

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0231

LOG Titel: A. Das kristallographische Grundgesetz und seine Anwendung auf die Berechnung und Zeichnung der Kristalle.

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

- M. L. Frankenheim*, System der Krystalle, Nova Acta Leopoldina 19, 2 (1842), p. 471 ff.
- G. Delafosse*, Recherches sur la cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques, Mém. Sav. étrang. Paris 8 (1843).
- A. Bravais* ⁴⁾, Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, Journ. de math. 14 (1849), p. 141 ff.
- Mémoire sur les systèmes de points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, Journ. éc. polyt. Heft 33 (1850), p. 1 ff.
- Études crystallographiques, Journ. éc. polyt. Heft 34 (1851), p. 229 ff.
- A. F. Möbius*, Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle, Sächs. Ber. Leipzig 1 (1849), p. 65.
- C. Jordan*, Mémoire sur les groupes de mouvements, Ann. di mat. (2) 2 (1868/9), p. 167 u. 322.
- Chr. Wiener*, Grundzüge der Weltordnung, 2. Aufl. Leipzig 1869.
- A. Gadolin*, Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes crystallographiques, Acta soc. fenn. Helsingfors 9 (1871), p. 1.
- P. Curie*, Sur les questions d'ordre, Bull. soc. min. de France 7 (1884), p. 89 u. 418.
- B. Mümigerode*, Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen (1884), p. 195, 374, 488.
- Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle, Neues Jahrb. f. Min. Beilageband 5 (1887), p. 145.
- E. v. Fedorow* ²⁾, Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, St. Petersburg 1890 (russisch).
- H. Fletcher*, Recent progress in mineralogy and crystallography, Report of the British Assoc. Oxford 1894.
- Lord *Kelvin*, The molecular Tactics of a Crystal. Second Boyle Lecture Oxford 1894.
- W. Barlow*, A mechanical cause of homogeneity of structure and symmetry, geometrically investigated, Proc. Roy. Soc. Dublin 8 (N. S.) 1898, p. 527.
- *H. A. Miers* and *Herbert Smith*, The structure of crystals, Report Brit. Assoc. Glasgow 1901. Sect. C. London 1901.
- G. Friedel*, Études sur les groupements cristallins, Bull. soc. de l'industrie minérale (4) 3 u. 4. Saint-Étienne 1904.]

A. Das kristallographische Grundgesetz und seine Anwendung auf die Berechnung und Zeichnung der Krystalle. _____

Von **Th. Liebisch** in Göttingen.

Einheitliche und schwebend gebildete Krystalle bieten polyedrische Formen dar, deren charakteristische geometrische Eigenschaft ausgesprochen wird in dem durch die Erfahrung gegebenen *kristallographischen Grundgesetz* — Gesetz der Zonen, der rationalen Indices oder der rationalen Doppelverhältnisse. (Vgl. hierzu Teil B, Nr. 25.)

4) Die Arbeiten von *Bravais* erschienen 1866 in Paris als *Études crystallographiques*.

1. Einfache konvexe Polyeder. Ist die Einwirkung äusserer Agentien, die eine Störung der natürlichen homogenen Beschaffenheit der Krystalle erzeugen können, ausgeschlossen, und bleiben die Temperatur und der äussere allseitig gleiche Druck konstant, so sind die *Richtungen* der Begrenzungsebenen eines Krystallpolyeders unveränderlich. Daher ist ein solches Polyeder durch seine *Flächenwinkel* vollständig bestimmt.

Erfahrungsgemäss bilden die Begrenzungsebenen (Krystallflächen) ein einfaches, im gewöhnlichen Sinne konvexes Polyeder. Jede Krystallfläche besitzt also in Bezug auf das Polyeder, zu dem sie gehört, eine äussere und eine innere Seite. Werden von einem Punkte im Innern des Polyeders Normalen auf die Flächen gefällt, so sollen die nach aussen zeigenden Richtungen als positiv angesehen werden. Unter einem Flächenwinkel soll der am Reflexionsgoniometer messbare Aussenwinkel verstanden werden. Er wird beschrieben, wenn eine der beiden Flächen aus ihrer ursprünglichen Lage um die Schnittgerade gedreht wird, bis sie, ohne dabei das Innere des Polyeders zu bestreichen, in die Verlängerung der anderen Fläche fällt. Einen gleichen Winkel beschreibt die Normale der Fläche.

Als positive Richtung einer Kante in Beziehung auf eine Fläche, in der sie nicht enthalten ist, soll die Richtung verstanden werden, die mit der positiven Richtung der Flächennormale einen Winkel $< \pi/2$ einschliesst. Dieser Winkel soll der Einfallswinkel der Kante in Beziehung auf die Fläche genannt werden.

2. Gesetz der Zonen. Eine auffallende Eigenschaft der Krystallpolyeder besteht darin, dass an ihnen Scharen von Kanten auftreten, die untereinander parallel laufen. *Chr. S. Weiss*, der zuerst die Bedeutung dieser Thatsache für die geometrische Krystallographie erkannt hat, nannte die Gesamtheit der Flächen, die sich in parallelen Kanten schneiden, eine *Zone* von Flächen.

Häufig werden Flächen beobachtet, die gleichzeitig in zwei oder mehr Zonen liegen. Zur Bestimmung ihrer Lage gegen die übrigen Flächen sind Winkelmessungen nicht erforderlich. Denn eine Ebene ist ihrer Richtung nach bestimmt, wenn sie gleichzeitig zwei Kanten von verschiedenen Richtungen parallel laufen soll.

Gehen wir nun dazu über, aus je zwei Zonen schon vorhandener Flächen eines Krystallpolyeders eine neue Flächenrichtung abzuleiten, die beiden Zonen angehört, so erhebt sich die Frage, ob stets die auf solche Weise mit beobachteten Flächen in Beziehung stehenden Ebenen mögliche Krystallflächen sind. Die Erfahrung hat gelehrt, dass dieses Ableitungsverfahren in der That berechtigt ist. Da zur geometrischen

Ableitung einer unbegrenzten Zahl von Flächen aus Zonen vier Flächen, die ein im allgemeinen unregelmässiges Tetraeder bilden, notwendig und ausreichend sind, so können wir die charakteristische geometrische Eigenschaft der Gesamtheit von Flächen, die als Begrenzungsebenen der polyedrischen Formen eines krystallisierten Körpers auftreten können, durch folgenden Satz aussprechen: *Aus vier Flächen eines Krystallflächenkomplexes, die ein Tetraeder bilden, lassen sich alle übrigen Flächen der Reihe nach dadurch ableiten, dass parallel zu jedem Paare von Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Flächen eine neue Fläche gelegt wird¹⁾.*

Da krystallographische Begrenzungselemente nur ihrer Richtung nach völlig bestimmt sind, so können wir durch ein Zentrum C das Bündel der Ebenen und Geraden gelegt denken, die den Flächen und Kanten eines Krystallflächenkomplexes parallel gehen. Dann ist nach dem Gesetz der Zonen jede Gerade der Träger eines Büschels von möglichen Flächen und jede Ebene der Träger eines Büschels von möglichen Kanten. Flächen- und Kantenrichtungen stehen sich *dualistisch* gegenüber²⁾.

Vier der Ableitung zu Grunde liegende Flächen $e_0 e_1 e_2 e_3$ bilden ein vollständiges Vierfläch mit drei Paaren von Gegenkanten (Fig. 1, 5):

$$e_2 e_3 = \varepsilon_1; e_3 e_1 = \varepsilon_2; e_1 e_2 = \varepsilon_3$$

$$e_0 e_1 = \varepsilon_4; e_0 e_2 = \varepsilon_5; e_0 e_3 = \varepsilon_6.$$

Je zwei einander gegenüberliegende Kanten werden durch eine Diagonalfäche verbunden:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_4 = b_1; \varepsilon_2 \varepsilon_5 = b_2; \varepsilon_3 \varepsilon_6 = b_3.$$

Diese drei Flächen schneiden sich in den drei Diagonalkanten des Vierflaches:

$$b_2 b_3 = \beta_1; b_3 b_1 = \beta_2; b_1 b_2 = \beta_3.$$

Durch jede Diagonalkante kann ein Paar Gegenflächen nach den beiden mit ihr noch nicht verbundenen Gegenkanten gelegt werden:

Vier der Ableitung zu Grunde liegende Kanten $\delta_0 \delta_1 \delta_2 \delta_3$ bilden ein vollständiges Vierkant mit drei Paaren von Gegenflächen (Fig. 1, 5):

$$\delta_2 \delta_3 = d_4; \delta_3 \delta_1 = d_5; \delta_1 \delta_2 = d_6$$

$$\delta_0 \delta_1 = d_1; \delta_0 \delta_2 = d_2; \delta_0 \delta_3 = d_3.$$

Diese sechs Flächen schneiden sich ausser in den vier Kanten δ noch in den drei Diagonalkanten:

$$d_1 d_4 = \beta_1; d_2 d_5 = \beta_2; d_3 d_6 = \beta_3.$$

Durch je zwei dieser Kanten geht eine Diagonalfäche des Vierkants:

$$\beta_2 \beta_3 = b_1; \beta_3 \beta_1 = b_2; \beta_1 \beta_2 = b_3.$$

Auf jeder Diagonalfäche erzeugen die drei Paare von Gegenflächen ausser den Diagonalkanten noch ein Paar Gegenkanten:

1) *F. E. Neumann*, Beitr. z. Krystallon. 1823. De lege zonarum 1826; *A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcül 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Cl. 1849, p. 45; *F. Blasius*, Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 538.

2) *H. Grassmann*, Ausdehnungslehre von 1844, § 171; *Liebisch*, Zeitschr. d. geol. Ges. 1877, p. 515.

$$\beta_1 \varepsilon_1 = d_1; \beta_2 \varepsilon_2 = d_2; \beta_3 \varepsilon_3 = d_3$$

$$\beta_1 \varepsilon_4 = d_4; \beta_2 \varepsilon_5 = d_5; \beta_3 \varepsilon_6 = d_6.$$

Diese sechs Flächen schneiden sich zu je dreien in vier Kanten:

$$d_1 d_2 d_3 = \delta_0$$

$$d_1 d_5 d_6 = \delta_1$$

$$d_2 d_6 d_4 = \delta_2$$

$$d_3 d_4 d_5 = \delta_3,$$

welche ein vollständiges Vierkant bilden.

In jeder Diagonalfäche b bilden die auf ihr liegenden Gegenkanten ε und Diagonalkanten β ein harmonisches Büschel:

$$(\beta_2 \beta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_4) = -1$$

$$(\beta_3 \beta_1 \varepsilon_5 \varepsilon_2) = -1$$

$$(\beta_1 \beta_2 \varepsilon_6 \varepsilon_3) = -1.$$

Die Fläche e_i und die Kante δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, werden an allen Kanten des Dreikants $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ und auf allen Flächen des Dreiflachs $b_1 b_2 b_3$ voneinander harmonisch getrennt.

Auf diese Weise kann die geometrische Ableitung neuer Flächen und Kanten unbegrenzt fortschreiten.

3. Raumgitter. Der Zonenzusammenhang der Flächen eines krystallisierten Körpers wird veranschaulicht durch das geometrische Bild der Struktur einheitlicher Krystalle, das durch die weitere Entwicklung der *Hauyschen* Hypothese über die Krystallstruktur entstanden ist. (Näheres hierüber in Teil B, Art. *Schönflies*.)

In einem unbegrenzt gedachten einheitlichen Krystall sind unzählig viele Punkte vorhanden von der Beschaffenheit, dass um jeden Punkt die Massenverteilung nach parallelen Richtungen dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt. Diese Stellen müssen angeordnet sein nach Raumgittern, d. h. nach den Schnittpunkten dreier Scharen von parallelen äquidistanten Ebenen. Jede durch irgend zwei Punkte des Gitters gelegte Gerade (Punktreihe) ist mit unendlich vielen Gitterpunkten äquidistant besetzt; der Abstand zweier benachbarter Punkte wird der Parameter dieser Punktreihe und der zu ihr parallelen Punktreihen genannt. Legt man durch irgend drei Punkte des Gitters, die nicht einer Geraden angehören, eine Ebene (Netzebene), so ist sie mit unendlichen vielen Punkten parallelogrammatisch besetzt.

$$b_1 d_1 = \varepsilon_1; b_2 d_2 = \varepsilon_2; b_3 d_3 = \varepsilon_3$$

$$b_1 d_4 = \varepsilon_4; b_2 d_5 = \varepsilon_5; b_3 d_6 = \varepsilon_6.$$

Diese sechs Kanten liegen zu je dreien auf vier Flächen:

$$\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = e_0$$

$$\varepsilon_4 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = e_1$$

$$\varepsilon_5 \varepsilon_3 \varepsilon_1 = e_2$$

$$\varepsilon_6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = e_3,$$

welche ein vollständiges Vierflach bilden.

Die in einer Diagonalkante b sich schneidenden Gegenflächen d und Diagonalfächen b bilden ein harmonisches Büschel:

$$(b_2 b_3 d_4 d_1) = -1$$

$$(b_3 b_1 d_5 d_2) = -1$$

$$(b_1 b_2 d_6 d_3) = -1.$$

Die Raumgitterstruktur veranschaulicht das Gesetz der Zonen, wenn die Annahme hinzugefügt wird, dass als *Krystallflächen nur Netzebenen des Gitters auftreten können.*

4. Polfiguren. Wir stellen uns vor, dass die Flächen eines Krystallpolyeders um die Strecke r von einem Punkte C im Innern entfernt seien. Dann kann dem Polyeder eine Kugel um C mit dem Radius r eingeschrieben werden. Der Berührungspunkt einer Fläche mit der Kugel wird der Pol dieser Fläche, die Gesamtheit der Flächenpole die Polfigur des Polyeders genannt. Die Flächen einer Zone liefern Pole, die in einem Hauptkreise (Zonenkreise) liegen; die durch den Mittelpunkt gelegte Kantenrichtung der Zone schneidet die Kugel in den Polen des Zonenkreises.

Da der sphärische Abstand zweier Flächenpole ein Mass ist für den äusseren Winkel der zugehörigen Flächen, so gewährt die Polfigur eine auf anderem Wege nicht erreichbare Übersicht der Flächenwinkel und damit die zweckmässigste Grundlage für die Ermittlung der zur Beschreibung der Krystallpolyeder erforderlichen Grössen.

In der Polfigur sind einer Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche verschiedene (diametral gegenüberliegende) Punkte zugeordnet. Soll die entsprechende Unterscheidung auch in dem Bündel der von C ausgehenden Flächennormalen, das die Kugel in den Polen der Fläche schneidet, festgehalten werden, so müssen wir den Flächennormalen die auf S. 396 eingeführten positiven Richtungssinne beilegen. In der Untersuchung projektivischer Beziehungen zwischen einem Krystallflächenkomplex und seiner Polfigur wird hierauf verzichtet; dann entspricht einer Flächenrichtung ein Polpaar³⁾.

5. Projektionen. Hilfsmittel für die geometrische Untersuchung der Krystallpolyeder bieten die von *F. E. Neumann* 1823 eingeführten Verfahren zur übersichtlichen Darstellung des Zonenverbandes in einer Ebene dar⁴⁾. Man gewinnt diese Darstellungen, indem man I. das durch ein Zentrum C gelegte Bündel von Ebenen eines Krystallflächenkomplexes mit einer nicht durch C gehenden Ebene \mathcal{E} schneidet

3) Über die Einführung der Normalen der Krystallflächen und der Polfiguren vgl. *F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie 1 (1823), p. 5, 55; *Ann. Phys. Chem.* 4 (1825), p. 63; *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie 1 (1829), p. X, 5, 50; *J. F. Chr. Hessel*, Krystallometrie 1831, p. 223.

4) *F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie 1 (1823). Wesentlich kompliziertere graphische Methoden sind von *L. Ditscheiner* vorgeschlagen worden *Sitz.-Ber. Wien. Akad. Math. Kl.* 26 (1857), p. 279. 28 (1858), p. 93, 134, 201. 32 (1858), p. 3.

oder II. das Bündel der Flächennormalen a) mit einer nicht durch C gehenden Ebene \mathcal{E} oder b) mit einer konzentrischen Kugel schneidet.

