche, und zugleich erfährt dann eine ausserhalb derselben liegende rationale Richtung keine Änderung ihrer physikalischen Bedeutung; im zweiten Falle ist jene Kante die Gleitrichtung, und eine ausserhalb ihrer Zone gelegene rationale Fläche ändert dann ihre physikalische Bedeutung nicht.

Dies ist in vollständiger Übereinstimmung mit den von *Mügge*²²¹) angestellten Beobachtungen an Krystallen aller Systeme, speziell auch des triklinen. Nachdem die Theorie dieser Deformationen von *Liebisch*²²²) unter der Beschränkung behandelt war, dass die Ebene der Schiebung eine Symmetrieebene sei, in welchem Falle die Deformation am einfachsten durch die beiden dann rationalen Kreisschnittebenen des Deformationsellipsoides (vgl. Nr. 24) zu charakterisieren ist, ergab sich aus den Beobachtungen von *Mügge*²²³), dass dies im allgemeinen nicht der Fall sei, vielmehr zweierlei einfache Schiebungen zu unterscheiden seien. Er charakterisierte die eine durch die rationale Gleitfläche und eine ausser ihr gelegene rationale Richtung, die er „Grundzone“ nannte, die andere durch die rationale Schiebungsrichtung und

218) Auch die (stets mit Translation verknüpften) unelastischen Biegungen und Drillungen haben bisher eine Erklärung aus der Struktur nicht gefunden.

219) *Sollas*, Proc. Royal Soc. London 63 (1898), p. 285.

220) *v. Fedorow*, Verhandlg. der k. russischen mineralog. Gesellschaft zu St. Petersburg 26 (1890), p. 433.

221) *O. Mügge*, Neues Jahrb. f. Mineralogie etc. seit 1883.

222) *Th. Liebisch*, Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. in Göttingen Nr. 15 (1887), p. 435, u. Neues Jahrb. f. Min. etc. Beil.-Bd. 6 (1889), p. 105.

223) *O. Mügge*, Neues Jahrb. f. Min. etc. Beil.-Bd. 6 (1889), p. 274.

die nicht in ihrer Zone gelegene rationale zweite Kreisschnittebene²²⁴).

Bei einer derartigen Deformation wird die physikalische Bedeutung der den deformierten Teil des Krystalls begrenzenden Flächen und Kanten im allgemeinen eine andere, und unter der Voraussetzung, dass eine Netzreihe $[hkl]$, welche in $[h'k'l']$ übergeht, zugleich eine solche Verlängerung oder Verkürzung erfährt, wie sie dem Verhältnis der Abstände der Teilchen in den Richtungen $[hkl]$ und $[h'k'l']$ entspricht, dass also die Zahl der Teilchen für eine Strecke von gegebener Länge bei der Deformation dieselbe bleibt, sind bestimmte Schlüsse auf die Beschaffenheit des Raumgitters möglich²²⁵).

Danach können bei Krystallen des rhombischen Systems mit einfachen Schiebungen nach $\{110\}$, wenn die zweite Kreisschnittebene $\{\bar{1}\bar{3}0\}$ ist, die Teilchen in der Ebene der Schiebung, $\{001\}$, nur angeordnet sein nach Rhomben, und zwar müssen deren Seiten entweder $\{110\}$ oder $\{\bar{1}\bar{3}0\}$ parallel laufen; das Raumgitter würde also gebildet von Säulen oder zentrierten Säulen mit rhombischer Basis²²⁶). Dieselbe Anordnung der Teilchen gilt für monokline Krystalle, wenn sie einfache Schiebungen nach $[110]$ mit $\{h3hl\}$ als zweiter Kreisschnittebene eingehen für die durch $[110]$ gelegte orthodomatische Ebene²²⁷), die Struktur solcher Krystalle entspricht der nach klinorhombischen Säulen. Analoge Anordnung wie für die genannten

224) Die Vorstellungen von Sir *Will. Thomson* (Edinburgh, Proc. Roy. Soc. 1889/90, auch Math. and phys. papers 3 (1890), p. 422) über die einfachen Schiebungen am Kalkspat beruhen auf der Annahme, dass der Kalkspat sich aus Teilchen von der Form abgeplatteter Rotationsellipsoide aufbaut, welche sich im allgemeinen nicht nur längs ihres Äquators berühren und deren Drehung daher ein vorübergehendes Zusammensacken des Ellipsoidhaufens bewirkt, das aber durch eine gleichfalls vorübergehende Deformation der Ellipsoide in dreiaxige aufgehoben wird. Danach wäre zu erwarten, dass derartige Deformationen bei regulären Krystallen, da deren kleinste Teilchen kugelförmig anzunehmen wären, nicht stattfinden könnten. Dem widersprechen die Beobachtungen an den Krystallen des Eisens (*O. Mügge*, Neues Jahrb. f. Min. etc. 2 (1899), p. 67).

