

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0236

LOG Titel: 5. Projektionen

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Raumgitterstruktur veranschaulicht das Gesetz der Zonen, wenn die Annahme hinzugefügt wird, dass als *Krystallflächen nur Netzebenen des Gitters auftreten können*.

4. Polfiguren. Wir stellen uns vor, dass die Flächen eines Krystallpolyeders um die Strecke r von einem Punkte C im Innern entfernt seien. Dann kann dem Polyeder eine Kugel um C mit dem Radius r eingeschrieben werden. Der Berührungspunkt einer Fläche mit der Kugel wird der Pol dieser Fläche, die Gesamtheit der Flächenpole die Polfigur des Polyeders genannt. Die Flächen einer Zone liefern Pole, die in einem Hauptkreise (Zonenkreise) liegen; die durch den Mittelpunkt gelegte Kantenrichtung der Zone schneidet die Kugel in den Polen des Zonenkreises.

Da der sphärische Abstand zweier Flächenpole ein Mass ist für den äusseren Winkel der zugehörigen Flächen, so gewährt die Polfigur eine auf anderem Wege nicht erreichbare Übersicht der Flächenwinkel und damit die zweckmässigste Grundlage für die Ermittlung der zur Beschreibung der Krystallpolyeder erforderlichen Grössen.

In der Polfigur sind einer Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche verschiedene (diametral gegenüberliegende) Punkte zugeordnet. Soll die entsprechende Unterscheidung auch in dem Bündel der von C ausgehenden Flächennormalen, das die Kugel in den Polen der Fläche schneidet, festgehalten werden, so müssen wir den Flächennormalen die auf S. 396 eingeführten positiven Richtungssinne beilegen. In der Untersuchung projektivischer Beziehungen zwischen einem Krystallflächenkomplex und seiner Polfigur wird hierauf verzichtet; dann entspricht einer Flächenrichtung ein Polpaar³⁾.

5. Projektionen. Hilfsmittel für die geometrische Untersuchung der Krystallpolyeder bieten die von *F. E. Neumann* 1823 eingeführten Verfahren zur übersichtlichen Darstellung des Zonenverbandes in einer Ebene dar⁴⁾. Man gewinnt diese Darstellungen, indem man I. das durch ein Zentrum C gelegte Bündel von Ebenen eines Krystallflächenkomplexes mit einer nicht durch C gehenden Ebene \mathcal{E} schneidet

3) Über die Einführung der Normalen der Krystallflächen und der Polfiguren vgl. *F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie 1 (1823), p. 5, 55; *Ann. Phys. Chem.* 4 (1825), p. 63; *J. G. Grassmann*, Zur physischen Krystallonomie 1 (1829), p. X, 5, 50; *J. F. Chr. Hessel*, Krystallometrie 1831, p. 223.

4) *F. E. Neumann*, Beiträge zur Krystallonomie 1 (1823). Wesentlich kompliziertere graphische Methoden sind von *L. Ditscheiner* vorgeschlagen worden *Sitz.-Ber. Wien. Akad. Math. Kl.* 26 (1857), p. 279. 28 (1858), p. 93, 134, 201. 32 (1858), p. 3.

oder II. das Bündel der Flächennormalen a) mit einer nicht durch C gehenden Ebene \mathcal{E} oder b) mit einer konzentrischen Kugel schneidet.

I. *Linienprojektion eines Flächenbündels.* Da in dem Bündel jedem Paare einer Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche eine einzige Ebene entspricht, so ist deren Schnittgerade mit der Projektionsebene \mathcal{E} einer Flächenrichtung zugeordnet. Die Spuren der Flächenrichtungen einer Zone bilden ein Büschel von Geraden durch die Spur der gemeinsamen Kante (Zonenpunkt). Jeder Kantenrichtung des Krystals ist also ein Punkt in \mathcal{E} zugeordnet. Aus der perspektivischen Lage des Bündels und seiner Projektion folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse von vier Elementen eines Büschels im Bündel und der vier entsprechenden Elemente in der Projektion.

Die Linienprojektion (Fig. 1) veranschaulicht den Zonenverband der auf S. 397—398 genannten Flächen $e_0 \dots d_6$.