I. *Linienprojektion eines Flächenbündels.* Da in dem Bündel jedem Paare einer Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche eine einzige Ebene entspricht, so ist deren Schnittgerade mit der Projektionsebene \mathcal{E} einer Flächenrichtung zugeordnet. Die Spuren der Flächenrichtungen einer Zone bilden ein Büschel von Geraden durch die Spur der gemeinsamen Kante (Zonenpunkt). Jeder Kantenrichtung des Krystals ist also ein Punkt in \mathcal{E} zugeordnet. Aus der perspektivischen Lage des Bündels und seiner Projektion folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse von vier Elementen eines Büschels im Bündel und der vier entsprechenden Elemente in der Projektion.

Die Linienprojektion (Fig. 1) veranschaulicht den Zonenverband der auf S. 397—398 genannten Flächen $e_0 \dots d_6$.

Linienprojektionen wurden von Fr. A. Quenstedt, F. H. Schröder und M. Websky in umfassender Weise für die Zwecke der geometrischen Krystallographie verwertet⁵⁾.

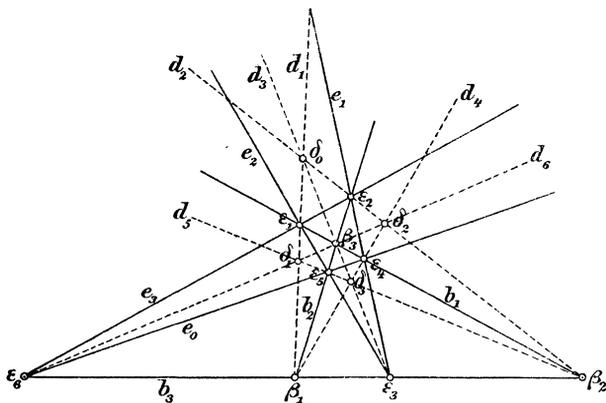


Fig. 1. Linienprojektion.

IIa. *Punktprojektion eines Bündels von Flächennormalen; gnomonische Projektion einer Polfigur.* In der Projektionsebene \mathcal{E} erzeugen die Flächennormalen ein System von Schnittpunkten. Hierdurch wird jeder Flächenrichtung des Krystals ein Punkt (Flächenort) in \mathcal{E} zu-

5) Fr. A. Quenstedt, Ann. Phys. Chem. 34 (1835), p. 503, 561; 36 (1835), p. 245, 379; Methode der Krystallographie 1840, Beiträge zur rechn. Krystallogr. 1848, Handbuch der Min. 1855, Grundriss d. bestimm. u. rechn. Krystallogr. 1873; F. H. Schröder, Elemente d. rechn. Krystallogr. 1852; M. Websky, Ann. Phys. Chem. 118 (1863), p. 240; Anwendung d. Linearprojektion z. Berechn. d. Krystalle 1887.

geordnet. Den Flächenrichtungen einer Zone entsprechen Punkte einer Geraden; jeder Kantenrichtung des Krystalls ist also eine Gerade (Zonenlinie) in \mathcal{E}' zugeordnet.

Betrachtet man in Fig. 1 die Punkte $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ als Flächenorte eines vollständigen Vierflachs, so wird der Zonenverband der abgeleiteten Flächen $\beta_1 \dots \varepsilon_6$ veranschaulicht.

Die Projektion eines Bündels von Flächennormalen ist identisch mit der *gnomonischen Projektion* der zu dem Bündel der Flächen gehörigen Polfigur auf die Ebene \mathcal{E}' , wenn man den Radius der Kugel gleich dem Abstand des Zentrums C von \mathcal{E}' wählt⁶⁾.

Den Hauptkreis, in welchem die Kugel von der parallel \mathcal{E}' gelegten Diametralebene geschnitten wird, nennen wir Grundkreis. Den Berührungspunkt O' von \mathcal{E}' mit der Kugel, der im allgemeinen nicht

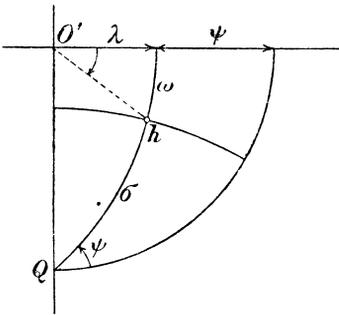


Fig. 2. Polarkoordinaten σ, ψ des Poles h .

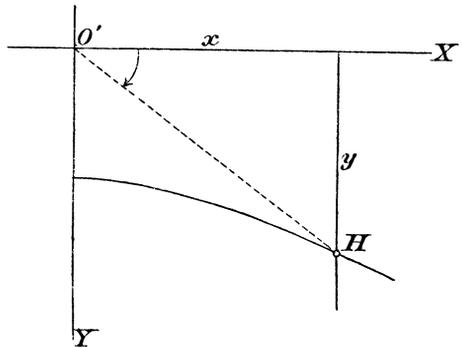


Fig. 3. Gnomonische Projektion H des Poles h .

mit dem Pol einer Krystallfläche zusammenfällt, bezeichnen wir als Projektionszentrum. Zu Polarkoordinaten eines Poles h seien gewählt der sphärische Abstand $(Qh) = \sigma$ von dem im Grundkreise gelegenen Pole Q und das Azimut ψ der Zone Qh in Bezug auf diesen Kreis (Fig. 2). Dann hat das Projektionszentrum O' die Koordinaten $\sigma = \psi = 90^\circ$.

Die Kugel sei mit einem Netz von Längenkreisen und Breiten-

6) Nach dem Vorgange von *F. E. Neumann* wurde die gnomonische Projektion verwertet von: *J. Fr. Chr. Hessel*, *Krystallometrie* (1831), p. 225 f. (Lehre von der Zeigerfläche); *W. H. Miller*, *Phil. Mag.* (4) 18 (1859), p. 37; *M. Websky*, *Monatsber. Berlin. Akad.* 1876, p. 3, 1879, p. 124; *E. Mallard*, *Traité de crist.* 1 (1879); *H. A. Miers*, *Min. Mag.* 7 (1887), p. 145; *V. Goldschmidt*, in den auf p. 394 genannten Schriften und *Zeitschr. f. Kryst.* 17 (1890), p. 97, 191; 19 (1891), p. 35, 352; 20 (1892), p. 143; 21 (1893), p. 210; 22 (1894), p. 20; 25 (1896), p. 538; 30 (1899), p. 346; *E. v. Fedorow*, *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 574; *G. F. H. Smith*, *Min. Mag.* 13 (1903), p. 309; *H. Hilton*, *Min. Mag.* 14 (1904), p. 18.

kreisen in der Weise bedeckt, dass die Längengrade durch Q hindurchgehen und O' der Nullpunkt der Länge λ ist. Die Breite sei bezeichnet mit ω . Es ist $\lambda + \psi = \omega + \sigma = 90^\circ$. Wählt man jetzt in der Projektionsebene \mathcal{G}' (Fig. 3) die Schnittgeraden mit der Äquator-ebene und der Ebene des Längengrades QO' zu Koordinatenachsen X, Y , so gilt für die Projektion H des Poles h :

$$x = r \cdot \cotg \psi,$$

$$y = r \cdot \frac{\cotg \sigma}{\sin \psi}.$$

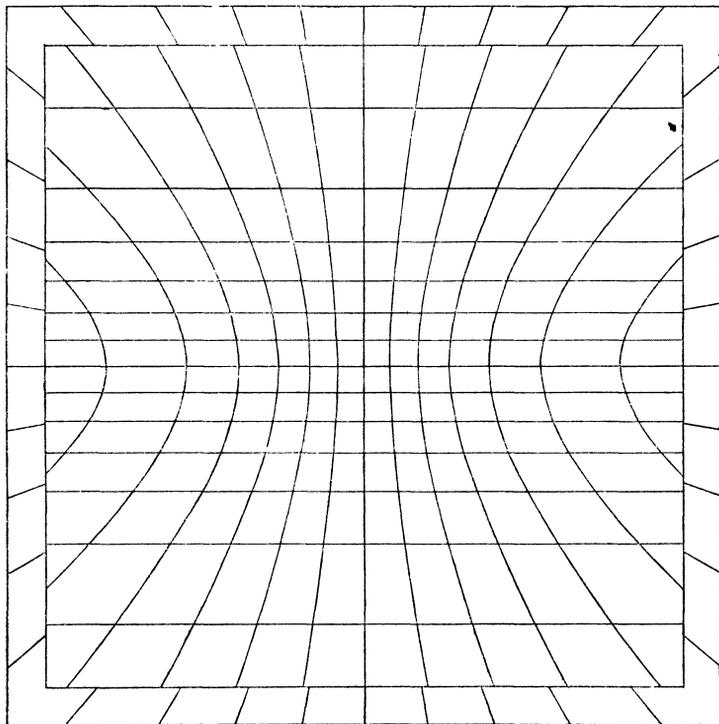


Fig. 4. Gnomonisches Netz.

Um die Herstellung gnomonischer Projektionen mit Hilfe dieser Koordinaten zu erleichtern, hat *G. T. H. Smith*⁷⁾ eine Tabelle der mit 10 multiplizierten Werte von $\cotg \sigma / \sin \psi$ in dem Gebiete von 90° bis 25° angelegt. Umgekehrt findet man mit der Tabelle und einem Transporteur aus der Projektion den Winkel zwischen zwei Flächenpolen oder zwei Zonenkreisen.

7) *G. F. H. Smith*, *Min. Mag.* 13 (1903), p. 309.

Zu demselben Zweck kann das von *H. Hilton*⁸⁾ entworfene *gnomonische Netz* (Fig. 4) benutzt werden, worin die Längenkreise abgebildet sind durch die Schar der zu *Y* parallelen Geraden:

$$x = r \cdot \operatorname{tang} \lambda$$

und die Breitenkreise durch die Hyperbeln:

$$-x^2 + y^2 \operatorname{cotg}^2 \omega = r^2.$$

II b. *Stereographische Projektion einer Polfigur.* Zur Abbildung einer Polfigur auf eine Ebene ist besonders geeignet die stereographische Projektion der Kugeloberfläche. Es ist zweckmässig die Projektionsebene \mathcal{G}' durch den Mittelpunkt *C* der Kugel und in einen Zonenkreis (Grundkreis) zu legen, wobei die Symmetrieeigenschaften der Krystalle zu berücksichtigen sind (vgl. in Fig. 5 die stereographische Projektion der Polfigur des Oktaeders, Hexaeders und Dodekaeders mit den der Fig. 1 entsprechenden Bezeichnungen der Flächen). Die Projektionsstrahlen gehen dann von einem Endpunkte *O* des zu \mathcal{G}' senkrechten Durchmessers aus. Im allgemeinen genügt die Abbildung der dem Punkte *O* gegenüberliegenden Halbkugel, die das Innere des Grundkreises erfüllt. Indessen ist es z. B. bei der Untersuchung von Symmetrieeigenschaften nützlich, die Projektion auf das benachbarte Gebiet ausserhalb des Grundkreises zu erweitern⁹⁾.

Die stereographische Projektion einer Polfigur kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn der Zonenverband und die Flächenwinkel des Polyeders gegeben sind. Dabei werden folgende Eigenschaften der Projektion benutzt. Bezeichnet man mit *O'* den

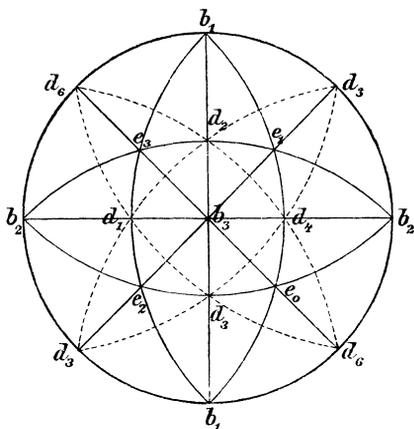


Fig. 5. Stereographische Projektion der Polfigur des Oktaeders, Hexaeders und Dodekaeders.

8) *H. Hilton*, *Min. Mag.* 14 (1904), p. 18.

9) Über die Verwertung der stereographischen Projektionen von Polfiguren vgl. *W. H. Miller*, *A Treatise on Cryst.* 1839; *Phil. Mag.* (4) 19 (1860), p. 325; *V. v. Lang*, *Lehrb. d. Kryst.* 1866, p. 299; *E. Reusch*, *Ann. Phys. Chem.* 142 (1871), p. 46; 147 (1872), p. 569; *Die stereogr. Proj.* 1881; *Th. Liebisch*, *Geom. Kryst.* 1881; *A. Brezina*, *Methodik d. Krystallbestimmung* 1884; *St. Jolles*, *Zeitschr. f. Kryst.* 18 (1891), p. 24; *G. Wulff*, *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 249; 36 (1902),

Gegenpunkt von O , mit h die Projektion des Flächenpoles h , mit r den Radius der Kugel und mit u den Winkel ($O'Ch$), so ist (Fig. 6):

$$(1) \quad Ch = r \cdot \tan \frac{u}{2}.$$

Die Projektionen aller Kugelnkreise sind wieder Kreise. Die Projektion eines grössten Kugelnkreises schneidet den Grundkreis in zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten; geht der Kreis durch O , so wird er abgebildet durch die Schnittlinie seiner Ebene mit der Projektionsebene. Der Mittelpunkt der Projektion eines Kugelnkreises ist die Projektion der Spitze des Tangentenkegels, den man in diesem Kreise an die Kugel legen kann. Für einen grössten Kugelnkreis geht der Tangentenkegel in einen Zylinder über; daher liegt der Mittelpunkt m der Projektion eines Zonenkreises \mathfrak{Z} im Schnittpunkt der von O auf die Ebene \mathfrak{Z} gefällten Normale Om mit der Projektionsebene \mathfrak{E}'' . In

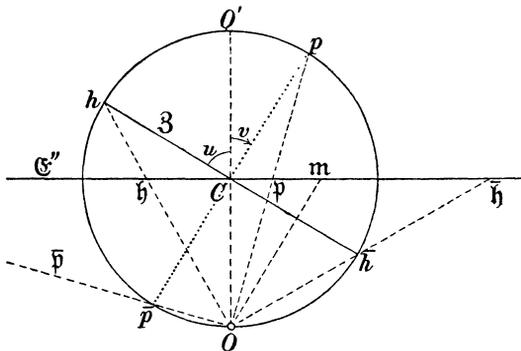


Fig. 6. Stereographische Projektionen h, \bar{h}, p der Pole h, \bar{h}, p .

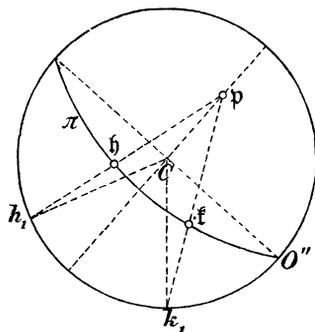


Fig. 7. Konstruktion der sphärischen Entfernung zweier Punkte $h\tilde{,} k\tilde{}$ der Kugeloberfläche.

Fig. 6 bedeutet $p\bar{p}$ den auf \mathfrak{Z} senkrechten Durchmesser; der durch O' und p gelegte Meridian schneidet \mathfrak{Z} in h und \bar{h} , deren Projektionen h und \bar{h} sind. Bezeichnet man den Radius der Projektion von \mathfrak{Z} mit r und den Winkel ($O' Cp$) mit v , so ist:

$$(2) \quad r = hm = m\bar{h} = Om = \frac{r}{\cos v}$$

$$Cm = r \cdot \tan v.$$

Von den Endpunkten des Durchmessers $p\bar{p}$ wird der auf der Halb-

p. 14; E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 357; 21 (1893), p. 617; 29 (1898), p. 639; 33 (1900), p. 589; 37 (1903), p. 138; V. Goldschmidt, Zeitschr. f. Kryst. 30 (1899), p. 260; S. L. Penfield, Amer. J. of Sc. (4) 11 (1901), p. 2, 115; 14 (1902), p. 249; H. Hilton, Phil. Mag. (6) 6 (1903), p. 66; E. Sommerfeldt, Zeitschr. f. Kryst. 41 (1906), p. 164.

kugel um O' gelegene Punkt p der Pol des Zonenkreises \mathfrak{z} genannt; seine Projektion besitzt folgende Eigenschaft: Sind h, k die Projektionen der Flächenpole h, k , so bestimmen die Verbindungslinien ph und pk auf dem Grundkreise einen Bogen h_1k_1 , der gleich dem Bogen hk ist (Fig. 7).

