kreis mit dem Radius r, so ist *die Linienprojektion* β *der Flächenrichtung* $\mathfrak{B}$ *die Polare der gnomonischen Projektion* B *des Poles* b *in Bezug auf den imaginären Kreis mit dem Radius* $-r$ und *die stereographische Projektion* $\mathfrak{b}'$ *des Poles* b *liegt auf dem zu* β *senkrechten Durchmesser des Distanzkreises im Abstande* $LC = LC^*$ *von* β.

6. Ableitung des Gesetzes der rationalen Indices aus dem Gesetz der Zonen[11]. „Von den Flächen p_1, p_2, p_3, e eines Tetraeders, das zur Ableitung eines Krystallflächenkomplexes nach dem Gesetz der Zonen dient, sollen p_1, p_2, p_3 zu Axenebenen gewählt werden (Fig. 11). Ihre Schnittgeraden π_1, π_2, π_3 bilden ein im allgemeinen schiefwinkliges Axensystem. Die Fläche e bestimme die Verhältnisse der Axeneinheiten $OE_1 : OE_2 : OE_3 = a_1 : a_2 : a_3$. Man bezeichnet die Winkel zwischen den Axen und die Verhältnisse der Einheiten als *Axenelemente*.

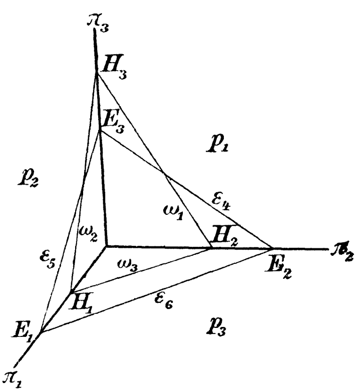

Fig. 11. Zur Definition der Indices der Fläche $H_1 H_2 H_3$.

In dem Komplex befinde sich die Fläche h mit den Axenabschnitten OH_1, OH_2, OH_3, dann *verhalten sich die Quotienten aus den Axeneinheiten und den Axenabschnitten dieser Fläche wie ganze Zahlen* h_1, h_2, h_3:

$$(1) \qquad \frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = h_1 : h_2 : h_3.$$

Man nennt sie die *Indices der Fläche* h.

Der Beweis ergibt sich aus folgender Überlegung. Da nur die Richtung der Fläche h in Betracht kommt und die Verhältnisse der Richtungscosinus ihrer Normale μ gegeben sind durch:

$$\cos \mu\pi_1 : \cos \mu\pi_2 : \cos \mu\pi_3 = \frac{1}{OH_1} : \frac{1}{OH_2} : \frac{1}{OH_3} = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3},$$

so ist die Gleichung der Fläche h in Punktkoordinaten:

$$(2) \qquad x_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} + x_2 \cdot \frac{h_2}{a_2} + x_3 \cdot \frac{h_3}{a_3} = 0.$$

Die Koordinaten eines Punktes der Schnittgeraden η zweier Flächen h' und h verhalten sich wie:

11) *F. E. Neumann*, De lege zonarum 1826; *A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcul, 1827, p. 266; Ber. Verh. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1849, p. 45; *W. v. Bezold*, Sitz.-Ber. Akad. München, math.-phys. Kl. 1863, p. 350.

$$(3)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = a_1\eta_1 : a_2\eta_2 : a_3\eta_3$$

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} h_2' & h_3' \\ h_2'' & h_3'' \end{vmatrix} = (h'h'')_1, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} h_3' & h_1' \\ h_3'' & h_1'' \end{vmatrix} = (h'h'')_2$$

$$\eta_3 = \begin{vmatrix} h_1' & h_2' \\ h_1'' & h_2'' \end{vmatrix} = (h'h'')_3.$$