Linienprojektionen wurden von Fr. A. Quenstedt, F. H. Schröder und M. Websky in umfassender Weise für die Zwecke der geometrischen Krystallographie verwertet⁵⁾.

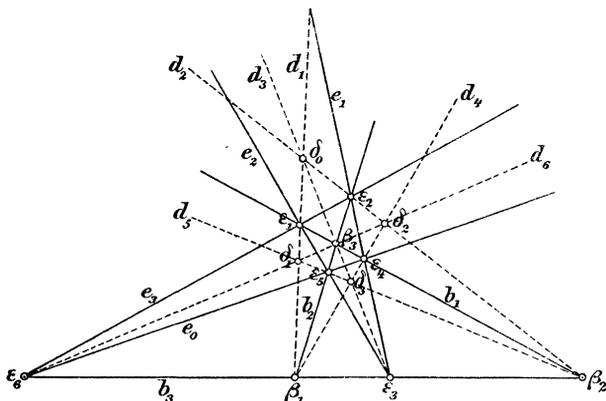


Fig. 1. Linienprojektion.

IIa. *Punktprojektion eines Bündels von Flächennormalen; gnomonische Projektion einer Polfigur.* In der Projektionsebene \mathcal{E} erzeugen die Flächennormalen ein System von Schnittpunkten. Hierdurch wird jeder Flächenrichtung des Krystals ein Punkt (Flächenort) in \mathcal{E} zu-

5) Fr. A. Quenstedt, Ann. Phys. Chem. 34 (1835), p. 503, 561; 36 (1835), p. 245, 379; Methode der Krystallographie 1840, Beiträge zur rechn. Krystallogr. 1848, Handbuch der Min. 1855, Grundriss d. bestimm. u. rechn. Krystallogr. 1873; F. H. Schröder, Elemente d. rechn. Krystallogr. 1852; M. Websky, Ann. Phys. Chem. 118 (1863), p. 240; Anwendung d. Linearprojektion z. Berechn. d. Krystalle 1887.

geordnet. Den Flächenrichtungen einer Zone entsprechen Punkte einer Geraden; jeder Kantenrichtung des Krystalls ist also eine Gerade (Zonenlinie) in \mathcal{E}' zugeordnet.

Betrachtet man in Fig. 1 die Punkte $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ als Flächenorte eines vollständigen Vierflachs, so wird der Zonenverband der abgeleiteten Flächen $\beta_1 \dots \varepsilon_6$ veranschaulicht.

Die Projektion eines Bündels von Flächennormalen ist identisch mit der *gnomonischen Projektion* der zu dem Bündel der Flächen gehörigen Polfigur auf die Ebene \mathcal{E}' , wenn man den Radius der Kugel gleich dem Abstand des Zentrums C von \mathcal{E}' wählt⁶⁾.

Den Hauptkreis, in welchem die Kugel von der parallel \mathcal{E}' gelegten Diametralebene geschnitten wird, nennen wir Grundkreis. Den Berührungspunkt O' von \mathcal{E}' mit der Kugel, der im allgemeinen nicht

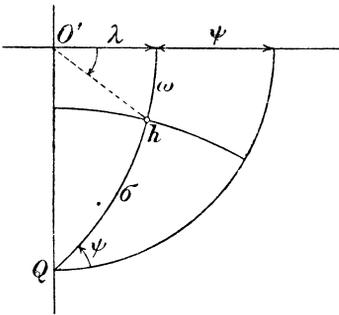


Fig. 2. Polarkoordinaten σ, ψ des Poles h .