Die Ausführung einer Projektion wird wesentlich erleichtert durch eine Hilfsprojektion, die man gewinnt, indem man ein Netz von Längenkreisen und Breitenkreisen in der Weise stereographisch projiziert, dass ein Längenkreis mit dem Grundkreise zusammenfällt (stereographische Meridianprojektion Fig. 8). *B. Hecht*¹⁰⁾ benutzt Netze auf Pauspapier, die über der Zeichnung gedreht werden, in Verbindung mit einer Tabelle, in der neben den Winkeln u die Strecken:

$$r \cdot \tan \frac{u}{2}, \quad \frac{r}{\sin u}, \quad r \cdot \sin u$$

angegeben sind.

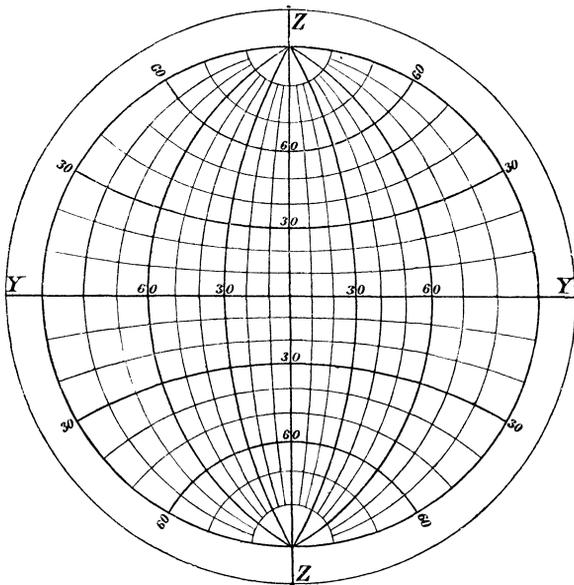


Fig. 8. Stereographische Meridianprojektion.

Zwischen den drei Projektionen bestehen einfache *Beziehungen*, wenn wir voraussetzen, dass die Projektionsebenen \mathfrak{E} der Linienprojektion eines Flächenbündels und \mathfrak{E}' der Punktprojektion des Normalenbündels zusammenfallen und parallel zur Projektionsebene \mathfrak{E}'' der stereographischen Projektion der Polfigur liegen, derart dass sie

10) *B. Hecht*, Anleitung zur Krystallberechnung, 1893, p. 64.

die Kugel im Gegenpunkte O' von O berühren (Fig. 9, 10). Es bedeute \mathfrak{B} eine Flächenrichtung, β ihre Linienprojektion, b ihren Pol, B die Punktprojektion der Flächennormale (oder die gnomonische Projektion des Poles b), \mathfrak{b} die stereographische Projektion dieses Poles,

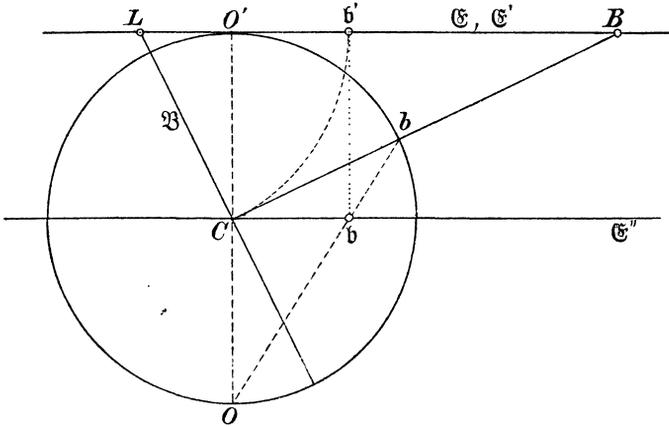


Fig. 9. Verbindungsebene der Projektionsstrahlen CB und Ob .

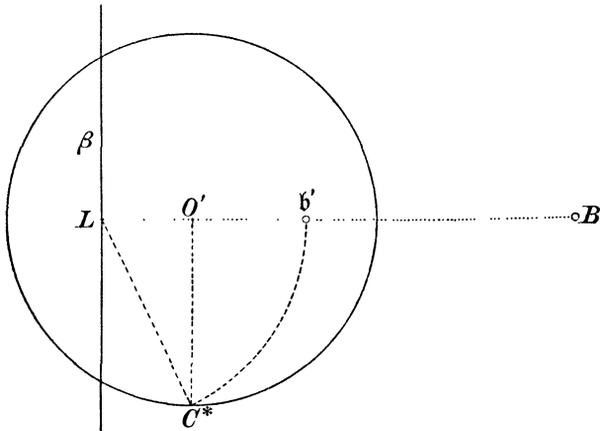


Fig. 10. Projektionsebene der Linienprojektion und der gnomonischen Projektion.

Fig. 9, 10. Zusammenhang zwischen der Linienprojektion β einer Flächenrichtung \mathfrak{B} , der stereographischen Projektion \mathfrak{b} und der gnomonischen Projektion B ihres Poles b .

\mathfrak{b}' die senkrechte Projektion von \mathfrak{b} auf \mathfrak{E} . Dann steht die Gerade $B\mathfrak{b}'O'$ senkrecht auf β in L und es ist $LC = L\mathfrak{b}'$. Denken wir uns nun \mathfrak{E}'' nach \mathfrak{E} verschoben, und beschreiben wir um O' den Distanz-

kreis mit dem Radius r , so ist die *Linienprojektion* β der *Flächenrichtung* \mathfrak{B} die *Polare der gnomonischen Projektion* B des *Poles* b in Bezug auf den *imaginären Kreis* mit dem Radius $-r$ und die *stereographische Projektion* β' des *Poles* b liegt auf dem zu β senkrechten *Durchmesser des Distanzkreises* im Abstände $LC = LC^*$ von β .

6. **Ableitung des Gesetzes der rationalen Indices aus dem Gesetz der Zonen**¹¹⁾. Von den Flächen p_1, p_2, p_3, e eines Tetraeders, das zur Ableitung eines Krystallflächenkomplexes nach dem Gesetz der Zonen dient, sollen p_1, p_2, p_3 zu Axenebenen gewählt werden (Fig. 11). Ihre Schnittgeraden π_1, π_2, π_3 bilden ein im allgemeinen schiefwinkliges Axensystem. Die Fläche e bestimme die Verhältnisse der Axeneinheiten $OE_1 : OE_2 : OE_3 = a_1 : a_2 : a_3$. Man bezeichnet die Winkel zwischen den Axen und die Verhältnisse der Einheiten als *Axenelemente*.

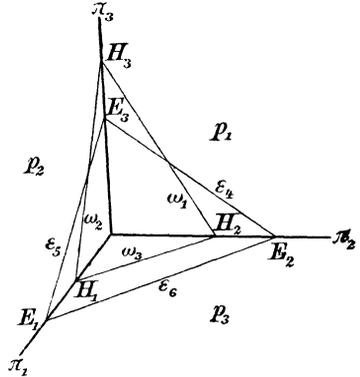


Fig. 11. Zur Definition der Indices der Fläche $H_1H_2H_3$.

In dem Komplex befinde sich die Fläche h mit den Axenabschnitten OH_1, OH_2, OH_3 , dann *verhalten sich die Quotienten aus den Axeneinheiten und den Axenabschnitten dieser Fläche wie ganze Zahlen* h_1, h_2, h_3 :

$$(1) \quad \frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = h_1 : h_2 : h_3.$$

Man nennt sie die *Indices der Fläche* h .

Der Beweis ergibt sich aus folgender Überlegung. Da nur die Richtung der Fläche h in Betracht kommt und die Verhältnisse der Richtungscosinus ihrer Normale μ gegeben sind durch:

$$\cos \mu \pi_1 : \cos \mu \pi_2 : \cos \mu \pi_3 = \frac{1}{OH_1} : \frac{1}{OH_2} : \frac{1}{OH_3} = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3},$$

so ist die Gleichung der Fläche h in Punktkoordinaten:

$$(2) \quad x_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} + x_2 \cdot \frac{h_2}{a_2} + x_3 \cdot \frac{h_3}{a_3} = 0.$$

Die Koordinaten eines Punktes der Schnittgeraden η zweier Flächen h' und h verhalten sich wie:

11) F. E. Neumann, De lege zonarum 1826; A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1849, p. 45; W. v. Bezold, Sitz.-Ber. Akad. München, math.-phys. Kl. 1863, p. 350.

$$(3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3$$

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} h_2' & h_3' \\ h_2'' & h_3'' \end{vmatrix} = (h'k'')_1, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} h_3' & h_1' \\ h_3'' & h_1'' \end{vmatrix} = (h'k'')_2$$

$$\eta_3 = \begin{vmatrix} h_1' & h_2' \\ h_1'' & h_2'' \end{vmatrix} = (h'k'')_3.$$

Man nennt die Zahlen η_1, η_2, η_3 die *Indices der Kante* η . Die Bedingung dafür, dass die Flächen h, h', h'' einer Zone angehören:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1' & h_2' & h_3' \\ h_1'' & h_2'' & h_3'' \end{vmatrix} = 0$$

enthält nur die Indices der Flächen und ist unabhängig von den Axenelementen. Liegt eine Fläche h gleichzeitig in den Zonen der Flächen h', h'' und k', k'' , also parallel den Kanten η und η' mit den Indices η_1, η_2, η_3 und $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$:

$$\eta_1' = (k'k'')_1, \quad \eta_2' = (k'k'')_2, \quad \eta_3' = (k'k'')_3,$$

so setzen sich ihre Indices in folgender Weise zusammen:

$$(5) \quad h_1 : h_2 : h_3 = (\eta\eta')_1 : (\eta\eta')_2 : (\eta\eta')_3.$$

Mit Hülfe von (3) und (5) können die Indices aller Flächen h berechnet werden, die sich nach dem Gesetz der Zonen aus den vier zu Grunde liegenden Flächen ableiten lassen. Nun sind die Indices dieser vier Flächen:

$$\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & e \\ [100 & 010 & 001 & 111. \end{array}$$

Hieraus sind die Indices aller übrigen Flächen durch die Operationen der Multiplikation und Subtraktion zu bilden. Auf solche Weise können aber nur *ganze Zahlen* entstehen: Die Indices der in einem *Krystallflächenkomplex* möglichen Flächen und Kanten verhalten sich wie ganze Zahlen, wenn die Richtungen der Koordinatenachsen und die Verhältnisse der Axeneinheiten durch vier Flächen des Komplexes bestimmt werden.

Zur geometrischen Beschreibung eines Krystallpolyeders sind also notwendig: 1. die Axenelemente, 2. die Indices der Flächen. Diese Grössen müssen aus Messungen der Flächenwinkel berechnet werden.

Die Zusammenstellung der Indices h_1, h_2, h_3 wird nach einem Vorschlage von W. Whewell¹²⁾ (1825) zur Bezeichnung der Fläche h benutzt und das Symbol von h genannt. Dieselbe Methode der Flächen-

12) W. Whewell, London Phil. Trans. 1825, p. 87.

bezeichnung haben *J. G. Grassmann*¹³⁾ und *L. Frankenheim*¹⁴⁾ im Jahre 1829 und bald darauf auch *C. Fr. Gauss*¹⁵⁾ ersonnen und angewandt; eine weitere Verbreitung erlangte sie erst durch die krystallographischen und mineralogischen Schriften von *W. H. Miller*¹⁶⁾.

Aus Fig. 11 ist ersichtlich, dass die Indices einer Fläche h auch definiert werden können als Verhältnisse der Dreiecke, die von der Fläche h und der Einheitsfläche e auf den Axenebenen bestimmt werden¹⁷⁾:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{OH_2 H_3}{OE_2 E_3} : \frac{OH_3 H_1}{OE_3 E_1} : \frac{OH_1 H_2}{OE_1 E_2}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich eine in dem Gesetz der rationalen Indices enthaltene Beziehung zwischen den Flächen und den Kanten eines Krystals. Betrachten wir das Ellipsoid, in welchem π_1, π_2, π_3 nach Richtung und Länge konjugierte Durchmesser sind. Zu der Diametralebene, die parallel der Krystallfläche mit den Indices h_1, h_2, h_3 liegt, gehöre der konjugierte Durchmesser nach dem Punkte y_1', y_2', y_3' des Ellipsoids; dann ist die Gleichung dieser Ebene:

$$\frac{y_1 y_1'}{a_1^2} + \frac{y_2 y_2'}{a_2^2} + \frac{y_3 y_3'}{a_3^2} = 0.$$

Demnach verhalten sich nach (2) die Indices der Krystallfläche wie:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{y_1'}{a_1} : \frac{y_2'}{a_2} : \frac{y_3'}{a_3}.$$

13) *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie u. geometr. Kombinationslehre 1 (1829). Vgl. Ann. Phys. Chem. 30 (1833), p. 1.

14) *M. L. Frankenheim*, De crystallorum cohaesione, Vratisl. 1829.

15) *C. Fr. Gauss*, Werke 2 (1863), p. 308.

16) *W. H. Miller*, Phil. Mag. (3) 6 (1835), p. 105; A treatise on crystallography 1839; A tract on crystallography 1863; An elementary introduction to mineralogy by *W. Philipps*; new edit. by *H. J. Brocke* and *W. H. Miller* 1852.

17) *H. Grassmann*, Ausdehnungslehre von 1844, § 171. [Vgl. *G. Junghann*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 1 (1881), p. 334.] Die *H. Grassmann'sche* Fassung des Gesetzes der rationalen Indices lautet: „Wenn man vier Flächen eines Krystalles ohne Änderung ihrer Richtungen so legt, dass sie einen Raum einschliessen, und die Stücke, welche dadurch von dreien derselben abgeschnitten werden, zu Richtmassen macht, so lässt sich jede andere Fläche des Krystalles als Vielfachensumme dieser Richtmasse rational ausdrücken.“ Oder: „Wenn man drei Kanten eines Krystalles, welche nicht in derselben Ebene liegen, ohne Änderung ihrer Richtung an einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt legt, und als ihre Endpunkte ihre Durchschnitte mit irgend einer Krystallfläche setzt, so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als Vielfachensumme dieser Strecken rational ausdrücken.“ Wie sich diese Fassung aus dem Gesetz der Zonen ergibt mit Hilfe der Regeln über die Multiplikation von Strecken und Flächenräumen hat *Fr. Engel* gezeigt in: *H. Grassmann*, Ges. math. u. phys. Werke 1, 1 (1894), p. 411.

Andererseits verhalten sich nach (3) die Koordinaten des konjugierten Durchmessers mit den Indices η_1, η_2, η_3 wie:

$$y_1' : y_2' : y_3' = a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3.$$

Daraus folgt:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \eta_1 : \eta_2 : \eta_3,$$

d. h. in einem Ellipsoid, in welchem die Krystallaxen nach Richtung und Länge konjugierte Durchmesser sind, gehört zu jeder Diametralebene, die einer Krystallfläche parallel liegt, ein konjugierter Durchmesser, der die Richtung einer Krystallfläche und dieselben Indices wie jene Fläche besitzt¹⁸⁾.

7. Topische Parameter. Setzt man das Volumen des Elementarparallelepipeds eines triklinen Raumgitters gleich dem Molekularvolumen V des Stoffes, so werden die Kantenlängen χ, ψ, ω des Parallelepipeds *topische Parameter* genannt. Sie dienen zur Vergleichung der Krystallformen verschiedener Stoffe¹⁹⁾. Bezeichnet man das Verhältnis der Axeneinheiten:

$$\frac{a_1}{a_2} = a, \quad \frac{a_3}{a_2} = c,$$

die Winkel $\pi_3 \pi_1 = \beta$, $\pi_1 \pi_2 = \gamma$ und den inneren Winkel der Ebenen $\pi_3 \pi_1$, $\pi_1 \pi_2$ an π_1 mit A , so ist:

$$\begin{aligned} a : 1 : c &= \chi : \psi : \omega, \\ V &= \chi \psi \omega \sin \beta \sin \gamma \sin A, \\ \chi^3 &= a^3 \psi^3 = \frac{a^3 V}{c \sin \beta \sin \gamma \sin A}, \\ \psi^3 &= \frac{V}{ac \sin \beta \sin \gamma \sin A}, \\ \omega^3 &= c^3 \psi^3 = \frac{c^3 V}{a \sin \beta \sin \gamma \sin A}. \end{aligned}$$

8. Transformation der Indices. Eine Veränderung der Axenebenen und der Einheitsfläche führt wieder auf rationale Indices, wie aus folgenden Relationen hervorgeht²⁰⁾.

erteilt man den Flächen f^1, f^2, f^3, k mit den ursprünglichen Indices:

18) Qu. Sella, Nuovo Cimento 4 (1856), p. 93.