Man nennt die Zahlen η_1, η_2, η_3 die *Indices der Kante* η. Die Bedingung dafür, dass die Flächen h, h', h'' einer Zone angehören:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1' & h_2' & h_3' \\ h_1'' & h_2'' & h_3'' \end{vmatrix} = 0$$

enthält nur die Indices der Flächen und ist unabhängig von den Axenelementen. Liegt eine Fläche h gleichzeitig in den Zonen der Flächen h', h'' und k', k'', also parallel den Kanten η und η' mit den Indices η_1, η_2, η_3 und η_1', η_2', η_3':

$$\eta_1' = (k'k'')_1, \quad \eta_2' = (k'k'')_2, \quad \eta_3' = (k'k'')_3,$$

so setzen sich ihre Indices in folgender Weise zusammen:

$$(5)\qquad h_1 : h_2 : h_3 = (\eta\eta')_1 : (\eta\eta')_2 : (\eta\eta')_3.$$

Mit Hülfe von (3) und (5) können die Indices aller Flächen h berechnet werden, die sich nach dem Gesetz der Zonen aus den vier zu Grunde liegenden Flächen ableiten lassen. Nun sind die Indices dieser vier Flächen:

p_1	p_2	p_3	e
100	010	001	111.

Hieraus sind die Indices aller übrigen Flächen durch die Operationen der Multiplikation und Subtraktion zu bilden. Auf solche Weise können aber nur *ganze Zahlen* entstehen: *Die Indices der in einem Krystallflächenkomplex möglichen Flächen und Kanten verhalten sich wie ganze Zahlen, wenn die Richtungen der Koordinatenaxen und die Verhältnisse der Axeneinheiten durch vier Flächen des Komplexes bestimmt werden.*

Zur geometrischen Beschreibung eines Krystallpolyeders sind also notwendig: 1. die Axenelemente, 2. die Indices der Flächen. Diese Grössen müssen aus Messungen der Flächenwinkel berechnet werden.

Die Zusammenstellung der Indices h_1, h_2, h_3 wird nach einem Vorschlage von *W. Whewell*[12]) (1825) zur *Bezeichnung* der Fläche h benutzt und das Symbol von h genannt. Dieselbe Methode der Flächen-

12) *W. Whewell*, London Phil. Trans. 1825, p. 87.

bezeichnung haben *J. G. Grassmann*[13]) und *L. Frankenheim*[14]) im Jahre 1829 und bald darauf auch *C. Fr. Gauss*[15]) ersonnen und angewandt; eine weitere Verbreitung erlangte sie erst durch die krystallographischen und mineralogischen Schriften von *W. H. Miller*[16]).

Aus Fig. 11 ist ersichtlich, dass die Indices einer Fläche h auch definiert werden können als Verhältnisse der Dreiecke, die von der Fläche h und der Einheitsfläche e auf den Axenebenen bestimmt werden[17]):

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{OH_2H_3}{OE_2E_3} : \frac{OH_3H_1}{OE_3E_1} : \frac{OH_1H_2}{OE_1E_2}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergiebt sich eine in dem Gesetz der rationalen Indices enthaltene Beziehung zwischen den Flächen und den Kanten eines Krystalls. Betrachten wir das Ellipsoid, in welchem π_1, π_2, π_3 nach Richtung und Länge konjugierte Durchmesser sind. Zu der Diametralebene, die parallel der Krystallfläche mit den Indices h_1, h_2, h_3 liegt, gehöre der konjugierte Durchmesser nach dem Punkte y_1', y_2', y_3' des Ellipsoids; dann ist die Gleichung dieser Ebene:

$$\frac{y_1 y_1'}{a_1^2} + \frac{y_2 y_2'}{a_2^2} + \frac{y_3 y_3'}{a_3^2} = 0.$$

Demnach verhalten sich nach (2) die Indices der Krystallfläche wie:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{y_1'}{a_1} : \frac{y_2'}{a_2} : \frac{y_3'}{a_3}.$$

13) *J. G. Grassmann,* Zur physischen Krystallonomie u. geometr. Kombinationslehre 1 (1829). Vgl. Ann. Phys. Chem. 30 (1833), p. 1.

14) *M. L. Frankenheim,* De crystallorum cohaesione, Vratisl. 1829.

15) *C. Fr. Gauss,* Werke 2 (1863), p. 308.

16) *W. H. Miller,* Phil. Mag. (3) 6 (1835), p. 105; A treatise on crystallography 1839; A tract on crystallography 1863; An elementary introduction to mineralogy by *W. Philipps*; new edit. by *H. J. Brocke* and *W. H. Miller* 1852.