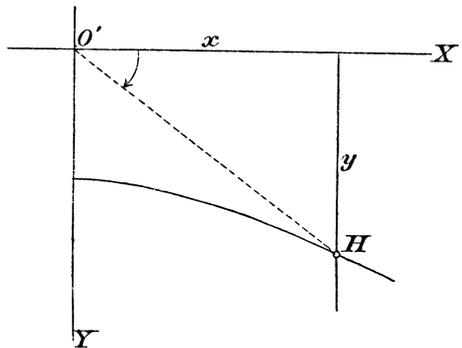


Fig. 3. Gnomonische Projektion H des Poles h .

mit dem Pol einer Krystallfläche zusammenfällt, bezeichnen wir als Projektionszentrum. Zu Polarkoordinaten eines Poles h seien gewählt der sphärische Abstand $(Qh) = \sigma$ von dem im Grundkreise gelegenen Pole Q und das Azimut ψ der Zone Qh in Bezug auf diesen Kreis (Fig. 2). Dann hat das Projektionszentrum O' die Koordinaten $\sigma = \psi = 90^\circ$.

Die Kugel sei mit einem Netz von Längenkreisen und Breiten-

6) Nach dem Vorgange von *F. E. Neumann* wurde die gnomonische Projektion verwertet von: *J. Fr. Chr. Hessel*, *Krystallometrie* (1831), p. 225 f. (Lehre von der Zeigerfläche); *W. H. Miller*, *Phil. Mag.* (4) 18 (1859), p. 37; *M. Websky*, *Monatsber. Berlin. Akad.* 1876, p. 3, 1879, p. 124; *E. Mallard*, *Traité de crist.* 1 (1879); *H. A. Miers*, *Min. Mag.* 7 (1887), p. 145; *V. Goldschmidt*, in den auf p. 394 genannten Schriften und *Zeitschr. f. Kryst.* 17 (1890), p. 97, 191; 19 (1891), p. 35, 352; 20 (1892), p. 143; 21 (1893), p. 210; 22 (1894), p. 20; 25 (1896), p. 538; 30 (1899), p. 346; *E. v. Fedorow*, *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 574; *G. F. H. Smith*, *Min. Mag.* 13 (1903), p. 309; *H. Hilton*, *Min. Mag.* 14 (1904), p. 18.

kreisen in der Weise bedeckt, dass die Längenkreise durch Q hindurchgehen und O' der Nullpunkt der Länge λ ist. Die Breite sei bezeichnet mit ω . Es ist $\lambda + \psi = \omega + \sigma = 90^\circ$. Wählt man jetzt in der Projektionsebene \mathcal{G}' (Fig. 3) die Schnittgeraden mit der Äquator-ebene und der Ebene des Längenkreises QO' zu Koordinatenachsen X , Y , so gilt für die Projektion H des Poles h :

$$x = r \cdot \cotg \psi,$$

$$y = r \cdot \frac{\cotg \sigma}{\sin \psi}.$$

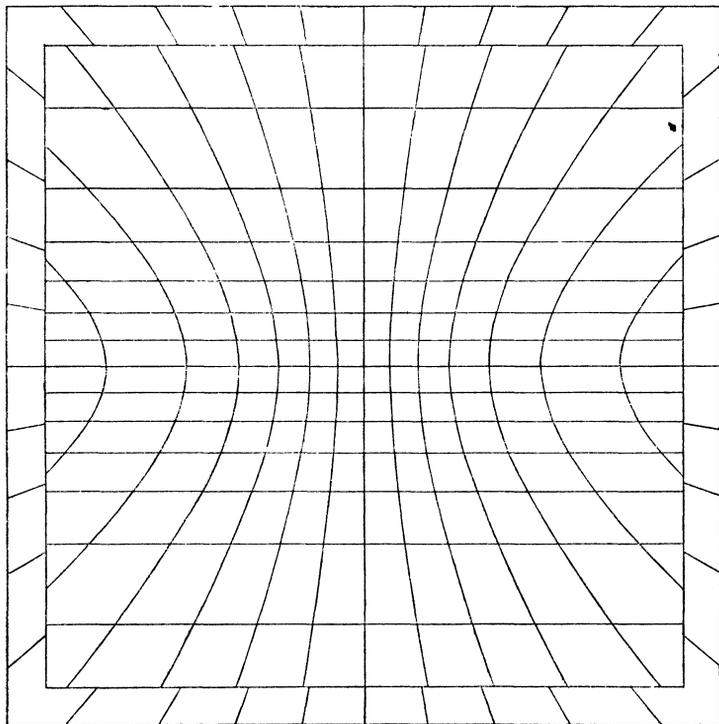


Fig. 4. Gnomonisches Netz.