225) *O. Mügge*, Neues Jahrb. f. Min. etc. Beil.-Bd. 14 (1901), p. 289.

226) Derartige Deformationen sind besonders häufig bei pseudohexagonalen Krystallen (Typus Aragonit), d. h. solchen, welche nach ihren Winkeln und ihrem Habitus hexagonaler Symmetrie sich nähern und vielfach bei Temperaturänderung in wirklich hexagonale (rhomboedrische) sich umwandeln. Die Pseudosymmetrieflächen, welche meist gleichzeitig Zwillingsflächen sind, fallen mit den Kreisschnittebenen zusammen, und die herrschenden Flächen werden meist solche von grosser Netzdichte. Je grösser die Annäherung an hexagonale Symmetrie, desto geringer die Grösse der Schiebung.

227) Auch für derartige Krystalle gilt die Anm. 226 (Typus Leadhillit).

rhombischen Krystalle in $\{001\}$ gilt auch für solche tetragonale in $\{010\}$, bei welchen einfache Schiebungen mit den Kreisschnittebenen $\{101\}$ und $\{30\bar{1}\}$ möglich sind (z. B. Rutil).

Wenn dagegen die beiden Kreisschnittebenen rhombischer Krystalle gleichartige Flächen sind, etwa (110) und $(\bar{1}\bar{1}0)$, so ist die Art des Netzes in der Schiebungsebene $\{001\}$ zwar nicht zu bestimmen, indessen müssen die Teilchen in $\{001\}$ jetzt entweder nach den Seiten oder den Diagonalen der durch die Kreisschnittebenen bestimmten Rhomben angeordnet sein²²⁸). Schiebungen mit zwei gleichartigen Kreisschnittebenen gehen auch die regulären Krystalle des Eisens ein, und zwar nach (112) und $(\bar{1}\bar{1}2)$; daraus folgt, dass seine Teilchen nicht nach Würfeln mit zentrierten Flächen angeordnet sein können.

Eine vollständige Bestimmung der Struktur eines Krystalls hinsichtlich der Art des zu Grunde liegenden Raumgitters würde nach dem Vorigen für manche Krystalle möglich werden durch die Bestimmung der Elemente von zweierlei einfachen Schiebungen, und zwar müssten dieselben im allgemeinen zueinander weder symmetrisch noch reziprok²²⁹), sondern voneinander unabhängig sein. Derartige Schiebungen sind bisher nur von Krystallen des Leucit bekannt, und zwar dreierlei. Da indessen dabei die Paare der Kreisschnittebenen höchstwahrscheinlich²³⁰) jedesmal aus zwei gleichwertigen Flächen, nämlich (110) und $(\bar{1}\bar{1}0)$, (101) und $(\bar{1}0\bar{1})$, (011) und $(01\bar{1})$ bestehen, kann nach obigem nicht auf die Art des Raumgitters, sondern nur darauf geschlossen werden, dass seine Maschen in der jedesmaligen Schiebungsebene, nämlich $\{001\}$, bzw. $\{010\}$, bzw. $\{100\}$ entweder den Seiten oder den Diagonalen der durch die obigen Flächenpaare bestimmten Rhomben parallel sind. Da je zwei solche Flächen hier nahezu aufeinander senkrecht stehen, bedeutet dies, dass das Raumgitter nahezu ein reguläres ist, was wieder mit dem Habitus der Krystalle und ihrer Umwandlung in wahrhaft reguläre bei höherer Temperatur in guter Übereinstimmung ist.

Bei einigen Krystallen lässt sich aus der Bestimmung der ein-

228) Die hierher gehörigen Krystalle sind z. T. pseudotetragonal und es gilt Analoges wie in Anm. 226), p. 487. Ähnliche Verhältnisse kehren auch hier wahrscheinlich bei monoklinen pseudorhombischen und zugleich pseudotetragonalen Krystallen wieder.