19) F. Becke, Anzeiger Wien. Akad. 30 (1893), p. 204; W. Muthmann, Zeitschr. f. Kryst. 22 (1894), p. 497; A. E. Tutton, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 1; 27 (1897), p. 113, 266; 29 (1898), p. 54.

20) A. T. Kupffer, Ann. Phys. Chem. 8 (1826), p. 61, 215; Handb. d. rechn. Krystallon. 1831, p. 497; J. F. Chr. Hessel, Krystallometrie 1831, p. 214; H. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844, § 171; Th. Liebisch, Geom. Kryst. 1881, p. 48.

$$f_1^1 f_2^1 f_3^1, \quad f_1^2 f_2^2 f_3^2, \quad f_1^3 f_2^3 f_3^3, \quad k_1 k_2 k_3$$

die neuen Indices

$$100, \quad 010, \quad 001, \quad 111$$

so erhält eine beliebige Fläche h jetzt folgende Indices:

$$(1) \quad t_1 : t_2 : t_3 = \frac{|hf^2 f^3|}{K_1} : \frac{|f^1 h f^3|}{K_2} : \frac{|f^1 f^2 h|}{K_3},$$

worin z. B. $|hf^2 f^3|$ gesetzt ist für:

$$\begin{vmatrix} h_1 & f_1^2 & f_1^3 \\ h_2 & f_2^2 & f_2^3 \\ h_3 & f_3^2 & f_3^3 \end{vmatrix}$$

und:

$$K_1 = |kf^2 f^3|, \quad K_2 = |f^1 k f^3|, \quad K_3 = |f^1 f^2 k|.$$

Eine Kante η ist nun zu bezeichnen durch:

$$(2) \quad \begin{cases} t_1 = K_1 K_1 (f_1^1 \eta_1 + f_2^1 \eta_2 + f_3^1 \eta_3) \\ t_2 = K_2 K_2 (f_1^2 \eta_1 + f_2^2 \eta_2 + f_3^2 \eta_3) \\ t_3 = K_3 K_3 (f_1^3 \eta_1 + f_2^3 \eta_2 + f_3^3 \eta_3). \end{cases}$$

Die Relation (1) ist ein spezieller Fall von (3).

Sollen die Flächen f^1, f^2, f^3, k die Indices:

$$q_1^1 q_2^1 q_3^1, \quad q_1^2 q_2^2 q_3^2, \quad q_1^3 q_2^3 q_3^3, \quad r_1 r_2 r_3$$

annehmen, so ergeben sich die neuen Indices m_1, m_2, m_3 der Fläche h aus:

$$(3) \quad \begin{cases} m_1 = \frac{|rq^2 q^3| \cdot |hf^2 f^3|}{|kf^2 f^3|} q_1^1 + \frac{|q_1^1 r q_3^3| \cdot |f_1^1 h f^3|}{|f_1^1 k f^3|} q_1^2 + \frac{|q^1 q^2 r| \cdot |f^1 f^2 h|}{|f_1^1 f_2^2 k|} q_1^3 \\ m_2 = \frac{|rq^2 q^3| \cdot |hf^2 f^3|}{|kf^2 f^3|} q_2^1 + \frac{|q^1 r q^3| \cdot |f^1 h f^3|}{|f^1 k f^3|} q_2^2 + \frac{|q^1 q^2 r| \cdot |f^1 f^2 h|}{|f_1^1 f^2 k|} q_2^3 \\ m_3 = \frac{|rq^2 q^3| \cdot |hf^2 f^3|}{|kf^2 f^3|} q_3^1 + \frac{|q^1 r q^3| \cdot |f^1 h f^3|}{|f^1 k f^3|} q_3^2 + \frac{|q^1 q^2 r| \cdot |f^1 f^2 h|}{|f^1 f^2 k|} q_3^3. \end{cases}$$

9. Koordinaten von Flächen und Kanten. In einem krystallographischen Ebenenbündel mit dem Zentrum C seien π_1, π_2, π_3 die zu Koordinatenaxen gewählten Kanten, ν_1, ν_2, ν_3 die Normalen der Axenebenen p_1, p_2, p_3 . Nach der Definition der Flächenwinkel (S. 396) sind die Aussenwinkel (π_i) der Ecke $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ und (ν_i) der Ecke $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ gleich folgenden Winkeln²¹⁾ (Fig. 12):

$$\begin{aligned} (\pi_1) &= \nu_2 \nu_3, & (\pi_2) &= \nu_3 \nu_1, & (\pi_3) &= \nu_1 \nu_2, \\ (\nu_1) &= \pi_2 \pi_3, & (\nu_2) &= \pi_3 \pi_1, & (\nu_3) &= \pi_1 \pi_2, \end{aligned}$$

21) *H. Grassmann*, Lehrbuch d. Trigonometrie 1865, p. 100.

und es gilt:

$$\frac{1}{\cos \pi_1 \nu_1} : \frac{1}{\cos \pi_2 \nu_2} : \frac{1}{\cos \pi_3 \nu_3} \\ = \sin \pi_2 \pi_3 : \sin \pi_3 \pi_1 : \sin \pi_1 \pi_2 = \sin \nu_2 \nu_3 : \sin \nu_3 \nu_1 : \sin \nu_1 \nu_2.$$

Bezeichnet man die Cosinus der Einfallswinkel der Koordinatenachsen in Bezug auf die Fläche h oder die Richtungscosinus ihrer Normale

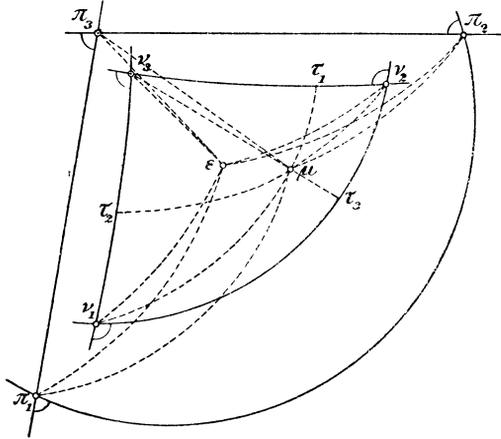


Fig. 12. Stereographische Projektion der Pole der Axenebenen, der Einheitsfläche und einer beliebigen Fläche.

μ als Koordinaten u_1, u_2, u_3 dieser Fläche, so besteht die Beziehung (S. 407):

$$u_1 : u_2 : u_3 = \cos \mu \pi_1 : \cos \mu \pi_2 : \cos \mu \pi_3 = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3}.$$

Die durch einen Punkt P einer Kante η parallel zu den Axenebenen gelegten Ebenen mögen die Koordinatenachsen schneiden in Π_1, Π_2, Π_3 und die Normalen der Axenebenen in N_1, N_2, N_3 . Dann ist:

$$CN_i = C\Pi_i \cdot \cos \pi_i \nu_i = CP \cdot \cos \eta \nu_i.$$

Bezeichnet man jetzt die Koordinaten $C\Pi_1, C\Pi_2, C\Pi_3$ des Punktes P mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 , so folgt mit Rücksicht auf (3) S. 408:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sin \pi_2 \pi_3 \cdot \cos \eta \nu_1 : \sin \pi_3 \pi_1 \cdot \cos \eta \nu_2 : \sin \pi_1 \pi_2 \cdot \cos \eta \nu_3 \\ = a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3.$$

Die Koordinaten einer Kante verhalten sich also wie die Cosinus der Einfallswinkel der Kante in Bezug auf die Axenebenen, jeder Cosinus multipliziert mit dem Sinus des in der Axenebene gelegenen Axenwinkels²²⁾.

22) Th. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 138.

Hiernach verhalten sich die Quotienten entsprechender Indices zweier Flächen h, h' wie die Quotienten aus den Cosinus der Einfallswinkel der Koordinatenaxen in Bezug auf diese Flächen:

$$\frac{h_1}{h_1'} : \frac{h_2}{h_2'} : \frac{h_3}{h_3'} = \frac{\cos \mu \pi_1}{\cos \mu' \pi_1} : \frac{\cos \mu \pi_2}{\cos \mu' \pi_2} : \frac{\cos \mu \pi_3}{\cos \mu' \pi_3}$$

und die Quotienten entsprechender Indices zweier Kanten η, η' wie die Quotienten aus den Cosinus der Einfallswinkel dieser Kanten in Bezug auf die Axenebenen:

$$\frac{\eta_1}{\eta_1'} : \frac{\eta_2}{\eta_2'} : \frac{\eta_3}{\eta_3'} = \frac{\cos \eta \nu_1}{\cos \eta' \nu_1} : \frac{\cos \eta \nu_2}{\cos \eta' \nu_2} : \frac{\cos \eta \nu_3}{\cos \eta' \nu_3}$$

Wählt man nach *J. G. Grassmann*²³⁾ die Normalen ν_1, ν_2, ν_3 der ursprünglichen Axenebenen zu Koordinatenaxen, so verhalten sich die Koordinaten m_1, m_2, m_3 der Normale μ einer Fläche h wie:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \sin \nu_2 \nu_3 \cdot \cos \mu \pi_1 : \sin \nu_3 \nu_1 \cdot \cos \mu \pi_2 : \sin \nu_1 \nu_2 \cdot \cos \mu \pi_3$$

oder, wenn die Abschnitte von h auf den ursprünglichen Koordinatenaxen nach S. 407 eingeführt werden:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sin \nu_2 \nu_3}{OH_1} : \frac{\sin \nu_3 \nu_1}{OH_2} : \frac{\sin \nu_1 \nu_2}{OH_3}$$

oder, wenn:

$$\frac{\sin \nu_2 \nu_3}{a_1} = \alpha_1, \quad \frac{\sin \nu_3 \nu_1}{a_2} = \alpha_2, \quad \frac{\sin \nu_1 \nu_2}{a_3} = \alpha_3$$

als Längeneinheiten auf den Normalen ν_1, ν_2, ν_3 eingeführt werden:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \alpha_1 h_1 : \alpha_2 h_2 : \alpha_3 h_3.$$

Demnach erhält in dem *J. G. Grassmann'schen* Koordinatensystem die Normale μ einer Fläche h dieselben Indices h_1, h_2, h_3 , die in dem ursprünglichen Koordinatensystem der Fläche gegeben werden.

10. Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse. Die Lage der Einheitsfläche gegen die Axenebenen p_1, p_2, p_3 kann beschrieben werden durch Angabe der Sinusverhältnisse, nach denen die von e auf den Axenebenen erzeugten Kanten $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ die Axenwinkel teilen. Wird in analoger Weise die Lage einer beliebigen Fläche h bestimmt, welche mit den Axenebenen die Kanten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bildet (Fig. 11), so ist das Doppelverhältnis:

$$(\pi_3 \pi_2 \varepsilon_4 \omega_1) = \frac{\sin \pi_3 \varepsilon_4}{\sin \pi_2 \varepsilon_4} : \frac{\sin \pi_3 \omega_1}{\sin \pi_2 \omega_1} = \frac{OE_2}{OE_3} : \frac{OH_2}{OH_3} = h_2 : h_3$$

$$(\pi_1 \pi_3 \varepsilon_5 \omega_2) = h_3 : h_1$$

$$(\pi_2 \pi_1 \varepsilon_6 \omega_3) = h_1 : h_2.$$

23) *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie 1 (1829), p. X, 5, 50; *J. Fr. Chr. Hessel*, Krystallometrie 1831, p. 223; *M. L. Frankenheim*, J. f. Math. 8 (1832), p. 172; *W. H. Miller*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 5 (1868), § 5.

Die projektivischen Koordinaten²⁴⁾ einer Krystallfläche sind also identisch mit deren Indices²⁵⁾.

Setzt man an Stelle der Geraden, die in diesen Doppelverhältnissen auftreten, die zu ihnen senkrechten Ebenen, so erhält man das Grundgesetz in der Form, in der es von C. Fr. Gauss 1831 ausgesprochen wurde²⁶⁾. Zur direkten Ableitung dient die Polfigur (Fig. 12), in der ε den Pol der Einheitsfläche e und μ den Pol der Fläche h bedeutet. Die rechtseitigen Dreiecke $\mu\pi_1\nu_2$, $\mu\pi_1\nu_3$, u. s. w., die den Eckpunkt μ gemein haben, liefern:

$$(1) \quad \begin{aligned} \cos \mu\pi_1 &= \sin \nu_2 \mu \sin \mu\nu_2\nu_3 = \sin \nu_3 \mu \sin \mu\nu_3\nu_2 \\ \cos \mu\pi_2 &= \sin \nu_3 \mu \sin \mu\nu_3\nu_1 = \sin \nu_1 \mu \sin \mu\nu_1\nu_3 \\ \cos \mu\pi_3 &= \sin \nu_1 \mu \sin \mu\nu_1\nu_2 = \sin \nu_2 \mu \sin \mu\nu_2\nu_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt z. B.

$$(2) \quad \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = \frac{\cos \mu\pi_2}{\cos \mu\pi_3} = \frac{\sin \mu\nu_1\nu_3}{\sin \mu\nu_1\nu_2}.$$

Für die Einheitsfläche gilt:

$$(3) \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\cos \varepsilon\pi_2}{\cos \varepsilon\pi_3} = \frac{\sin \varepsilon\nu_1\nu_3}{\sin \varepsilon\nu_1\nu_2}.$$

Demnach ist:

$$(4) \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{\sin \varepsilon\nu_1\nu_3}{\sin \varepsilon\nu_1\nu_2} : \frac{\sin \mu\nu_1\nu_3}{\sin \mu\nu_1\nu_2}.$$

Der rechtsstehende Quotient ist das Doppelverhältnis der vier Zonenkreise $\nu_1\nu_2$, $\nu_1\nu_3$, $\nu_1\varepsilon$, $\nu_1\mu$, die durch den Pol ν_1 der Axenebene p_1 gehen²⁷⁾.

Den allgemeinen Ausdruck für das Doppelverhältnis von vier Flächen h , h' , h'' , h''' einer Zone als Funktion ihrer Indices hat W. H. Miller 1839 angegeben²⁸⁾. Bedeuten 1, 2, 3, 4 vier Punkte einer Kugeloberfläche, von denen 1, 2, 3 auf einem Hauptkreise liegen, so besteht die Beziehung:

$$\cos 41 \cdot \sin 23 + \cos 42 \cdot \sin 31 + \cos 43 \cdot \sin 12 = 0.$$

Wendet man sie der Reihe nach an auf die Pole h , h' , h'' und den Schnittpunkt der Kugel der Polfigur mit je einer der Axen π_1 , π_2 , π_3 , so erhält man für die Koordinaten u_λ , u'_λ , u''_λ ($\lambda = 1, 2, 3$) die Gleichungen:

24) W. Fiedler, Vierteljahrsschr. naturf. Ges. zu Zürich 15 (1870), p. 152; Darstellende Geometrie, 3. Aufl. 3 (1888), p. 69, 642.

25) Liebisch, Geom. Krystallogr. 1881, p. 16.

26) C. Fr. Gauss, Werke 2 (1863), p. 308; aus dem Nachlass d. J. 1831.

Vgl. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 3 (1878), p. 28.

27) W. H. Miller, Proc. Cambridge Phil. Soc. 1866—67, p. 75.