Um die Herstellung gnomonischer Projektionen mit Hilfe dieser Koordinaten zu erleichtern, hat *G. T. H. Smith*⁷⁾ eine Tabelle der mit 10 multiplizierten Werte von $\cotg \sigma / \sin \psi$ in dem Gebiete von 90° bis 25° angelegt. Umgekehrt findet man mit der Tabelle und einem Transporteur aus der Projektion den Winkel zwischen zwei Flächenpolen oder zwei Zonenkreisen.

7) *G. F. H. Smith*, *Min. Mag.* 13 (1903), p. 309.

Zu demselben Zweck kann das von *H. Hilton*⁸⁾ entworfene *gnomonische Netz* (Fig. 4) benutzt werden, worin die Längenkreise abgebildet sind durch die Schar der zu *Y* parallelen Geraden:

$$x = r \cdot \operatorname{tang} \lambda$$

und die Breitenkreise durch die Hyperbeln:

$$-x^2 + y^2 \operatorname{cotg}^2 \omega = r^2.$$

II b. *Stereographische Projektion einer Polfigur.* Zur Abbildung einer Polfigur auf eine Ebene ist besonders geeignet die stereographische Projektion der Kugeloberfläche. Es ist zweckmässig die Projektionsebene \mathcal{G}' durch den Mittelpunkt *C* der Kugel und in einen Zonenkreis (Grundkreis) zu legen, wobei die Symmetrieeigenschaften der Krystalle zu berücksichtigen sind (vgl. in Fig. 5 die stereographische Projektion der Polfigur des Oktaeders, Hexaeders und Dodekaeders mit den der Fig. 1 entsprechenden Bezeichnungen der Flächen). Die Projektionsstrahlen gehen dann von einem Endpunkte *O* des zu \mathcal{G}' senkrechten Durchmessers aus. Im allgemeinen genügt die Abbildung der dem Punkte *O* gegenüberliegenden Halbkugel, die das Innere des Grundkreises erfüllt. Indessen ist es z. B. bei der Untersuchung von Symmetrieeigenschaften nützlich, die Projektion auf das benachbarte Gebiet ausserhalb des Grundkreises zu erweitern⁹⁾.

Die stereographische Projektion einer Polfigur kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn der Zonenverband und die Flächenwinkel des Polyeders gegeben sind. Dabei werden folgende Eigenschaften der Projektion benutzt. Bezeichnet man mit *O'* den

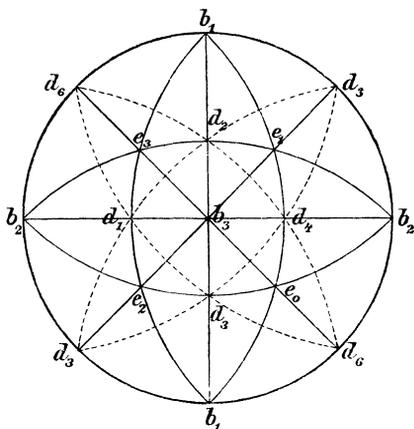


Fig. 5. Stereographische Projektion der Polfigur des Oktaeders, Hexaeders und Dodekaeders.

8) *H. Hilton*, *Min. Mag.* 14 (1904), p. 18.

9) Über die Verwertung der stereographischen Projektionen von Polfiguren vgl. *W. H. Miller*, *A Treatise on Cryst.* 1839; *Phil. Mag.* (4) 19 (1860), p. 325; *V. v. Lang*, *Lehrb. d. Kryst.* 1866, p. 299; *E. Reusch*, *Ann. Phys. Chem.* 142 (1871), p. 46; 147 (1872), p. 569; *Die stereogr. Proj.* 1881; *Th. Liebisch*, *Geom. Kryst.* 1881; *A. Brezina*, *Methodik d. Krystallbestimmung* 1884; *St. Jolles*, *Zeitschr. f. Kryst.* 18 (1891), p. 24; *G. Wulff*, *Zeitschr. f. Kryst.* 21 (1893), p. 249; 36 (1902),