229) Zwei einfache Schiebungen heissen nach O. Mügge (Neues Jahrb. f. Min. etc. 1 (1894), p. 108) „reziprok“, wenn die Gleitfläche und Grundzone der einen gleichzeitig zweite Kreisschnittebene bzw. Schiebungsrichtung der anderen ist.

230) O. Mügge, Neues Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 14 (1901), p. 286.

fachen Schiebungen der Schluss ziehen, dass das nach andern Merkmalen für sie als das wahrscheinlichste angenommene Raumgitter mit den Elementen der Schiebung nicht verträglich ist. So ist das von *G. Friedel*²³¹⁾ dem Aragonit zugeschriebene Gitter nach rechtwinkligen Parallelipedern für ihn nicht möglich; ebensowenig das analoge, dem Kaliumsulfat von *Tutton*²³²⁾ zugewiesene; beiden kann vielmehr nur eine der oben (p. 487, Anm. 226) erwähnten pseudohexagonalen Strukturen zukommen.

Auch die Fähigkeit mancher Krystalle (z. B. Diopsid, Chlor- und Brombaryum, Rutil) zwillingsgemäss nach zwei verschiedenen Gesetzen zu verwachsen, bei deren einem die Zwillingsfläche zugleich Gleitfläche ist, während die Zwillingsenebene (bezw. Zwillingsaxe) des zweiten Gesetzes die zweite Kreisschnittebene (bezw. Grundzone) der dabei vor sich gehenden einfachen Schiebung ist, steht in Einklang damit, dass in jedem Raumgitter, soweit seine geometrischen Verhältnisse in Frage kommen, stets auch die zu einer Schiebung reziproke möglich ist, und diese Zwillingsbildung nach dem zweiten Gesetze bewirken würde.

Während so die einfachen Schiebungen geeignet sind, über die Form der Raumgitter gewisse Aufschlüsse zu geben, vermögen sie die Frage, ob einem Krystall Raumgitter- oder andersartige Struktur zukommt, nicht zu entscheiden.

54. Zirkularpolarisation. Wie *Sohncke*²³³⁾ hervorgehoben hat, ist nach seiner Theorie im Gegensatz zur Raumgitterstruktur²³⁴⁾ das Vorkommen von Krystallen derselben Art in zwei enantiomorphen, strukturell verschiedenen Modifikationen vorauszusehen, und speziell lässt sich danach eine manchen derartigen Krystallen zukommende Eigenschaft, nämlich die Zirkularpolarisation, dem Verständnis näher bringen, indem man dieselben auffasst als Aggregate krystalliner Lamellen niederer Symmetrie von analoger Anordnung wie in den *Reusch'schen* Glimmerkombinationen. Er zeigte, dass das Verhalten solcher Kombinationen um so mehr mit dem optisch einaxiger zirkularpolarisierender Krystalle qualitativ übereinstimmt, je geringer die Dicke der ange-

231) *G. Friedel*, Étude sur les groupements cristallins, Bull. Soc. de l'Industrie minérale (4) 3 u. 4, St. Étienne 1904, Sonderabdruck p. 325.

232) *Tutton*, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 30; 27 (1897), p. 276.

233) *Sohncke*, Entw. einer Theorie etc. p. 259, Litt. das. p. 242.

234) Für trigonal-trapezoidrische Krystalle mit *Raumgitterstruktur* hat *Beckenkamp* (Zeitschr. f. Kryst. 30 (1899), p. 335) eine auf der Annahme elektrisch umkreister Moleküle gegründete kinetische Theorie des optischen Drehungsvermögens entwickelt.