28) W. H. Miller, A treatise on crystallography, 1839, p. 14.

$$u_\lambda \cdot \sin h'h'' + u'_\lambda \cdot \sin h''h + u''_\lambda \cdot \sin hh' = 0,$$

aus denen sich ergibt ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$\sin h'h'' : \sin h''h : \sin hh' = (u'u'')_\alpha : (u''u)_\alpha : (uu')_\alpha.$$

Analog gilt für die Flächen h, h', h'' ($\beta = 1, 2, 3$):

$$\sin h'h''' : \sin h''h' : \sin hh'' = (u'u''')_\beta : (u'''u)_\beta : (uu'')_\beta.$$

Bezeichnen wir mit $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ Proportionalitätsfaktoren, so können wir nun die Koordinaten ersetzen durch die entsprechenden Indices und Axeneinheiten:

$$u_\lambda = \varrho \cdot \frac{h_\lambda}{a_\lambda}, \quad u'_\lambda = \varrho' \cdot \frac{h'_\lambda}{a_\lambda}, \quad u''_\lambda = \varrho'' \cdot \frac{h''_\lambda}{a_\lambda}, \quad u'''_\lambda = \varrho''' \cdot \frac{h'''_\lambda}{a_\lambda}.$$

Dann drückt sich das Doppelverhältnis der vier Flächen in folgender Weise durch deren Indices aus:

$$(hh'h''h''') = \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} : \frac{\sin hh'''}{\sin h'h'''} = \frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} : \frac{(hh''')_\beta}{(h'h''')_\beta}.$$

Das Doppelverhältnis von vier Flächen einer Zone ist also eine rationale Zahl.

Hieraus ergibt sich, dass eine Zone bekannt ist, wenn man in ihr zwei aufeinanderfolgende Winkel kennt.

Das Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse enthält die Lösungen der folgenden fundamentalen Aufgaben (*W. H. Miller* 1839).

I. Wenn die Winkel zwischen vier Flächen h, h', h'', h''' einer Zone und die Indices von drei Flächen h, h', h'' gegeben sind, so berechnet man die Indices der vierten Fläche aus:

$$h_1''' : h_2''' : h_3''' = \mathfrak{G}h_1 - h_1' : \mathfrak{G}h_2 - h_2' : \mathfrak{G}h_3 - h_3'$$

$$\mathfrak{G} = (hh'h''h''') \cdot \frac{(h'h'')_\alpha}{(hh'')_\alpha}.$$

II. Wenn die Indices der vier Flächen und zwei ihrer Winkel, z. B. hh' und hh'' gegeben sind, so findet man den Winkel hh''' aus:

$$\cotg hh''' = (1 - \mathfrak{A}) \cotg hh' + \mathfrak{A} \cotg hh''$$

$$\mathfrak{A} = (hh'h''h''').$$

Zur logarithmischen Berechnung bequemer ist:

$$\text{tang}(hh'' - \frac{1}{2}hh') = \text{tang} \frac{1}{2}hh' \cdot \text{tang}(45^\circ + \Theta)$$

$$\text{tang} \Theta = \mathfrak{A} \cdot \frac{\sin(h'h + hh'')}{\sin hh''}.$$

Zwischen den Winkeln von vier harmonischen Flächen ($\mathfrak{A} = -1$) besteht die Relation:

$$2 \cotg hh' - \cotg hh'' - \cotg hh''' = 0.$$

Ist $hh'' = 90^\circ$ und $h'h''$ bekannt, so ergibt sich hk' aus:

$$\frac{\sin(2hk' + h'h'')}{\sin h'h''} = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}.$$

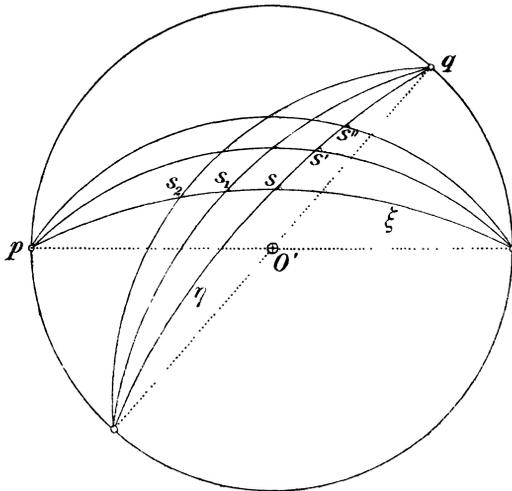


Fig. 13. Stereographische Projektion.

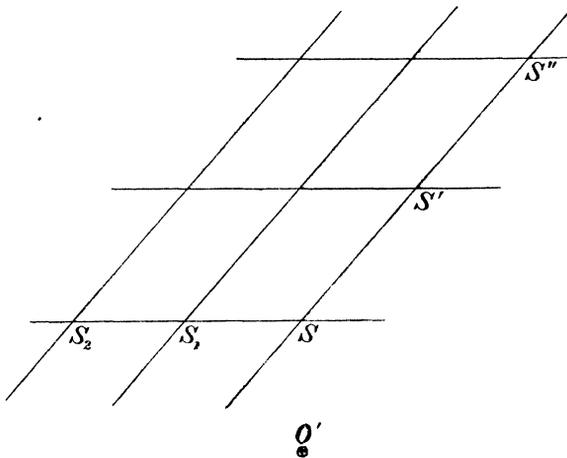


Fig. 14. Gnomonische Projektion.

Aus dem Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse folgt, dass die gnomonische Projektion einer Polfigur auf unendlich viele Arten in ein Netz von kongruenten Parallelogrammen geteilt werden kann²⁹⁾. Es seien ξ, η zwei Zonenkreise durch den Pol s (Fig. 13).

²⁹⁾ G. F. H. Smith, Min. Mag. 13 (1903), p. 314.

In ξ seien p der Pol, der gleichzeitig dem Grundkreis angehört, und s_1, s_2 zwei beliebig gewählte Pole. Die gnomonischen Projektionen von s, s_1, s_2 seien bezeichnet mit S, S_1, S_2 (Fig. 14). Dann wird das Doppelverhältnis $(s_2 s_1 s p)$ durch die Projektion auf das einfache Verhältnis der Strecken $S_2 S$ und $S_1 S$ zurückgeführt:

$$(s_2 s_1 s p) = (S_2 S_1 S \infty) = \frac{S_2 S}{S_1 S}.$$

Da sein Wert eine rationale Zahl sein muss, so können wir die Strecke $S_1 S$ zur Einheit wählen und auf der Zonenlinie die Pole S_2 markieren, für die das Verhältnis $S_2 S : S_1 S$ eine ganze Zahl ist. In analoger Weise verfahren wir in der Zone η :

$$(s'' s' s q) = (S'' S' S \infty) = \frac{S'' S}{S' S}.$$

Nun kann durch p und q je ein Büschel von Zonenkreisen gelegt werden, deren Projektionen zwei zu den Kugeldurchmessern nach p und q parallele Büschel von Zonenlinien sind. Da die Zonenlinien jedes Büschels äquidistant sind, so ergibt sich der oben angeführte Satz.

11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices³⁰⁾. Sie ergeben sich aus der Relation zwischen den Winkeln, die von fünf Geraden oder Ebenen eingeschlossen werden:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \cos 45 & \cos 41 & \cos 42 & \cos 43 \\ \cos 15 & 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 25 & \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 35 & \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt wird und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden,

$$(2) \quad \Delta \cos 45 = \sum_{i,k=1}^3 \Delta_{ik} \cos 4i \cos 5k.$$

Fällt 4 mit 5 zusammen, so erhält man eine Beziehung zwischen den

30) *H. de Senarmont* in: *Traité de cristallographie* par *W. H. Miller*, 1842, Note p. 198; *Th. Liebisch*, *Zeitschr. f. Kryst.* 1 (1877), p. 132; 4 (1880), p. 263; *Geometr. Krystallogr.* 1881, p. 63—98.

sechs Flächenwinkeln eines vollständigen Vierflachs oder den sechs Kantenwinkeln eines vollständigen Vierkants:

$$(3) \quad \Delta = \sum_{ik=1}^3 \Delta_{ik} \cos 4i \cos 4k.$$

Es seien 1, 2, 3 die Axen π_1, π_2, π_3 und 4, 5 die Normalen μ, μ' der Flächen h, h' . Dann sind die Koordinaten dieser Flächen nach (S. 412):

$$\cos \mu \pi_i = \varrho \cdot \frac{h_i}{a_i}, \quad \cos \mu' \pi_i = \varrho' \cdot \frac{h'_i}{a_k},$$

worin ϱ und ϱ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k = \varphi(h), \quad \sum_{ik=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h'_k = \varphi(h, h')$$

ein, so ergibt sich aus (2) und (3):

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta \cos hh' &= \varrho \varrho' \cdot \varphi(h, h') \\ \Delta &= \varrho \varrho' \cdot \varphi(h) = \varrho' \varrho' \cdot \varphi(h'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir folgenden Wert für den *Cosinus eines Flächenwinkels* hh' ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Flächen h und h' :

$$(5) \quad \cos hh' = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}}.$$

Es seien 1, 2, 3 die Normalen p_1, p_2, p_3 der Axenebenen und 4, 5 die Kanten η, η' . Multipliziert man in (1) die zweite, dritte, vierte Zeile und die zweite, dritte, vierte Reihe mit

$$\sin \pi_2 \pi_3, \quad \sin \pi_3 \pi_1, \quad \sin \pi_1 \pi_2,$$

so ergibt sich:

$$(6) \quad \left| \begin{array}{cccc} \cos \eta \eta' & \sin \pi_2 \pi_3 \cos \eta \nu_1 & \sin \pi_3 \pi_1 \cos \eta \nu_2 & \sin \pi_1 \pi_2 \cos \eta \nu_3 \\ \sin \pi_2 \pi_3 \cos \nu_1 \eta' & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \sin \pi_3 \pi_1 \cos \nu_2 \eta' & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \sin \pi_1 \pi_2 \cos \nu_3 \eta' & \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{array} \right| = 0$$

oder, wenn $\cos \pi_i \pi_k$ mit c_{ik} bezeichnet wird:

$$(7) \quad \Delta \cos \eta \eta' = \sum_{ik=1}^3 c_{ik} \sin(\nu_i) \sin(\nu_k) \cos \eta \nu_i \cos \eta' \nu_k.$$

Die Koordinaten der Kanten η, η' sind nach S. 412:

$$\begin{aligned} \sin(\nu_i) \cos \eta \nu_i &= \sigma \cdot a_i \eta_i \\ \sin(\nu_k) \cos \eta' \nu_k &= \sigma' \cdot a_k \eta'_k, \end{aligned}$$

worin σ und σ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k = f(\eta), \quad \sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta'_k = f(\eta, \eta')$$

ein, so ergibt sich aus (7):

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta \cos \eta \eta' &= \sigma \sigma' \cdot f(\eta, \eta') \\ \Delta &= \sigma \sigma \cdot f(\eta) = \sigma' \sigma' \cdot f(\eta'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für den *Cosinus eines Kantenwinkels* $\eta \eta'$, ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Kanten η und η' :

$$(9) \quad \cos \eta \eta' = \frac{f(\eta, \eta')}{\sqrt{f(\eta) \cdot f(\eta')}}.$$

Die Identitäten, zu denen eine quadratische Form und die zu ihr adjungierte Form Anlass geben, lauten in dem vorliegenden Falle:

$$(10) \quad \begin{aligned} f(\eta) f(\eta') - f(\eta, \eta') f(\eta, \eta') &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdot \varphi((\eta \eta')) \\ \varphi(h) \varphi(h') - \varphi(h, h') \varphi(h, h') &= \frac{\Delta}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \cdot f((hh')). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe bildet man die Ausdrücke für den *Sinus* und die *Tangente* eines Flächenwinkels:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sin hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt{\frac{f((hh'))}{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}} \\ \tan hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \frac{\sqrt{f((hh'))}}{\varphi(h, h')} \end{aligned}$$

und eines Kantenwinkels:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sin \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \sqrt{\frac{\varphi((\eta \eta'))}{f(\eta) \cdot f(\eta')}} \\ \tan \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi((\eta \eta'))}}{f(\eta, \eta')}. \end{aligned}$$

Mit den Werten von ϱ aus (4) und σ aus (8) erhalten wir für die *Koordinaten einer Fläche* h :

$$(13) \quad \cos \mu \pi_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_i} \cdot \frac{h_i}{\sqrt{\varphi(h)}},$$

und für die *Koordinaten einer Kante* η :

$$(14) \quad \sin(\nu_i) \cos \eta \nu_i = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot a_i \eta_i}{\sqrt{f(\eta)}}.$$

12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten.

Sind h, h', h'' die Flächen einer Zone, so kann man nach (4) S. 408 die Verhältnisse der Indices von h'' darstellen durch die Indices der Flächen h, h' und eine *rationale Zahl* τ , die mit h'' variiert:

$$(15) \quad \begin{aligned} h_1'' : h_2'' : h_3'' &= h_1 + \tau h_1' : h_2 + \tau h_2' : h_3 + \tau h_3' \\ \tau &= -\frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Gehen wir zu den Koordinaten der Fläche über, so ergibt sich mit Rücksicht auf S. 415:

$$\begin{aligned} u_1'' : u_2'' : u_3'' &= u_1 + tu_1' : u_2 + tu_2' : u_3 + tu_3' \\ t &= \frac{\rho}{\rho'} \cdot \tau = -\frac{(u u'')_\alpha}{(u' u'')_\alpha} = -\frac{\sin h h''}{\sin h' h''}. \end{aligned}$$

t ist das *negative Teilungsverhältnis*, das die Lage der Fläche h'' in der Zone der Flächen h, h' bestimmt durch Angabe des Sinusverhältnisses, nach welchem h'' den Winkel hh' teilt. Wir können jetzt t und τ auch ausdrücken durch die Indices der Flächen h, h', h'' und die Axenelemente, denn nach (4) ist³¹⁾:

$$(16) \quad \begin{aligned} t &= -\frac{(hh')_\alpha}{(h'h')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}} \\ \tau &= -\frac{\sin hh''}{\sin h'h''} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h'')}{\varphi(h)}}. \end{aligned}$$

In analoger Weise lassen sich die Indices einer Kante η'' , die mit η und η' in einem Büschel liegt, darstellen durch die Indices von η, η' und eine rationale Zahl d :

$$(17) \quad \begin{aligned} \eta_1'' : \eta_2'' : \eta_3'' &= \eta_1 + d\eta_1' : \eta_2 + d\eta_2' : \eta_3 + d\eta_3' \\ d &= -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Koordinaten dieser Kante nach S. 412, 415:

$$\begin{aligned} \xi_1'' : \xi_2'' : \xi_3'' &= \xi_1 + \delta\xi_1' : \xi_2 + \delta\xi_2' : \xi_3 + \delta\xi_3' \\ \delta &= \frac{\sigma}{\sigma'} \cdot d = -\frac{(\xi\xi'')_\alpha}{(\xi'\xi'')_\alpha} = -\frac{\sin \eta \eta''}{\sin \eta' \eta''}, \end{aligned}$$

worin nach (8):

$$(18) \quad \delta = -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta'')}{f(\eta)}}, \quad d = -\frac{\sin \eta \eta''}{\sin \eta' \eta''} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta'')}{f(\eta)}}.$$

Sind gegeben die Axenelemente des Krystals, die Indices der Flächen h, h' und deren Winkel, so findet man in der Zone dieser Flächen diejenige Fläche h'' , für welche τ den Wert ± 1 hat, aus:

$$(19) \quad h_1'' : h_2'' : h_3'' = h_1 \pm h_1' : h_2 \pm h_2' : h_3 \pm h_3'$$

und den Winkel zwischen h'' und h oder h' aus:

$$(20) \quad \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh' + h'h''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh'}{\sin h'h + hh''} = \mp \sqrt{\frac{\varphi(h'')}{\varphi(h)}}.$$

31) Th. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 149; Geom. Kryst. 1881, p. 32, 75, 77, 85.

Zur logarithmischen Berechnung führt man den Hülfswinkel Θ ein durch:

$$\tan \Theta = \mp \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}}.$$

Dann ergibt sich der Winkel $h'h''$ aus:

$$\tan(h'h'' - \frac{1}{2}h'h) = \tan \frac{1}{2}h'h \cdot \tan(\Theta + 45^\circ).$$

Ein analoger Satz gilt für Kantenbüschel.