Gegenpunkt von O , mit h die Projektion des Flächenpoles h , mit r den Radius der Kugel und mit u den Winkel ($O'Ch$), so ist (Fig. 6):

$$(1) \quad C\bar{h} = r \cdot \tan \frac{u}{2}.$$

Die Projektionen aller Kugelkreise sind wieder Kreise. Die Projektion eines grössten Kugelkreises schneidet den Grundkreis in zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten; geht der Kreis durch O , so wird er abgebildet durch die Schnittlinie seiner Ebene mit der Projektionsebene. Der Mittelpunkt der Projektion eines Kugelkreises ist die Projektion der Spitze des Tangentenkegels, den man in diesem Kreise an die Kugel legen kann. Für einen grössten Kugelkreis geht der Tangentenkegel in einen Zylinder über; daher liegt der Mittelpunkt m der Projektion eines Zonenkreises \mathfrak{Z} im Schnittpunkt der von O auf die Ebene \mathfrak{Z} gefällten Normale Om mit der Projektionsebene \mathfrak{E}'' . In

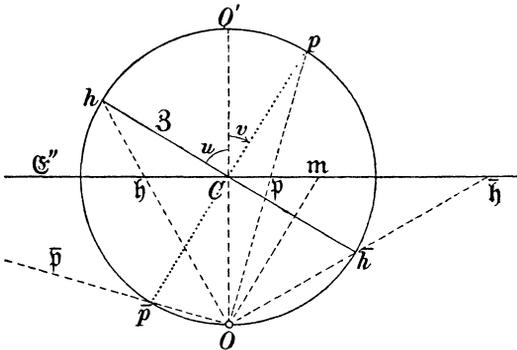


Fig. 6. Stereographische Projektionen h , \bar{h} , p der Pole h , \bar{h} , p .

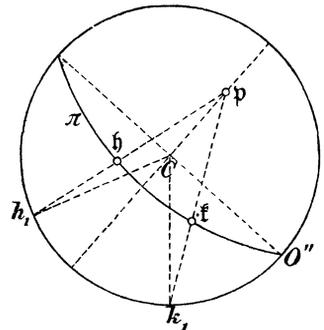


Fig. 7. Konstruktion der sphärischen Entfernung zweier Punkte $h\bar{h}$ der Kugeloberfläche.

Fig. 6 bedeutet $p\bar{p}$ den auf \mathfrak{Z} senkrechten Durchmesser; der durch O' und p gelegte Meridian schneidet \mathfrak{Z} in h und \bar{h} , deren Projektionen h und \bar{h} sind. Bezeichnet man den Radius der Projektion von \mathfrak{Z} mit r und den Winkel ($O' Cp$) mit v , so ist:

$$(2) \quad r = hm = m\bar{h} = Om = \frac{r}{\cos v}$$

$$Cm = r \cdot \tan v.$$

Von den Endpunkten des Durchmessers $p\bar{p}$ wird der auf der Halb-

p. 14; E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 357; 21 (1893), p. 617; 29 (1898), p. 639; 33 (1900), p. 589; 37 (1903), p. 138; V. Goldschmidt, Zeitschr. f. Kryst. 30 (1899), p. 260; S. L. Penfield, Amer. J. of Sc. (4) 11 (1901), p. 2, 115; 14 (1902), p. 249; H. Hilton, Phil. Mag. (6) 6 (1903), p. 66; E. Sommerfeldt, Zeitschr. f. Kryst. 41 (1906), p. 164.

kugel um O' gelegene Punkt p der Pol des Zonenkreises \mathfrak{z} genannt; seine Projektion besitzt folgende Eigenschaft: Sind h, k die Projektionen der Flächenpole h, k , so bestimmen die Verbindungslinien ph und pk auf dem Grundkreise einen Bogen h_1k_1 , der gleich dem Bogen hk ist (Fig. 7).