wandten Lamellen ist²³⁵). Eine Struktur ähnlich der jener Glimmerkombinationen ist daher namentlich jenen aktiven optisch-einaxigen Krystallen zuzuschreiben, deren Substanz nur im krystallinen, nicht auch im amorphen Zustande dreht, und als deren Repräsentant der Quarz gelten kann. Unter Berücksichtigung seiner Symmetrie, sowie des Umstandes, dass am Quarz vorwiegend rhomboedrische, nicht aber pyramidale Gestalten auftreten²³⁶), kann für seine Struktur nur das abwechselnde Dreipunkt-Schraubensystem (Nr. 23 seiner Theorie, p. 133) in Frage kommen. Dieses wird dem von *Mallard*²³⁷) für den Quarz angenommenen gleichartig, wenn seine Doppelpunkte in einfache übergehen. Man erhält dann je drei, in der Richtung der dreizähligen Axe übereinander liegende, um 120° um die Axe gedrehte Moleküle. *Mallard* verlässt damit aber die von ihm selbst angenommene Raumgitterstruktur²³⁸), da die Moleküle sich nicht mehr in Parallelstellung befinden, und während er genötigt ist, jedem einzelnen Molekül eine bestimmte, nämlich monokline, Symmetrie zuzuschreiben, kommt in der *Sohncke*'schen Theorie erst dem Aggregat von je vier Teilchen monokline Struktur und zwar von der Art schiefer rhombischer Säulen zu²³⁹).

Später zeigte *Sohncke*²⁴⁰), dass man sich einen Krystall von der Symmetrie des Quarzes auch aufgebaut denken kann aus *zweierlei* verschiedenartigen monoklinen Blättchen, von welchen jedes entsprechend

235) *Sohncke*, Math. Ann. 9 (1875), p. 504.

236) *Sohncke*, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 230.

237) *Mallard*, Traité de cristallogr. 2 (1884), p. 313.

238) Ein Modell mit raumgitterartiger Anordnung der Bausteine, bei welchem diese lückenlos aneinanderschliessen, enantiomorph sind und speziell der Symmetrie des Quarzes auch in piezoelektrischer Hinsicht genügen, hat Lord *Kelvin* erdacht (The molecular tactics of a crystal, Robert Boyle Lecture, Oxford 1894, p. 54).

239) *A. C. Gill* (Zeitschr. f. Kryst. 22 (1894), p. 126) denkt sich das Punktpaar in der *Sohncke*'schen Anordnung, ersetzt durch ein Molekül SiO_2 , von der Gestalt eines regulären Tetraeders (dessen vier Ecken der Vierwertigkeit des Siliciums entsprechen), an welchem die beiden Sauerstoffatome etwa stabförmig (ihrer Zweiwertigkeit entsprechend) sich längs zweier auf einander senkrechten Kanten befinden. In den einzelnen Bausteinen sind die Siliciumatome dann nur seitlich, nicht aber nach unten und oben von Sauerstoffatomen umgeben, und da bei der Ätzung durch Flusssäure der chemische Angriff sich vermutlich wesentlich auf das Silicium, nicht aber auf den Sauerstoff richtet, wäre eine besonders starke Ätzung in der Richtung nach der dreizähligen Axe, [eine besonders schwache in Richtungen senkrecht dazu zu erwarten, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

240) *Sohncke*, Zeitschr. f. Kryst. 19 (1891), p. 530.

der Dreizähligkeit der Schraubenaxen in drei Orientierungen vorkommt; dass ferner auch in allen andern Symmetrieklassen, in denen optisch drehende Krystalle zu jener Zeit bekannt waren, solche Punktsysteme vorkommen, die Drehung der Polarisationssebene zur Folge haben können. Speziell lassen sich auch einige Punktsysteme von tetragonaler Symmetrie auffassen als zusammengesetzt aus zwei Arten monokliner Punktgruppen, von welchen je zwei in der Richtung der vierzähligen Axe auf einander folgende *gleichartige* um 90° , dagegen zwei auf einander folgende *ungleichartige* nur um 45° um die vierzählige Axe gegen einander gedreht sind, also einer Glimmerkombination mit 45° -Stellung der Blättchen entsprechen²⁴¹). Dass derartige Packete, aufgebaut aus abwechselnd dünneren und dickeren Glimmerblättchen, sich den *Reusch'schen* Glimmerkombination ganz gleich verhalten, davon hat sich *Sohncke* durch Experiment und theoretische Untersuchung der Lichtbewegung überzeugt; letztere ergibt speziell bei hinreichend dünnen Blättchen in Übereinstimmung mit der Beobachtung die Grösse der Drehung als proportional der Dicke des Packetes, nahezu umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge, dabei unabhängig von der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes²⁴²).

Regulär-tetartoedrischen Krystallen mit Zirkularpolarisation können nach *Sohncke* zweierlei Punktsysteme mit Schraubenstruktur zugeschrieben werden, bei welchen die Drehung in den Richtungen der drei zweizähligen Axen gleich gross sein muss, während diese Strukturen allerdings eine Gleichheit der Drehung in *allen* Richtungen solcher Krystalle, wie sie die Beobachtung ergibt, nicht erwarten lassen.