Auf die Beziehungen (19) und (20) gründet sich die *krystallographische Entwicklung* von Flächen oder Kanten eines Büschels aus zwei gegebenen Flächen oder Kanten durch fortgesetzte Addition gleichstelliger Indices³²⁾. Sie lässt sich veranschaulichen mit Hilfe der Raumgitterstruktur (Nr. 3). Denn in einem Raumgitter³³⁾ ist der Abstand \mathfrak{B} benachbarter Punkte auf einer Punktreihe η gegeben durch:

$$(21) \quad \mathfrak{B} = \sqrt{f(\eta)}$$

und der Flächeninhalt \mathfrak{S} des Elementarparallelogramms einer Netzebene η durch:

$$(22) \quad \mathfrak{S} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\varphi(h)}.$$

13. Flächendichte von Netzebenen. Der Flächeninhalt \mathfrak{S} und der Abstand der Ebene h von der nächsten benachbarten Netzebene sind umgekehrt proportional; denn das Produkt beider ist das konstante Volumen \mathfrak{V} des Elementarparallelepipeds des Raumgitters:

$$(23) \quad \mathfrak{V} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\Delta}.$$

Der Abstand benachbarter Netzebenen ist um so grösser, je dichter sie mit Gitterpunkten besetzt sind; die Flächendichte r ist gleich dem reziproken Werte des Flächeninhaltes \mathfrak{S} :

$$(24) \quad r \cdot \mathfrak{S} = 1.$$

Nach einer Hypothese von *A. Bravais* und *E. Mallard* treten die

32) *J. F. Chr. Hessel*, *Krystallogometrie* 1831, p. 210; *H. Grassmann*, *Ableitung der Krystalgestalten aus dem allg. Gesetz der Krystalbildung*, *Progr. Otto-schule in Stettin* 1839; *Ges. math. u. phys. Werke* 2² (1902), p. 115; *Fr. A. Quenstedt*, *Beitr. z. rechn. Kryst.* 1848; *Grundr. d. best. u. rechn. Kryst.* 1873; *E. Weiss*, *Über die kryst. Entwicklung des Quarzsystems u. über kryst. Entw. im allgemeinen*, *Abh. naturf. Ges. Halle* 5 (1860); *G. Junghann*, *Ann. Phys. Chem.* 152 (1874), p. 68; *V. Goldschmidt*, *Zeitschr. f. Kryst.* 28 (1897), p. 1, 414; 29 (1898), p. 38; *E. v. Fedorow*, *Zeitschr. f. Kryst.* 35 (1902), p. 25; *H. Baumhauer*, *Zeitschr. f. Kryst.* 38 (1904), p. 628; *E. Sommerfeldt*, *Zentralblatt f. Min.* 1903, p. 537; 1905, p. 427.

33) *A. Bravais*, *J. éc. polyt.* 19 (1850), cah. 33; 20 (1851) cah. 34; wieder abgedruckt in: *Études cristallogr.* 1866; *E. Mallard*, *Traité de crist.* 1 (1879), p. 12, 298.

Netzebenen in dem Masse seltener als Krystallflächen auf, als sie weniger dicht besetzt sind. Diese Annahme dient dazu, das Raumgitter zu bestimmen, nach dem wahrscheinlich die Molekelschwerpunkte angeordnet sind³⁴). (Näheres hierüber in Teil C, Art. Mügge.)

14. Einfallswinkel einer Kante in Bezug auf eine Fläche.

Aus (2) ist der Zusammenhang der Indices $h_1 h_2 h_3$ einer Fläche h mit den Indices $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ ihrer Normale μ zu entnehmen. Wir verstehen jetzt unter den Geraden 1 bis 5 die Axen $\pi_1 \pi_2 \pi_3$, die Normale μ und die Normale ν_i einer Axenebene; dann folgt mit Rücksicht auf:

$$\cos \nu_k \pi_k \sin (\nu_k) = \sqrt{\Delta}$$

aus (2) die Relation:

$$(25) \quad \sqrt{\Delta} \sin (\nu_k) \cos \mu \nu_k = \Delta_{k1} \cos \mu \pi_1 + \Delta_{k2} \cos \mu \pi_2 + \Delta_{k3} \cos \mu \pi_3$$

oder wenn nach (13) und (14) die Indices der Fläche h und ihrer Normale μ eingeführt werden:

$$(26) \quad \text{P} \cdot a_k \mu_k = \Delta_{k1} \frac{h_1}{a_1} + \Delta_{k2} \frac{h_2}{a_2} + \Delta_{k3} \frac{h_3}{a_3}$$

$$\text{P} = \sqrt{\frac{\Delta \cdot \varphi(h)}{f(\mu)}}.$$

Wir können nun den Cosinus des Einfallswinkels $\eta \mu$ einer Kante η in Bezug auf die Fläche h durch die Axenelemente und die Indices von h und η ausdrücken. Denn die Formel (7):

$$\Delta \cos \eta \mu = \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} \sin (\nu_i) \cos (\eta \nu_i) \sin (\nu_k) \cos (\mu \nu_k)$$

geht nach (14) und (25) über in:

$$\sqrt{\Delta \cdot f(\eta) \varphi(h)} \cdot \cos \eta \mu = \sum_{\lambda, i=1}^3 a_i \eta_i \frac{h_i}{a_i} \sum_{k=1}^3 c_{ik} \Delta_{k\lambda}.$$

Die letzte Summe ist gleich 0 für $i \geq \lambda$ und gleich Δ für $i = \lambda$; demnach bleibt:

$$(27) \quad \cos \eta \mu = \sqrt{\frac{\Delta}{f(\eta) \varphi(h)}} (\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \eta_3 h_3).$$

Diese Beziehung gestattet, bei einer Transformation der Indices die neuen Axeneinheiten b_1, b_2, b_3 zu berechnen. Bezeichnet man die Schnittgeraden der auf S. 410 eingeführten Axenebenen f^1, f^2, f^3 mit ψ_1, ψ_2, ψ_3 und die Normale der Einheitsfläche k mit π , so verhalten sich die Axeneinheiten:

$$b_1 : b_2 : b_3 = \frac{1}{\cos \pi \psi_1} : \frac{1}{\cos \pi \psi_2} : \frac{1}{\cos \pi \psi_3}.$$

34) L. Sohncke, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1887), p. 209, 214.

Nun ist nach (27):

$$\cos \alpha \psi_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{f(\psi_1) \cdot \varphi(\alpha)}} \cdot |\alpha f^2 f^3|$$

u. s. w., demnach⁸⁵⁾:

$$(28) \quad b_1 : b_2 : b_3 = \frac{\sqrt{f(\psi_1)}}{|\alpha f^2 f^3|} : \frac{\sqrt{f(\psi_2)}}{|f^1 \alpha f^2|} : \frac{\sqrt{f(\psi_3)}}{|f^1 f^2 \alpha|}.$$

15. Aufeinander senkrechte Flächen und Kanten. Besitzt ein Krystall zwei aufeinander senkrechte Flächenrichtungen h, h' , so besteht nach (5) die Gleichung:

$$(29) \quad \sum_{i,k=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h'_k = 0,$$

d. h. die sechs Grössen:

$$z_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k}$$

sind verbunden durch eine lineare homogene Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten r_{ik} :

$$(30) \quad \sum_{i,k=1}^3 z_{ik} r_{ik} = 0$$

$$2r_{ik} = h_i h'_k + h_k h'_i.$$

Umgekehrt ist das Bestehen einer solchen Relation zwar eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von zwei aufeinander senkrechten Flächenrichtungen, denn die Zahlen r_{ik} sind der *Bedingung* unterworfen, dass die aus ihnen gebildete Determinante verschwindet und die den Koeffizienten r_{11}, r_{22}, r_{33} adjungierten Unterdeterminanten vollständige Quadrate sind. Ein analoger Satz gilt für zwei aufeinander senkrechte Kanten⁸⁶⁾.

16. Krystallberechnung. Um die zur Beschreibung eines Krystallpolyeders notwendigen und ausreichenden Grössen zu gewinnen, muss ein der Symmetrie des Krystalls entsprechendes Axensystem gewählt werden. Dann reduziert sich die Beschreibung auf die Angabe der Symmetrieeigenschaften, der Axenelemente und der Indices je einer Fläche der vorhandenen einfachen Krystallformen. Im Folgenden sind zur Erläuterung der Berechnung nur trikline Krystalle berück-

35) A. T. Kupffer, Handb. d. rechn. Krystallonomie 1831, p. 494.; H. de Senarmont in: Traité de crist. par W. H. Miller, 1842, Note p. 198.

36) H. St. Smith, Proc. Math. Soc. London 8 (1877), p. 83. Hier sind auch die Fälle, in denen die Grössen z_{ik} durch zwei, drei, vier oder fünf homogene Gleichungen des ersten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten verknüpft sind, ausführlich behandelt.

sichtigt, in denen zu Axen irgend drei in einer Ecke zusammenstossende Kantenrichtungen gewählt werden können³⁷⁾.

Da es sich bei der geometrischen Untersuchung der Krystallpolyeder um Beziehungen zwischen Axenelementen, Indices und Winkeln handelt, so ordnen sich die Aufgaben der Krystallberechnung in drei Gruppen.³⁸⁾

17. Berechnung der Axenelemente. Zur Berechnung der fünf *Axenelemente* eines triklinen Krystalls: der drei Winkel zwischen den Axen und der beiden Verhältnisse der Axeneinheiten, sind mindestens fünf von einander unabhängige Winkel zu messen. Hierzu können benutzt werden:

A. vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, oder

B. fünf Flächen, von denen die eine zugleich eine der Diagonalfächen des vollständigen Vierflachs ist, das von den anderen bestimmt wird.

Die *einfachsten* Fälle (A) und (B) liegen vor, wenn drei dieser Flächen, die eine Ecke bilden, zu Axenebenen p_1, p_2, p_3 gewählt werden³⁸⁾. Dann ergeben sich die Winkel zwischen den Axen π_1, π_2, π_3 aus dem sphärischen Dreieck der Pole ν_1, ν_2, ν_3 der Axenebenen (Fig. 12).

(A) Werden nun die Verhältnisse der Axeneinheiten $a_1 : a_2 : a_3$ dadurch definiert, dass einer Fläche h , welche die Axen in endlichen Entfernungen schneidet, die Indices h_1, h_2, h_3 erteilt werden, so dienen zur Berechnung jener Verhältnisse nach (2) S. 414:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\sin \mu \nu_3 \nu_1}{\sin \mu \nu_3 \nu_2}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \mu \nu_1 \nu_2}{\sin \mu \nu_1 \nu_3}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\sin \mu \nu_2 \nu_3}{\sin \mu \nu_2 \nu_1}.$$

Sind z. B. die Winkel $\mu \nu_2$ und $\mu \nu_3$ gemessen, so findet man aus dem Dreieck $\mu \nu_2 \nu_3$, dessen Seiten gegeben sind, die Winkel $\mu \nu_2 \nu_3$ und $\mu \nu_3 \nu_2$. Daher sind auch die Winkel $\mu \nu_2 \nu_1$ und $\mu \nu_3 \nu_1$ bekannt.

(B) Werden die Axeneinheiten definiert mit Hülfe von zwei Flächen, von denen jede in die Zone einer Axe fällt, so benutzt man zu ihrer Berechnung die Relationen (1) auf S. 414. Es ist z. B. für eine Fläche t_1 aus der Zone der Axe π_1 mit den Indices $0 h_2 h_3$ und dem Pol τ_1 (Fig. 12):

$$\frac{h_2 a_3}{h_3 a_2} = \frac{\cos \tau_1 \pi_2}{\cos \tau_2 \pi_3} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_3 \nu_1}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_2 \nu_1} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin (\nu_3)}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin (\nu_2)}$$

oder

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \pi_3 \tau_1}{\sin \pi_1 \pi_2} \cdot \frac{\sin \nu_2 \tau_1}{\sin [\nu_2 \nu_3 - \nu_2 \tau_1]}.$$

37) Über die Vereinfachungen, die in der Berechnung höher symmetrischer Krystalle eintreten, geben die Lehrbücher der Krystallographie Auskunft.

38) W. H. Miller, Treatise 1839, chapt. VII.

Diese Beziehung und die analogen Gleichungen ergeben sich auch aus dem allgemeinen Ausdruck (11) S. 419 für die Tangente eines Flächenwinkels; zugleich ist ersichtlich, dass durch Auflösung von (11) *einwertige* Verhältnisse der Axeneinheiten nur in dem hier vorliegenden besonderen Falle zu erhalten sind.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem geht die letzte Formel über in:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \tan \tau_1 \nu_2.$$

A. Die Axenelemente eines triklinen Krystals können allgemein dadurch definiert werden, dass vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, beliebige ganze Zahlen als Indices erhalten; dabei ist zu beachten, dass die Determinante der Indices von drei Flächen in ihrem Vorzeichen mit dem Drehungssinn der von den Flächennormalen gebildeten Ecke übereinstimmen muss³⁹⁾. Hierdurch sind, da es nur auf die Verhältnisse der Indices ankommt, acht Grössen willkürlich gewählt. In der That erfordern die Richtungen der drei Axen und die Verhältnisse der Axeneinheiten zu ihrer Bestimmung je zwei Grössen.

Sind von den sechs Winkeln zwischen vier derartigen Flächen fünf gegeben, so liefert die Relation (3) S. 418 zur Bestimmung des sechsten Winkels eine quadratische Gleichung; die Entscheidung über die beiden möglichen Fälle ist erst mit Hilfe des sechsten Winkels herbeizuführen.

Zur Berechnung der Axenelemente aus den sechs Winkeln dient nun der Ausdruck (5) S. 418 für den Cosinus eines Flächenwinkels, der mit Benutzung der Bezeichnung z_{ik} (S. 423) lautet:

$$\cos hh = \frac{\sum_{i,k=1}^3 z_{ik} h_i h'_k}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^3 z_{ik} h_i h_k \cdot \sum_{i,k=1}^3 z_{ik} h'_i h'_k}}.$$

Man findet also zunächst die sechs Grössen z_{ik} , auf deren Verhältnisse es allein ankommt, und darauf aus ihnen die Axenelemente⁴⁰⁾.

Diese Berechnung ist von *B. Hecht* allgemein in der Weise durch-

³⁹⁾ *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 5 (1887), p. 587, 589, 590.

⁴⁰⁾ Eine ausführliche Darstellung spezieller Fälle gab *H. Dufet*, Bull. soc. franç. de min. 26 (1903), p. 190.

geführt worden, dass die Winkel und die Indices der Ausgangsflächen in den Endformeln symmetrisch auftreten⁴¹⁾.

M. Websky hat gezeigt, wie der Fall A mit Hülfe der Gesetze der Zonen und der rationalen Doppelverhältnisse trigonometrisch auf (B) zurückgeführt werden kann⁴²⁾.

B. Das soeben erwähnte Verfahren von *M. Websky* gestattet auch in diesem Falle, auf trigonometrischem Wege die Bedingungen von (B) zu erfüllen.

18. Berechnung der Indices. Zur Berechnung der *Indices* einer Krystallfläche ist die Kenntnis der Axenelemente nicht erforderlich in den folgenden Fällen:

Liegt eine Fläche h in zwei bekannten Zonen η, η' , so ergeben sich ihre Indices nach (5) S. 408 aus:

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\eta\eta')_1 : (\eta\eta')_2 : (\eta\eta')_3.$$

Fällt eine Fläche h''' in die Zone von drei bekannten Flächen, an die sie durch einen gemessenen Winkel angeschlossen ist, so ist das Doppelverhältnis der vier Flächen bekannt. Daher gelten die Beziehungen unter I, S. 415:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \mathfrak{G}h_1' - h_1'' : \mathfrak{G}h_2' - h_2'' : \mathfrak{G}h_3' - h_3'',$$

$$\mathfrak{G} = (h'h''h'''h) \cdot \frac{(h''h''')_\alpha}{(h'h''')_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Auf die Benutzung dieser Beziehungen lässt sich auch die Lösung der Aufgabe zurückführen, die Indices einer Fläche h zu bestimmen, die mit den bekannten Flächen h', h'', h''' in einer Zone liegt und mit einer dieser Zone nicht angehörenden Fläche k einen gegebenen Winkel einschliesst⁴³⁾. Denn man findet z. B. den Winkel hh' mit Hülfe der Relation:

$$\cos kh \sin h'h'' + \cos kh' \sin h''h + \cos kh'' \sin hh' = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{L} \sin hh' + \mathfrak{M} \cos hh' = \mathfrak{N},$$

worin:

$$\mathfrak{L} = \cos kh'' - \cos kh' \cos h'h',$$

$$\mathfrak{M} = \cos kh' \sin h'h',$$

$$\mathfrak{N} = \cos kh \sin h''h'$$

41) *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 7 (1891), p. 488; Anleitung zur Krystallberechnung 1893, p. 15—17.

42) *M. Websky*, Monatsber. Berlin. Akad. 1879, p. 339; *Th. Liebisch*, Geom. Kryst. 1881, p. 161.