17) *H. Grassmann,* Ausdehnungslehre von 1844, § 171. [Vgl. *G. Junghann,* N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 1 (1881), p. 334.] Die *H. Grassmann*'sche Fassung des Gesetzes der rationalen Indices lautet: „Wenn man vier Flächen eines Krystalles ohne Änderung ihrer Richtungen so legt, dass sie einen Raum einschliessen, und die Stücke, welche dadurch von dreien derselben abgeschnitten werden, zu Richtmassen macht, so lässt sich jede andere Fläche des Krystalles als Vielfachensumme dieser Richtmasse rational ausdrücken.“ Oder: „Wenn man drei Kanten eines Krystalles, welche nicht in derselben Ebene liegen, ohne Änderung ihrer Richtung an einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt legt, und als ihre Endpunkte ihre Durchschnitte mit irgend einer Krystallfläche setzt, so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als Vielfachensumme dieser Strecken rational ausdrücken.“ Wie sich diese Fassung aus dem Gesetz der Zonen ergiebt mit Hülfe der Regeln über die Multiplikation von Strecken und Flächenräumen hat *Fr. Engel* gezeigt in: *H. Grassmann,* Ges. math. u. phys. Werke 1, 1 (1894), p. 411.

Andererseits verhalten sich nach (3) die Koordinaten des konjugierten Durchmessers mit den Indices η_1, η_2, η_3 wie:

$$y_1' : y_2' : y_3' = a_1\eta_1 : a_2\eta_2 : a_3\eta_3 .$$

Daraus folgt:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \eta_1 : \eta_2 : \eta_3,$$

d. h. *in einem Ellipsoid, in welchem die Krystallaxen nach Richtung und Länge konjugierte Durchmesser sind, gehört zu jeder Diametralebene, die einer Krystallfläche parallel liegt, ein konjugierter Durchmesser, der die Richtung einer Krystallkante und dieselben Indices wie jene Fläche besitzt*[18]).

7. **Topische Parameter.** Setzt man das Volumen des Elementarparallelepipeds eines triklinen Raumgitters gleich dem Molekularvolumen V des Stoffes, so werden die Kantenlängen χ, ψ, ω des Parallelepipeds *topische Parameter* genannt. Sie dienen zur Vergleichung der Krystallformen verschiedener Stoffe[19]). Bezeichnet man das Verhältnis der Axeneinheiten:

$$\frac{a_1}{a_2} = a, \quad \frac{a_3}{a_2} = c,$$

die Winkel $\pi_3\pi_1 = \beta$, $\pi_1\pi_2 = \gamma$ und den inneren Winkel der Ebenen $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$ an π_1 mit A, so ist:

$$a : 1 : c = \chi : \psi : \omega,$$

$$V = \chi\psi\omega \sin\beta \sin\gamma \sin A,$$

$$\chi^3 = a^3\psi^3 = \frac{a^2 V}{c \sin\beta \sin\gamma \sin A},$$

$$\psi^3 = \frac{V}{ac \sin\beta \sin\gamma \sin A},$$

$$\omega^3 = c^3\psi^3 = \frac{c^2 V}{a \sin\beta \sin\gamma \sin A}.$$

8. **Transformation der Indices.** Eine Veränderung der Axenebenen und der Einheitsfläche führt wieder auf rationale Indices, wie aus folgenden Relationen hervorgeht[20]).

Erteilt man den Flächen f^1, f^2, f^3, k mit den ursprünglichen Indices:

---

18) *Qu. Sella,* Nuovo Cimento 4 (1856), p. 93.

19) *F. Becke,* Anzeiger Wien. Akad. 30 (1893), p. 204; *W. Muthmann,* Zeitschr. f. Kryst. 22 (1894), p. 497; *A. E. Tutton,* Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 1; 27 (1897), p. 113, 266; 29 (1898), p. 54.

20) *A. T. Kupffer,* Ann. Phys. Chem. 8 (1826), p. 61, 215; Handb. d. rechn. Krystallon. 1831, p. 497; *J. F. Chr. Hessel,* Krystallometrie 1831, p. 214; *H. Grassmann,* Ausdehnungslehre von 1844, § 171; *Th. Liebisch,* Geom. Kryst. 1881, p. 48.