1. Einfache konvexe Polyeder. Ist die Einwirkung äusserer Agentien, die eine Störung der natürlichen homogenen Beschaffenheit der Krystalle erzeugen können, ausgeschlossen, und bleiben die Temperatur und der äussere allseitig gleiche Druck konstant, so sind die *Richtungen* der Begrenzungsebenen eines Krystallpolyeders unveränderlich. Daher ist ein solches Polyeder durch seine *Flächenwinkel* vollständig bestimmt.

Erfahrungsgemäss bilden die Begrenzungsebenen (Krystallflächen) ein einfaches, im gewöhnlichen Sinne konvexes Polyeder. Jede Krystallfläche besitzt also in Bezug auf das Polyeder, zu dem sie gehört, eine äussere und eine innere Seite. Werden von einem Punkte im Innern des Polyeders Normalen auf die Flächen gefällt, so sollen die nach aussen zeigenden Richtungen als positiv angesehen werden. Unter einem Flächenwinkel soll der am Reflexionsgoniometer messbare Aussenwinkel verstanden werden. Er wird beschrieben, wenn eine der beiden Flächen aus ihrer ursprünglichen Lage um die Schnittgerade gedreht wird, bis sie, ohne dabei das Innere des Polyeders zu bestreichen, in die Verlängerung der anderen Fläche fällt. Einen gleichen Winkel beschreibt die Normale der Fläche.

Als positive Richtung einer Kante in Beziehung auf eine Fläche, in der sie nicht enthalten ist, soll die Richtung verstanden werden, die mit der positiven Richtung der Flächennormale einen Winkel $< \pi/2$ einschliesst. Dieser Winkel soll der Einfallswinkel der Kante in Beziehung auf die Fläche genannt werden.

2. Gesetz der Zonen. Eine auffallende Eigenschaft der Krystallpolyeder besteht darin, dass an ihnen Scharen von Kanten auftreten, die untereinander parallel laufen. *Chr. S. Weiss*, der zuerst die Bedeutung dieser Thatsache für die geometrische Krystallographie erkannt hat, nannte die Gesamtheit der Flächen, die sich in parallelen Kanten schneiden, eine *Zone* von Flächen.

Häufig werden Flächen beobachtet, die gleichzeitig in zwei oder mehr Zonen liegen. Zur Bestimmung ihrer Lage gegen die übrigen Flächen sind Winkelmessungen nicht erforderlich. Denn eine Ebene ist ihrer Richtung nach bestimmt, wenn sie gleichzeitig zwei Kanten von verschiedenen Richtungen parallel laufen soll.

Gehen wir nun dazu über, aus je zwei Zonen schon vorhandener Flächen eines Krystallpolyeders eine neue Flächenrichtung abzuleiten, die beiden Zonen angehört, so erhebt sich die Frage, ob stets die auf solche Weise mit beobachteten Flächen in Beziehung stehenden Ebenen mögliche Krystallflächen sind. Die Erfahrung hat gelehrt, dass dieses Ableitungsverfahren in der That berechtigt ist. Da zur geometrischen

Ableitung einer unbegrenzten Zahl von Flächen aus Zonen vier Flächen, die ein im allgemeinen unregelmässiges Tetraeder bilden, notwendig und ausreichend sind, so können wir die charakteristische geometrische Eigenschaft der Gesamtheit von Flächen, die als Begrenzungsebenen der polyedrischen Formen eines krystallisierten Körpers auftreten können, durch folgenden Satz aussprechen: *Aus vier Flächen eines Krystallflächenkomplexes, die ein Tetraeder bilden, lassen sich alle übrigen Flächen der Reihe nach dadurch ableiten, dass parallel zu jedem Paare von Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Flächen eine neue Fläche gelegt wird*[1].

Da krystallographische Begrenzungselemente nur ihrer Richtung nach völlig bestimmt sind, so können wir durch ein Zentrum C das Bündel der Ebenen und Geraden gelegt denken, die den Flächen und Kanten eines Krystallflächenkomplexes parallel gehen. Dann ist nach dem Gesetz der Zonen jede Gerade der Träger eines Büschels von möglichen Flächen und jede Ebene der Träger eines Büschels von möglichen Kanten. Flächen- und Kantenrichtungen stehen sich *dualistisch* gegenüber[2].

Vier der Ableitung zu Grunde liegende Flächen $e_0\, e_1\, e_2\, e_3$ bilden ein vollständiges Vierflach mit drei Paaren von Gegenkanten (Fig. 1, 5):

$$e_2 e_3 = \varepsilon_1;\quad e_3 e_1 = \varepsilon_2;\quad e_1 e_2 = \varepsilon_3$$

$$e_0 e_1 = \varepsilon_4;\quad e_0 e_2 = \varepsilon_5;\quad e_0 e_3 = \varepsilon_6.$$

Je zwei einander gegenüberliegende Kanten werden durch eine Diagonalfläche verbunden:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_4 = b_1;\quad \varepsilon_2 \varepsilon_5 = b_2;\quad \varepsilon_3 \varepsilon_6 = b_3.$$

Diese drei Flächen schneiden sich in den drei Diagonalkanten des Vierflaches:

$$b_2 b_3 = \beta_1;\quad b_3 b_1 = \beta_2;\quad b_1 b_2 = \beta_3.$$

Durch jede Diagonalkante kann ein Paar Gegenflächen nach den beiden mit ihr noch nicht verbundenen Gegenkanten gelegt werden:

Vier der Ableitung zu Grunde liegende Kanten $\delta_0\, \delta_1\, \delta_2\, \delta_3$ bilden ein vollständiges Vierkant mit drei Paaren von Gegenflächen (Fig. 1, 5):

$$\delta_2 \delta_3 = d_4;\quad \delta_3 \delta_1 = d_5;\quad \delta_1 \delta_2 = d_6$$

$$\delta_0 \delta_1 = d_1;\quad \delta_0 \delta_2 = d_2;\quad \delta_0 \delta_3 = d_3.$$

Diese sechs Flächen schneiden sich ausser in den vier Kanten δ noch in den drei Diagonalkanten:

$$d_1 d_4 = \beta_1;\quad d_2 d_5 = \beta_2;\quad d_3 d_6 = \beta_3.$$

Durch je zwei dieser Kanten geht eine Diagonalfläche des Vierkants:

$$\beta_2 \beta_3 = b_1;\quad \beta_3 \beta_1 = b_2;\quad \beta_1 \beta_2 = b_3.$$

Auf jeder Diagonalfläche erzeugen die drei Paare von Gegenflächen ausser den Diagonalkanten noch ein Paar Gegenkanten:

1) *F. E. Neumann,* Beitr. z. Krystallon. 1823. De lege zonarum 1826; *A. F. Möbius,* Der barycentrische Calcül 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Cl. 1849, p. 45; *F. Blasius,* Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 538.

2) *H. Grassmann,* Ausdehnungslehre von 1844, § 171; *Liebisch,* Zeitschr. d. geol. Ges. 1877, p. 515.

$\beta_1 \varepsilon_1 = d_1$; $\beta_2 \varepsilon_2 = d_2$; $\beta_3 \varepsilon_3 = d_3$

$\beta_1 \varepsilon_4 = d_4$; $\beta_2 \varepsilon_5 = d_5$; $\beta_3 \varepsilon_6 = d_6$.

Diese sechs Flächen schneiden sich zu je dreien in vier Kanten:

$$d_1 d_2 d_3 = \delta_0$$
$$d_1 d_5 d_6 = \delta_1$$
$$d_2 d_6 d_4 = \delta_2$$
$$d_3 d_4 d_5 = \delta_3,$$

welche ein vollständiges Vierkant bilden.

In jeder Diagonalfläche b bilden die auf ihr liegenden Gegenkanten ε und Diagonalkanten β ein harmonisches Büschel:

$$(\beta_2 \beta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_4) = -1$$
$$(\beta_3 \beta_1 \varepsilon_5 \varepsilon_2) = -1$$
$$(\beta_1 \beta_2 \varepsilon_6 \varepsilon_3) = -1.$$

$b_1 d_1 = \varepsilon_1$; $b_2 d_2 = \varepsilon_2$; $b_3 d_3 = \varepsilon_3$

$b_1 d_4 = \varepsilon_4$; $b_2 d_5 = \varepsilon_5$; $b_3 d_6 = \varepsilon_6$.

Diese sechs Kanten liegen zu je dreien auf vier Flächen:

$$\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = e_0$$
$$\varepsilon_4 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = e_1$$
$$\varepsilon_5 \varepsilon_3 \varepsilon_1 = e_2$$
$$\varepsilon_6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = e_3,$$

welche ein vollständiges Vierflach bilden.

Die in einer Diagonalkante β sich schneidenden Gegenflächen d und Diagonalflächen b bilden ein harmonisches Büschel:

$$(b_2 b_3 d_4 d_1) = -1$$
$$(b_3 b_1 d_5 d_2) = -1$$
$$(b_1 b_2 d_6 d_3) = -1.$$

Die Fläche e_i und die Kante δ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, werden an allen Kanten des Dreikants $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ und auf allen Flächen des Dreiflachs $b_1 b_2 b_3$ voneinander harmonisch getrennt.

Auf diese Weise kann die geometrische Ableitung neuer Flächen und Kanten unbegrenzt fortschreiten.

3. Raumgitter. Der Zonenzusammenhang der Flächen eines krystallisierten Körpers wird veranschaulicht durch das geometrische Bild der Struktur einheitlicher Krystalle, das durch die weitere Entwicklung der *Hauy*schen Hypothese über die Krystallstruktur entstanden ist. (Näheres hierüber in Teil B, Art. *Schönflies.*)

In einem unbegrenzt gedachten einheitlichen Krystall sind unzählig viele Punkte vorhanden von der Beschaffenheit, dass um jeden Punkt die Massenverteilung nach parallelen Richtungen dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt. Diese Stellen müssen angeordnet sein nach Raumgittern, d. h. nach den Schnittpunkten dreier Scharen von parallelen äquidistanten Ebenen. Jede durch irgend zwei Punkte des Gitters gelegte Gerade (Punktreihe) ist mit unendlich vielen Gitterpunkten äquidistant besetzt; der Abstand zweier benachbarter Punkte wird der Parameter dieser Punktreihe und der zu ihr parallelen Punktreihen genannt. Legt man durch irgend drei Punkte des Gitters, die nicht einer Geraden angehören, eine Ebene (Netzebene), so ist sie mit unendlichen vielen Punkten parallelogrammatisch besetzt.