43) *Th. Liebisch*, Geometr. Kryst. 1881, p. 176.

gesetzt ist, indem man die Zahl m und den Hilfswinkel ψ einführt durch:

$$\mathfrak{L} = m \cos \psi, \quad \mathfrak{M} = m \sin \psi,$$

so dass:

$$\sin(hh' + \psi) = \frac{\mathfrak{L} \sin \psi}{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{L} \cos \psi}{\mathfrak{L}}.$$

Hieraus ergeben sich zwei Werte für den gesuchten Winkel hh' ; der Anblick des Krystalls entscheidet, welcher von ihnen in Betracht kommt. —

Die Kenntnis der Axenelemente wird bei der Berechnung von Indices vorausgesetzt in folgenden Fällen.

Gehört eine Fläche h'' einer Zone an, in der nur zwei Flächen h, h' bekannt sind, und ist ihre Neigung gegen h oder h' gemessen, so kann man zunächst das Teilungsverhältnis jener Fläche (S. 420) und darauf ihre Indices ermitteln:

$$\tau = - \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(\bar{h})}{\varphi(h')}},$$

$$h_1'' : h_2'' : h_3'' = h_1 + \tau h_1' : h_2 + \tau h_2' : h_3 + \tau h_3'.$$

Um die Indices einer Fläche h zu berechnen, wenn zwei der Winkel bekannt sind, die sie mit den Axenebenen einschliesst (Fig. 12), beachte man die Beziehung S. 424:

$$\frac{h_2 a_3}{h_3 a_2} = \frac{\sin \mu \nu_1 \nu_3}{\sin \mu \nu_1 \nu_2} = \frac{\sin[(\nu_1) + \mu \nu_1 \nu_2]}{\sin \mu \nu_1 \nu_2}$$

und die analogen Gleichungen. Wird auf beiden Seiten die Einheit addiert und subtrahiert, so erhält man durch Division:

$$\tan\left[\mu \nu_1 \nu_2 + \frac{(\nu_1)}{2}\right] = \tan \frac{(\nu_1)}{2} \tan(135^\circ - \vartheta_1),$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{h_2 a_3}{h_3 a_2}.$$

Sind z. B. $\mu \nu_2$ und $\mu \nu_3$ gegeben, so findet man im Dreieck $\mu \nu_2 \nu_3$ die Winkel $\mu \nu_2 \nu_3$, $\mu \nu_3 \nu_1$ und darauf die Werte von ϑ_2 , ϑ_3 , so dass für die gesuchten Indices gilt:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2} \tan \vartheta_3, \quad \frac{h_1}{h_3} = \frac{a_1}{a_3} \cotg \vartheta_2.$$

Bei dieser Berechnung ist auf den Sinn der mit ihren Scheiteln in ν_2 und ν_3 liegenden Winkel zu achten⁴⁴⁾.

19. Berechnung der Flächenwinkel und Kantenwinkel. Die Berechnung der *Flächenwinkel* und *Kantenwinkel* eines Krystalls, von dem die Axenelemente und die Indices der Flächen gegeben sind,

44) *Th. Liebisch*, Geom. Kryst. 1881, p. 181.

kann immer ausgeführt werden mit Hülfe der allgemeinen Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen jener Winkel (5), (9), (11), (12) auf S. 418—419.

Wie eine nach Zonen vorschreitende Winkelberechnung durchgeführt werden kann, hat *M. Websky* dargelegt⁴⁵⁾.

20. Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente. Zwischen den auf solche Weise berechneten Werten der Flächenwinkel und den durch Messung erhaltenen Werten bestehen Differenzen, die aus Störungen des Krystallisationsvorganges und aus Beobachtungsfehlern entspringen. Die berechneten Werte sind Funktionen der Näherungswerte der Axenelemente, die aus den fünf Fundamentalwinkeln nach Nr. 17 abgeleitet wurden. Es sollen nun mit Hülfe aller Winkelmessungen *die wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente* berechnet werden, d. h. die Werte, für welche die Summe der mit den zugehörigen Gewichten p multiplizierten Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Flächenwinkeln ein Minimum ist. Diese Rechnung ist zuerst von *F. E. Neumann*⁴⁶⁾ durchgeführt worden. Ihre praktische Ausführung wurde vereinfacht von *B. Hecht*⁴⁷⁾, indem er an Stelle der Axenelemente die sechs Grössen (S. 423):

$$z_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} = z_{ki} = \frac{\Delta_{ki}}{a_i a_k}$$

einführte, deren Verhältnisse allein in Betracht kommen.

Es seien z_{ik}^0 die aus fünf Fundamentalwinkeln abgeleiteten Näherungswerte von z_{ik} , ω^0 der mit ihrer Hülfe berechnete Wert des Winkels der Flächen h, h' , dessen gemessener Wert mit ω' bezeichnet sei; p bedeute das Gewicht der Beobachtung. Ferner seien dz_{ik} die zu berechnenden Korrekturen von z_{ik}^0 und ω der mit den korrigierten Werten $z_{ik}^0 + dz_{ik}$ berechnete Winkel. Bezeichnet man nun:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ik}} \right)^0 = Q_{ik},$$

so ist:

$$\omega = \omega^0 + Q_{11} dz_{11} + Q_{22} dz_{22} + Q_{33} dz_{33} + Q_{23} dz_{23} + Q_{31} dz_{31} + Q_{12} dz_{12}.$$

Die Grössen Q_{ik} findet man durch Differentiation von (5) S. 418:

$$\cos \omega = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h)\varphi(h')}},$$

worin:

45) *M. Websky*, Berlin Ber. 1879, p. 339.

46) *F. E. Neumann*, Berlin Abhdl. 1830, p. 189 (Krystallsystem des Albites).

47) *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 5 (1887), p. 601, 614, 622, 627, 633, 637.

$$\varphi(h, h') = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h_i h'_k, \quad \varphi(h) = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h_i h_k, \quad \varphi(h') = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h'_i h'_k.$$

Es ergibt sich:

$$-\frac{\sin \omega d\omega}{\cos \omega} = \frac{d\varphi(h, h')}{\varphi(h, h')} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(h)}{\varphi(h)} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(h')}{\varphi(h')},$$

oder:

$$d\omega = \frac{\cotg \omega}{2} \left[\frac{d\varphi(h)}{\varphi(h)} + \frac{d\varphi(h')}{\varphi(h')} - 2 \frac{d\varphi(h, h')}{\varphi(h, h')} \right].$$

Setzt man hierin:

$$d\varphi(h) = \sum_{ik=1}^3 h_i h_k dz_{ik}, \quad d\varphi(h') = \sum_{ik=1}^3 h'_i h'_k dz_{ik}, \quad d\varphi(h, h') = \sum_{ik=1}^3 h_i h'_k dz_{ik},$$

so erhält man für die Koeffizienten von dz_{ik} :

$$Q_{ii} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ii}} \right)^0 = \frac{\cotg \omega^0}{2} \left[\frac{h_i^2}{\varphi^0(h)} + \frac{h'_i{}^2}{\varphi^0(h')} - 2 \frac{h_i h'_i}{\varphi^0(h, h')} \right],$$

$$Q_{ik} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ik}} \right)^0 = \frac{\cotg \omega^0}{2} \left[\frac{h_i h_k}{\varphi^0(h)} + \frac{h'_i h'_k}{\varphi^0(h')} - \frac{h_i h'_k + h_k h'_i}{\varphi^0(h, h')} \right].$$

Es sind nun die Größen dz_{ik} so zu bestimmen, dass:

$$\sum p(\omega' - \omega)^2,$$

oder:

$$\sum p(\omega' - \omega^0 - Q_{11} dz_{11} - Q_{22} dz_{22} - Q_{33} dz_{33} - Q_{23} dz_{23} - Q_{31} dz_{31} - Q_{12} dz_{12})^2$$

ein Minimum wird. Dabei kann eine der Grössen dz_{ik} gleich Null gesetzt werden. Ein bequemes Schema für die Rechnung hat *Hecht* a. a. O. mitgeteilt⁴⁸⁾.

21. Anwendung mehrkreisiger Reflexionsgoniometer. Abweichend gestaltet sich die Krystallberechnung, wenn die Flächenwinkel nicht mit *einkreisigen Reflexionsgoniometern*⁴⁹⁾, sondern mit *zweikreisigen Theodolithgoniometern*⁵⁰⁾ gemessen werden. Diese In-

48) Über Ausgleichungsmethoden in der Krystallberechnung vgl. *H. Dauber*, Sitzungsber. Wien Akad. 39 (1860), p. 685; *A. Schrauf*, Lehrb. d. physik. Min. 1 (1866), p. 223; *V. von Lang*, Lehrb. d. Kryst. 1866, p. 351; *J. Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 5 (1881), p. 463; 22 (1893), p. 376; *A. Brezina*, Methodik der Krystallbestimmung 1884, p. 223; *A. Sella*, Riv. min. crist. 10 (1892), p. 33; *C. Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 333; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1903), p. 1.

49) Vgl. namentlich *M. Websky*, Zeitschr. f. Kryst. 4 (1880), p. 545.

50) *S. Czapski*, Zeitschr. f. Instr. 13 (1893), p. 1, 242; *V. Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 210; 24 (1895), p. 610; 29 (1898), p. 333; *E. v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 574; 32 (1900), p. 464; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 37 (1903), p. 50. — Das erste zweikreisige Goniometer wurde von *W. H. Miller* konstruiert Proc. Cambr. Phil. Soc. 4 (1882), p. 236.

strumente gestatten die wiederholten Justierungen eines Krystals, die bei jenen Apparaten für jede einzelne Zone erforderlich sind, zu vermeiden; sie bestimmen die Lage jeder Fläche durch zwei Winkel, die der geographischen Länge und Breite entsprechen (Polarkoordinaten Fig. 2). Die Vorzüge beider Messungsverfahren vereinigen die dreikreisigen Reflexionsgoniometer⁵¹⁾. Über den Gang der Berechnung, der durch geeignete Justierung der Krystalle bedeutend vereinfacht werden kann, handelt die unten angegebene Litteratur²⁾.

22. Rechtwinklige Hilfsaxensysteme. Zur Berechnung eines triklinen Krystals kann an Stelle des schiefwinkligen Systems krystallographischer Axen π_1, π_2, π_3 ein Hilfsaxensystem $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*$ von rechtwinkligen gleich langen Axen mit demselben Anfangspunkt eingeführt werden, dessen Vorteil darin besteht, dass wie bei den Krystallen des regulären Systems die Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen eines Winkels zwischen Flächen oder Kanten die einfachste Gestalt annehmen und die Indices einer Ebene und ihrer Normale einander gleich sind. Das Hilfsaxensystem ist so zu wählen, dass z. B. π_3 mit π_3^* und die Ebene $\pi_3\pi_1$ mit $\pi_3\pi_1^*$ zusammenfällt⁵³⁾. Die auf das Hilfsaxensystem bezogenen Werte der Indices von Flächen oder Kanten erhält man unter Berücksichtigung der Definition der Koordinaten in Nr. 9 mit Hilfe der Transformationsformeln, die den Übergang von einem schiefwinkligen Koordinatensystem in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit demselben Anfangspunkte vermitteln.

23. Perspektivische Krystallzeichnungen. Nach dem Gesetz der Zonen ist das Auftreten von Scharen paralleler Kanten charakteristisch für die Krystallpolyeder. Daher sind die perspektivischen Krystallzeichnungen stets Parallelprojektionen. Im Folgenden sollen orthogonale Projektionen benutzt werden. Zu ihrer Herstellung bieten sich zwei Verfahren dar.

I. Sind die Axenelemente und die Indices der Flächen eines Krystallpolyeders gegeben, so projiziert man zunächst das Axensystem auf die Bildebene \mathfrak{B} und findet dann die Projektionen der Kanten-

51) G. J. H. Smith, Min. Mag. 12 (1899), p. 175; 14 (1904), p. 1.

52) E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 32 (1900), p. 131, 446; G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 29; A. J. Moses u. A. F. Rogers, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1903), p. 209, 506; K. Stöckl, Zeitschr. f. Kryst. 39 (1904), p. 23; L. Borgström u. V. Goldschmidt, Zeitschr. f. Kryst. 41 (1906), p. 63.

53) C. Neumann, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 492; E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 632, 709; G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 505.

richtungen mit Hilfe einer, in einer Axenebene entworfenen, perspektivischen Linienprojektion des dem Polyeder entsprechenden Flächenbündels.

Die *indirekten* Projektionen der Axensysteme setzen voraus, dass eine Projektion von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen OA, OB, OC hergestellt sei. Wir nehmen an, dass in der Anfangslage die Ebene BOC in die Bildebene \mathfrak{B} falle und OC vertikal stehe. Darauf werde das System gedreht um OC um den Winkel ϱ im Sinne der Uhrzeigerbewegung und nach vorn geneigt, um die in \mathfrak{B} liegende Normale OE von OC um den Winkel σ . In dieser Stellung sind OF, OG, OH die senkrechten Projektionen der Axen auf \mathfrak{B} (Fig. 15). Bezeichnet man die Verkürzungsmassstäbe auf den Axen mit a, b, c und die Winkel $G OH = \varphi, HOF = \psi$, so bestehen folgende Beziehungen:

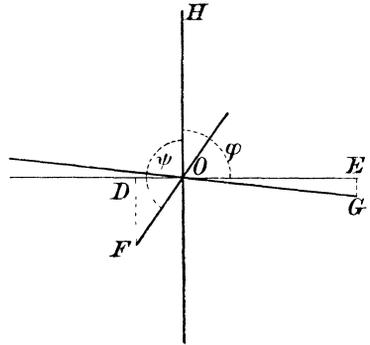


Fig. 15. Projektion von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen.

$$a : b : c = OF : OG : OH$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 \varrho \cos^2 \sigma} : \sqrt{1 - \sin^2 \varrho \cos^2 \sigma} : \cos \sigma.$$

$$\sin^2 \varrho = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \quad \sin^2 \sigma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \tan \varrho \sin \sigma = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\tan(\psi - 90^\circ) = \cot \varrho \sin \sigma = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Soll nach der Drehung um ϱ die Projektion der vorderen Axe OA gleich $1/r$ der Projektion OE der seitlichen Axe OB und nach der Neigung um σ die Abweichung DF von A unter die horizontale Gerade gleich $1/s$ von OE sein, so finden die Beziehungen statt⁵⁴⁾:

$$r = \frac{OE}{OD} = \cot \varrho, \quad s = \frac{OE}{OF} = \frac{1}{\sin \sigma}$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = r^2 + s^2 : r^2 s^2 + 1 : (r^2 + 1)(s^2 - 1)$$

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{1}{rs}, \quad \tan(\psi - 90^\circ) = \frac{r}{s}.$$

54) V. v. Lang, Lehrb. d. Krystallogr. 1866, § 71.

Die vielbenutzte *Mohs'sche* orthogonale Parallelprojektion⁵⁵⁾ fordert, dass in der Projektion des Hexaeders die rechte Seitenfläche $\frac{1}{3}$ so breit als die linke und die obere Endfläche, $\frac{1}{6}$ so hoch als die linke Seitenfläche breit oder, was dasselbe bedeutet, $\frac{1}{8}$ so hoch als das ganze Hexaeder breit erscheinen soll. In diesem Falle ist $r = 3$, $\mathfrak{s} = 8$ und:

$$\begin{aligned}\tan \varrho &= \frac{1}{3}, & \sin \sigma &= \frac{1}{8}; \\ \varrho &= 18^\circ 26' 6'', & \sigma &= 7^\circ 10' 51''; \\ a : b : c &= 8,54 : 24,02 : 25,10. \\ \varphi - 90^\circ &= 2^\circ 23' 9'', & \psi - 90^\circ &= 20^\circ 33' 22''.\end{aligned}$$

Angenähert ist:

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{1}{25}, \quad \tan(\psi - 90^\circ) = \frac{9}{25}.$$

Die Projektion steht sehr nahe der anisometrischen Projektion:

$$a : b : c = 8 : 23 : 24$$

und der monodimetrischen Projektion:

$$a : b : c = 1 : 3 : 3.$$

*Fr. Naumann*⁵⁶⁾ wählte $r = 3$, $\mathfrak{s} = 9$, so dass:

$$\begin{aligned}\varrho &= 18^\circ 26' 6'', & \sigma &= 6^\circ 22' 46''; \\ a : b : c &= 7 : 19 : 20; \\ \varphi - 90^\circ &= 2^\circ 7' 16'', & \psi - 90^\circ &= 18^\circ 26' 6''.\end{aligned}$$

Die Projektion ungleich langer schiefwinkliger Axen π_1 , π_2 , π_3 mit den Axenelementen:

$$\begin{aligned}OA : OB : OC &= a : b : c, \\ \pi_2 \pi_3 &= \alpha, \quad \pi_3 \pi_1 = \beta, \quad \pi_1 \pi_2 = \gamma\end{aligned}$$

ist nun in folgender Weise auszuführen:

Die Richtungen von OF , OG , OH in Fig. 15 seien bezeichnet mit X^* , Y^* , Z^* . π_3 falle mit Z^* zusammen und π_2 liege in der Ebene Y^*Z^* (Fig. 16). Bezeichnen wir noch den nach vorn rechts sich öffnenden Winkel der Ebenen $\pi_1 \pi_3$ und $\pi_2 \pi_3$ mit C :

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}},$$

so erhalten wir aus den rechtwinkligen Koordinaten der Punkte A , B , C :

55) *W. Haidinger*, Mem. of the Wernerian Nat. Hist. Soc. 1821—23. Frei übersetzt in Ann. Phys. Chem. 5 (1825), p. 507.