Unter den Strukturarten rhombischer, monokliner und trikliner Krystalle enthält nach *Sohncke* (l. c. p. 541) keine die Bedingungen zur Hervorrufung einer Drehung der Polarisationssebene, da etwa vorhandene Schraubenaxen stets nur zweizählig sind. Falls also Krystalle

241) Unter den tetragonalen enantiomorphen Punktsystemen mit Schraubenstruktur giebt es noch eines in der hemimorph-tetartoedrischen Klasse (Nr. 26, 27 der *Sohncke'schen* Tabelle, p. 175), dessen Krystalle aus (im allgemeinen triklinen) aber *unter* 90° gedrehten Blättchen aufgebaut gedacht werden können. Das in diese Klasse gehörige weinsaure Antimonylbaryum zeigt in der That keine Zirkularpolarisation (*Sohncke*, Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 530).

242) Eine theoretische Untersuchung der Lichtbewegung in aufeinandergeschichteten Krystalllamellen gab auch *Mallard* in *Explications des phénomènes optiques anomaux etc.* Paris 1877 und eine Verallgemeinerung derselben auf Packete ungleich dicker Lamellen und mit wechselndem Azimuth ihrer Schwingungsrichtungen in *Bull. soc. min. de France* 4 (1881), p. 71, auch *Ann. des mines* 19 (1881), p. 256, und *Traité de crist.* 2 (1884), p. 313.

dieser Systeme zirkular polarisieren, könnte dies *nur* im Bau der Moleküle selbst begründet sein, womit bei einigen Substanzen dieser Art in Übereinstimmung ist, dass sie Drehung auch im amorphen Zustande zeigen (Zucker, Kali- und Ammoniak-Seignettesalz, d-Methyl- α -Glukosid, Weinsäure, Rhamnose); indessen sind neuerdings auch solche bekannt geworden, welche in Lösung inaktiv sind (Bittersalz, Natriummonophosphat $\text{NaH}_2\text{PO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$)²⁴³). Hier müsste also die Ursache der Drehung doch in der Krystalstruktur gesucht werden, und *mehr als zweizählige Schraubenaxen erscheinen damit nicht mehr als unumgängliche Bedingung für das Drehungsvermögen*²⁴⁴).

55. Schlusswort. Wie aus diesem nur das Wichtigste enthaltenden Überblick hervorgeht, lassen die bisherigen Erfahrungen, abgesehen von der bereits unter B hervorgehobenen Übereinstimmung der beobachteten Symmetrieklassen mit den aus der Theorie folgenden, noch nicht erkennen, wie weit das von den Strukturtheorien entworfene Bild der Krystalle der Wirklichkeit entspricht. Es liegt das vielleicht daran, dass die bisher vorzugsweise untersuchten Vorgänge in Krystallen (Fortpflanzung und Absorption der Lichtstrahlung, Leitung von Wärme und Elektrizität, elastische und thermische Deformation u. a.) nicht so unmittelbar von der Struktur abhängig zu sein scheinen, wie die bisher weniger genau bekannten Vorgänge des Wachstums, der Umwandlung von Krystallen ineinander und überhaupt ihrer Entstehung. Darauf weist wenigstens der Umstand hin, dass die Symmetrie der erstgenannten Vorgänge im allgemeinen erheblich höher ist, als diejenige der Symmetriegruppe, der ein Krystall nach der *Gesamtheit* seiner Eigenschaften und namentlich nach den Vorgängen des Wachstums angehört. Es kommt daher in den ersteren die die Symmetrie bedingende Struktur gewissermassen nur verhüllt zum Ausdruck und weitere Aufklärungen über die Struktur sind deshalb vermutlich am ehesten von Fortschritten in der Erkenntnis der zu zweit genannten Vorgänge zu erwarten.

243) H. Dufet, Soc. franç. de phys. Nr. 213 (1904), p. 1, auch Bull. soc. franç. de min. 27 (1904), p. 162.

244) v. Fedorow hält die Analogie zwischen schraubenförmig angeordneten Krystalllamellen und Krystallstrukturen mit Schraubenaxen überhaupt für irreführend, vgl. Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 220, und die daselbst angeführte russische Litteratur.