Die Ausführung einer Projektion wird wesentlich erleichtert durch eine Hilfsprojektion, die man gewinnt, indem man ein Netz von Längenkreisen und Breitenkreisen in der Weise stereographisch projiziert, dass ein Längenkreis mit dem Grundkreise zusammenfällt (stereographische Meridianprojektion Fig. 8). *B. Hecht*¹⁰⁾ benutzt Netze auf Pauspapier, die über der Zeichnung gedreht werden, in Verbindung mit einer Tabelle, in der neben den Winkeln u die Strecken:

$$r \cdot \tan \frac{u}{2}, \quad \frac{r}{\sin u}, \quad r \cdot \sin u$$

angegeben sind.

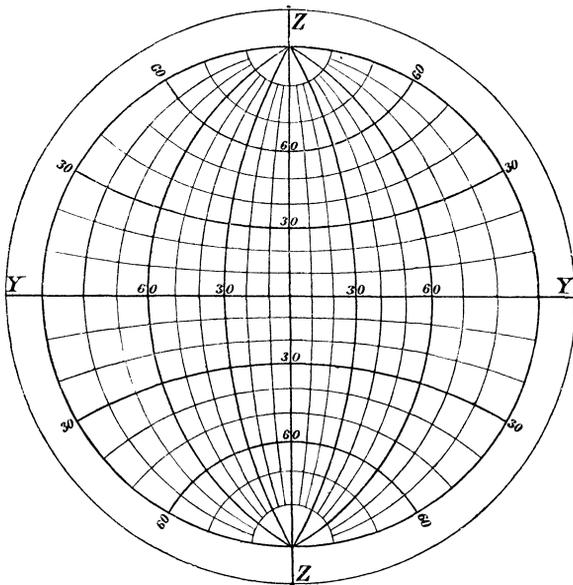


Fig. 8. Stereographische Meridianprojektion.

Zwischen den drei Projektionen bestehen einfache *Beziehungen*, wenn wir voraussetzen, dass die Projektionsebenen \mathfrak{E} der Linienprojektion eines Flächenbündels und \mathfrak{E}' der Punktprojektion des Normalenbündels zusammenfallen und parallel zur Projektionsebene \mathfrak{E}'' der stereographischen Projektion der Polfigur liegen, derart dass sie

10) *B. Hecht*, Anleitung zur Krystallberechnung, 1893, p. 64.

die Kugel im Gegenpunkte O' von O berühren (Fig. 9, 10). Es bedeute \mathfrak{B} eine Flächenrichtung, β ihre Linienprojektion, b ihren Pol, B die Punktprojektion der Flächennormale (oder die gnomonische Projektion des Poles b), \mathfrak{b} die stereographische Projektion dieses Poles,

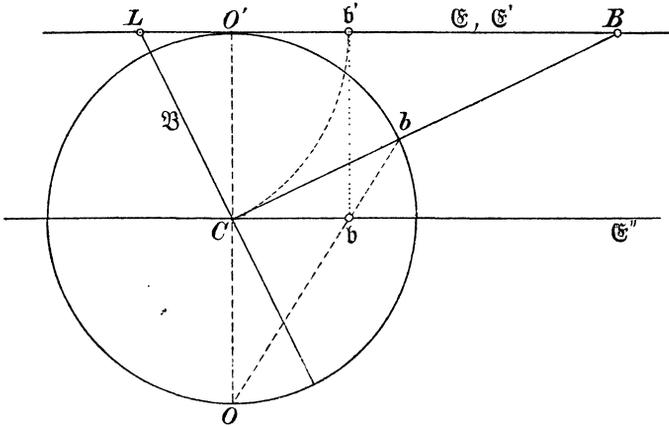


Fig. 9. Verbindungsebene der Projektionsstrahlen CB und Ob .

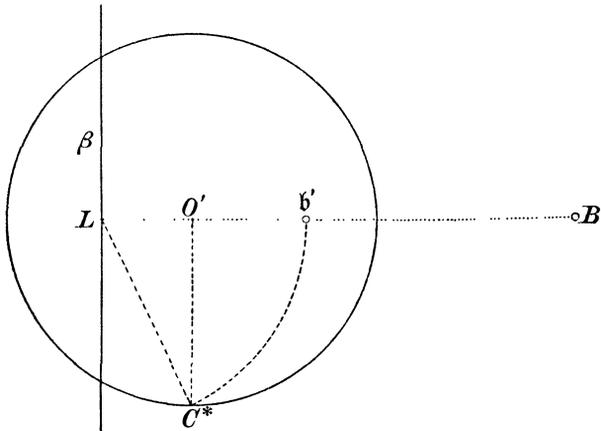


Fig. 10. Projektionsebene der Linienprojektion und der gnomonischen Projektion.