56) *Fr. Naumann*, Lehrb. d. rein. u. angew. Krystallogr. 2 (1830), p. 403.

$$\begin{aligned}
 OA_1 &= a \sin \beta \sin C, & A_1 A_3 &= -a \sin \beta \cos C, & AA_3 &= a \cdot \cos \beta, \\
 OB_1 &= b \sin \alpha, & & & BB_1 &= b \cdot \cos \alpha, \\
 & & & & OC &= c,
 \end{aligned}$$

durch Multiplikation mit den entsprechenden Verkürzungsmaßstäben a, b, c die zur Konstruktion der Endpunkte A^*, B^*, C^* der Axen in der Bildebene erforderlichen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 OA_1^* &= OA_1 \cdot a, & A_1^* A_3^* &= A_1 A_3 \cdot b, & A^* A_3^* &= AA_3 \cdot c, \\
 OB_1^* &= OB_1 \cdot b, & BB_1^* &= BB_1 \cdot c, \\
 OC^* &= c \cdot c.
 \end{aligned}$$

Zuweilen ist es zur Gewinnung möglichst anschaulicher perspektivischer Zeichnungen zweckmässig, das Axensystem um andere Winkel

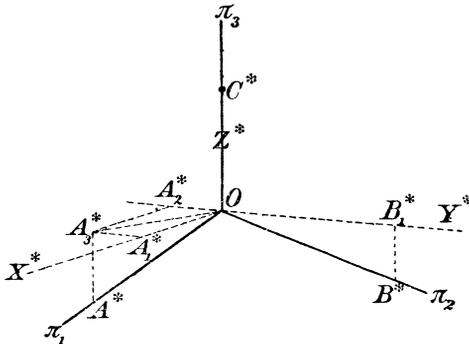


Fig. 16. Projektion ungleicher langer schiefwinkliger Axen.

gegen die Bildebene \mathfrak{B} zu drehen und ohne Vermittlung von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen *direkt* auf \mathfrak{B} zu projizieren. Eine Anleitung hierzu hat *St. Jolles* gegeben⁵⁷⁾. —

Es handelt sich nun um die *Konstruktion der Kantenrichtungen*⁵⁸⁾. Zu diesem Zwecke entwirft man in einer der Axenebenen eine perspektivische Linienprojektion des Flächenbündels, dessen Zentrum in den Endpunkt der gegenüberliegenden Axe gelegt wird. Die Verbindungsgeraden der Zonenpunkte der Linienprojektion mit dem Zentrum liefern die Gesamtheit der gesuchten Richtungen. Die Zeichnung des Kantennetzes eines Polyeders kann man an einem Eckpunkte beginnen, indem man der Reihe nach die Kanten parallel zu den entsprechenden Richtungen des Bündels aneinander fügt.

57) *St. Jolles*, Zeitschrift f. Kryst. 22 (1893), p. 1.

58) *F. H. Schröder*, Elem. d. rechn. Krystallographie 1852, p. 100.
Encyclop. d. math. Wissensch. V 1.

II. Perspektivische Krystallzeichnungen können auch aus den drei in Nr. 5 beschriebenen Projektionen abgeleitet werden. Wir setzen wieder voraus, dass die Projektionsebenen \mathfrak{E} , \mathfrak{E}' , \mathfrak{E}'' zusammenfallen. Die Bildebene \mathfrak{B} der perspektivischen Zeichnung gehe durch das Zentrum C des Bündels der Flächen, Kanten und Flächennormalen. Dann ist ihre Lage gegeben in \mathfrak{E} durch ihre Schnittgerade β , in \mathfrak{E}' durch die stereographische Projektion des Hauptkreises, in dem sie die Kugel der Polfigur schneidet. Die Zeichnung soll ausgeführt werden in den Projektionsebenen, in die wir die Bildebene durch Drehung um β umlegen. Dabei gelangt das Zentrum C nach dem Punkt \mathfrak{B}' , den wir

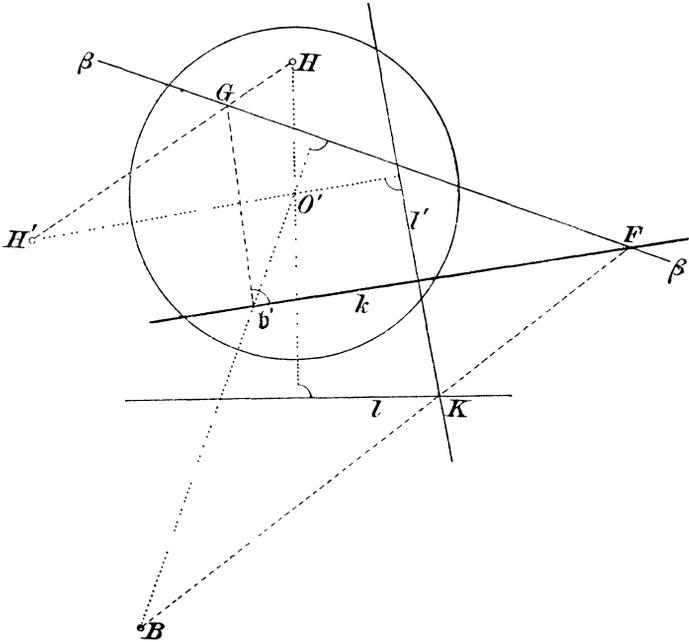


Fig. 17. Projektion der Kantenrichtungen mit Hilfe einer Linienprojektion der Flächen oder einer Punktprojektion der Flächennormalen.

erhalten, indem wir die stereographische Projektion \mathfrak{b} des Poles \mathfrak{b} von \mathfrak{B} auf die Ebene \mathfrak{E} senkrecht projizieren (vgl. Fig. 9).

a) Es sei gegeben in \mathfrak{E} die *Linienprojektion der Flächen* eines Krystallpolyeders. Wir suchen in \mathfrak{B} die Projektion k der Kantenrichtung α , in der sich die Flächen h , h' schneiden. Die Schnittgeraden dieser Flächen in \mathfrak{E} seien bezeichnet mit l , l' ; ihr Schnittpunkt K ist die Spur von α (Fig. 17). Die Gerade α des Bündels wird auf \mathfrak{B} senkrecht projiziert durch ihre Verbindungsebene mit der

Normale CB von \mathfrak{B} ; daher geht die Spur dieser Ebene in \mathfrak{E} durch B und K . Es sei F der Schnittpunkt von BK mit β . Wird nun die Bildebene in die Projektionsebene umgelegt, so bleibt F fest und C gelangt nach b' . Folglich giebt die Verbindungsgerade $b'F$ die Richtung der gesuchten Projektion⁵⁹⁾.

b) Gegeben sei in \mathfrak{E}' die *Punktprojektion der Flächennormalen*. Die Schnittpunkte der Normalen der Flächen h, h' seien bezeichnet mit H, H' (Fig. 17). In dem Bündel steht die Kante α senkrecht auf der Verbindungsebene von CH und CH' . Diese Ebene schneide die Bildebene in CG und β in G . Wird nun die Bildebene umgelegt in die Projektionsebene \mathfrak{E}' , so bleibt G fest und C gelangt nach b' . Daher gibt die Senkrechte auf Gb' in b' die Richtung der gesuchten Projektion⁶⁰⁾.

c) Gegeben sei in \mathfrak{E}'' die *stereographische Projektion der Polfigur* und des Hauptkreises \mathfrak{B} , in dem die Bildebene die Kugel der Polfigur schneidet. Wir bezeichnen die Pole zweier Flächen, die sich

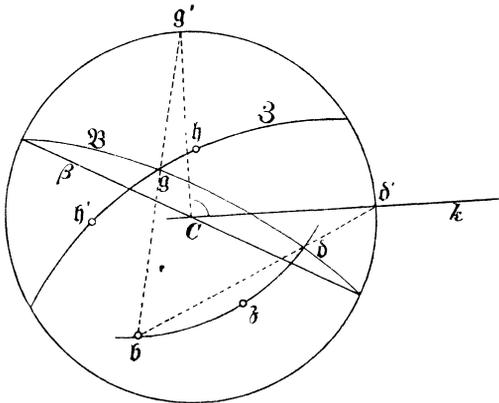


Fig. 18. Projektion der Kantenrichtungen mit Hilfe einer stereographischen Projektion der Polfigur.

in der Kante α schneiden, mit h, h' , den Zonenkreis hh' mit \mathfrak{B} , den Schnittpunkt von \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} mit g , die Pole von \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} mit b und z , so dass z der Schnittpunkt der Kante α mit der Kugeloberfläche ist. Dann wird \mathfrak{B} von dem Hauptkreise bz in d derart geschnitten, dass der Winkel $gd = 90^\circ$ ist. Die stereographischen Projektionen von

59) E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 30 (1899), p. 9.

60) H. Dauber, Sitz.-Ber. Wien. Akad., math.-naturw. Kl. 42 (1860), p. 78; V. Goldschmidt, Über Projektion etc. 1887, p. 80; Zeitschr. f. Kryst. 19 (1891), p. 352; G. F. H. Smith, Min. Mag. 13 (1903), p. 309.

h, h', g, z, d seien bezeichnet mit $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}', g, z, \mathfrak{d}$ (Fig. 18). Wird nun die Bildebene in die Projektionsebene durch Drehung um β umgelegt, so gelangen nach einem auf S. 404 angeführten Satze (vgl. Fig. 7) die Pole g, d in die Schnittpunkte g', d' der Geraden $\mathfrak{h}g, \mathfrak{h}d$ mit dem Grundkreise. Daher ist $g'd' = 90^\circ$. Folglich giebt die Senkrechte auf $g'C$ in C die Richtung der gesuchten Projektion⁶¹⁾.

24. Homogene Deformationen. Die in Nr. 11—15 angeführten Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices gelten nur unter der in Nr. 1 betonten Voraussetzung, dass die Temperatur und der äussere allseitig gleiche Druck konstant bleiben.

Erfährt ein homogener Krystall bei konstantem, allseitig gleichem Druck eine in seiner ganzen Ausdehnung gleichmässige *Änderung der Temperatur*, durch die eine Zerstörung des krystallisierten Zustandes nicht bewirkt wird, so findet eine homogene Deformation statt, bei der die Symmetrie, der Zonenverband und die Indices der Flächen erhalten bleiben. Sie ist vollständig bestimmt, wenn das Deformationsellipsoid bekannt ist, dessen Hauptaxen nach *F. E. Neumann*⁶²⁾ *thermische Axen* genannt werden.

In den Fällen, in denen die Richtungen der thermischen Axen eine durch die Symmetrie des Krystalls bedingte permanente Lage nicht besitzen, können sie nur für eine Deformation aus einem bestimmten Anfangszustand (Temperatur Θ) in einen bestimmten Endzustand (Temperatur Θ') definiert werden; in jedem anderen Zustande, also auch während der Deformation, stehen diese Richtungen nicht aufeinander senkrecht.

*C. Neumann*⁶³⁾ hat gezeigt, wie man die Richtungen der Hauptaxen und die Werte der Hauptdilatationen berechnen kann, wenn ausser der Volumendilatation eine geeignete Anzahl von Flächenwinkeln vor und nach der Deformation gemessen sind. Da bei der thermischen Ausdehnung fester Körper die Änderungen der Koordinaten eines Punktes und der Richtungs cosinus einer Geraden sehr klein sind, hat *C. Neumann* ihre zweiten Dimensionen vernachlässigt⁶⁴⁾. Für eine beliebig grosse homogene Deformation eines triklinen Krystalls ist die entsprechende Aufgabe von *B. Hecht*⁶⁵⁾ gelöst worden.

61) *F. Stöber*, Bull. soc. fr. min. 22 (1899), p. 42; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 16; *S. L. Penfield*, Amer. J. of Sc. 19 (1905), p. 68.

62) *F. E. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 27 (1833), p. 245.

63) *C. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 492; vgl. *J. Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 5 (1881), p. 436.

64) Vgl. *L. Fletcher*, Phil. Mag. (5) 16 (1883), p. 275.

65) *B. Hecht*, Zeitschr. f. Kryst. 11 (1886), p. 531; 14 (1888), p. 333.

Die Hauptaxen einer homogenen Deformation bilden einen besonderen Fall der *gleichwinkligen Geraden*, d. h. der doppelt unendlich vielen Tripel von Geraden, die vor und nach der Deformation dieselben Winkel miteinander einschliessen⁶⁶⁾.

Auch die durch einen *allseitig gleichen Druck* bei konstanter Temperatur erzeugte Kompression eines einheitlichen Krystalls ist im allgemeinen mit einer Änderung der Gestalt verbunden. Nur unter der Annahme, dass die Elastizitätsmoduln von der Grösse des Druckes unabhängig sind, bewahren die Hauptaxen des Deformationsellipsoids (von *F. E. Neumann*⁶⁷⁾ *Hauptdruckaxen* genannt) auch in triklinen Krystallen ihre Richtungen, wenn der Druck geändert wird.

Die durch eine gleichmässige Erwärmung hervorgerufene Deformation kann nur bei regulären Krystallen durch einen allseitig gleichen Druck kompensiert werden⁶⁸⁾.

B. Symmetrie und Struktur der Krystalle.

Von *A. Schönflies* in Königsberg.

25. Einleitende Erläuterungen, insbesondere zum kristallographischen Grundgesetz. Von den grundlegenden Eigenschaften der Krystalle sind wesentlich zwei für das Folgende von Wichtigkeit; die eine bezeichnen wir kurz als das *kristallographische Symmetriegesetz*, die andere ist das *Gesetz der rationalen Indices*, auch *kristallographisches Grundgesetz*⁶⁹⁾ genannt.

Im *Symmetriegesetz* kommt diejenige physikalische Eigenschaft der Krystallsubstanz zum Ausdruck, die sie von den amorphen Körpern unterscheidet. Während ein amorpher Körper sich längs verschiedener Richtungen im allgemeinen *physikalisch gleichartig* verhält,

66) *H. J. S. Smith*, Proc. Math. Soc. London. 2 (1869), p. 196; *L. Fletcher*, Phil. Mag. (5) 9 (1880), p. 81; 16 (1883), p. 275; *E. Blasius*, Ann. Phys. 22 (1883), p. 526; Zeitschr. f. Kryst. 11 (1885), p. 140; *L. Burmester*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23 (1878), p. 108; 47 (1902), p. 128.

67) *F. E. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 31 (1834), p. 177.

68) *Liebisch*, Physikal. Krystallogr. 1891, p. 576.

69) Die neueren Erörterungen über die Frage, worin das oberste Merkmal der Krystallsubstanz zu erblicken sei, haben zu den Problemen dieses Artikels keine nähere Beziehung und bleiben daher ausser Betracht. Vgl. darüber *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 99, 24 (1895), p. 245; *Goldschmidt*, 28 (1897), p. 1 u. 414; *Viola*, 34 (1901), p. 353; 35 (1902), p. 229; *G. Friedel*, Bull. soc. franc. de miner. 28 (1905), p. 95, sowie die Litteratur von Anm. 102.