Fig. 9, 10. Zusammenhang zwischen der Linienprojektion β einer Flächenrichtung \mathfrak{B} , der stereographischen Projektion \mathfrak{b} und der gnomonischen Projektion B ihres Poles b .

\mathfrak{b}' die senkrechte Projektion von \mathfrak{b} auf \mathfrak{E} . Dann steht die Gerade $B\mathfrak{b}'O'$ senkrecht auf β in L und es ist $LC = L\mathfrak{b}'$. Denken wir uns nun \mathfrak{E}'' nach \mathfrak{E} verschoben, und beschreiben wir um O' den Distanz-

kreis mit dem Radius r , so ist die *Linienprojektion* β der *Flächenrichtung* \mathfrak{B} die *Polare der gnomonischen Projektion* B des *Poles* b in Bezug auf den *imaginären Kreis* mit dem Radius $-r$ und die *stereographische Projektion* β' des *Poles* b liegt auf dem zu β senkrechten *Durchmesser des Distanzkreises* im *Abstande* $LC = LC^*$ von β .

6. Ableitung des Gesetzes der rationalen Indices aus dem Gesetz der Zonen¹¹⁾. Von den Flächen p_1, p_2, p_3, e eines Tetraeders, das zur Ableitung eines Krystallflächenkomplexes nach dem Gesetz der Zonen dient, sollen p_1, p_2, p_3 zu Axenebenen gewählt werden (Fig. 11). Ihre Schnittgeraden π_1, π_2, π_3 bilden ein im allgemeinen schiefwinkliges Axensystem. Die Fläche e bestimme die Verhältnisse der Axeneinheiten $OE_1 : OE_2 : OE_3 = a_1 : a_2 : a_3$. Man bezeichnet die Winkel zwischen den Axen und die Verhältnisse der Einheiten als *Axenelemente*.

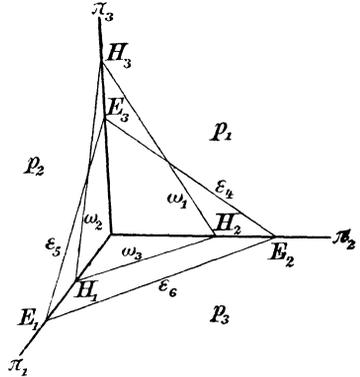


Fig. 11. Zur Definition der Indices der Fläche $H_1H_2H_3$.

In dem Komplex befinde sich die Fläche h mit den Axenabschnitten OH_1, OH_2, OH_3 , dann *verhalten sich die Quotienten aus den Axeneinheiten und den Axenabschnitten dieser Fläche wie ganze Zahlen* h_1, h_2, h_3 :

$$(1) \quad \frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = h_1 : h_2 : h_3.$$

Man nennt sie die *Indices der Fläche* h .

Der Beweis ergibt sich aus folgender Überlegung. Da nur die Richtung der Fläche h in Betracht kommt und die Verhältnisse der Richtungscosinus ihrer Normale μ gegeben sind durch:

$$\cos \mu \pi_1 : \cos \mu \pi_2 : \cos \mu \pi_3 = \frac{1}{OH_1} : \frac{1}{OH_2} : \frac{1}{OH_3} = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3},$$

so ist die Gleichung der Fläche h in Punktkoordinaten:

$$(2) \quad x_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} + x_2 \cdot \frac{h_2}{a_2} + x_3 \cdot \frac{h_3}{a_3} = 0.$$

Die Koordinaten eines Punktes der Schnittgeraden η zweier Flächen h' und h verhalten sich wie:

11) F. E. Neumann, De lege zonarum 1826; A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1849, p. 45; W. v. Bezold, Sitz.-Ber. Akad. München, math.-phys. Kl. 1863, p. 350.