Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0241
LOG Titel: 10. Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Hiernach verhalten sich die Quotienten entsprechender Indices zweier Flächen h, h' wie die Quotienten aus den Cosinus der Einfallswinkel der Koordinatenaxen in Bezug auf diese Flächen:

$$\frac{h_1}{h_1'} : \frac{h_2}{h_2'} : \frac{h_3}{h_3'} = \frac{\cos \mu \pi_1}{\cos \mu' \pi_1} : \frac{\cos \mu \pi_2}{\cos \mu' \pi_2} : \frac{\cos \mu \pi_3}{\cos \mu' \pi_3}$$

und die Quotienten entsprechender Indices zweier Kanten η, η' wie die Quotienten aus den Cosinus der Einfallswinkel dieser Kanten in Bezug auf die Axenebenen:

$$\frac{\eta_1}{\eta_1'} : \frac{\eta_2}{\eta_2'} : \frac{\eta_3}{\eta_3'} = \frac{\cos \eta \nu_1}{\cos \eta' \nu_1} : \frac{\cos \eta \nu_2}{\cos \eta' \nu_2} : \frac{\cos \eta \nu_3}{\cos \eta' \nu_3}.$$

Wählt man nach *J. G. Grassmann*[23]) die Normalen ν_1, ν_2, ν_3 der ursprünglichen Axenebenen zu Koordinatenaxen, so verhalten sich die Koordinaten m_1, m_2, m_3 der Normale μ einer Fläche h wie:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \sin \nu_2 \nu_3 \cdot \cos \mu \pi_1 : \sin \nu_3 \nu_1 \cdot \cos \mu \pi_2 : \sin \nu_1 \nu_2 \cdot \cos \mu \pi_3$$

oder, wenn die Abschnitte von h auf den ursprünglichen Koordinatenaxen nach S. 407 eingeführt werden:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sin \nu_2 \nu_3}{OH_1} : \frac{\sin \nu_3 \nu_1}{OH_2} : \frac{\sin \nu_1 \nu_2}{OH_3}$$

oder, wenn:

$$\frac{\sin \nu_2 \nu_3}{a_1} = \alpha_1, \quad \frac{\sin \nu_3 \nu_1}{a_2} = \alpha_2, \quad \frac{\sin \nu_1 \nu_2}{a_3} = \alpha_3$$

als Längeneinheiten auf den Normalen ν_1, ν_2, ν_3 eingeführt werden:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \alpha_1 h_1 : \alpha_2 h_2 : \alpha_3 h_3 .$$

Demnach erhält in dem J. G. Grassmann'schen Koordinatensystem die Normale μ einer Fläche h dieselben Indices h_1, h_2, h_3, die in dem ursprünglichen Koordinatensystem der Fläche gegeben werden.

10. Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse. Die Lage der Einheitsfläche gegen die Axenebenen p_1, p_2, p_3 kann beschrieben werden durch Angabe der Sinusverhältnisse, nach denen die von e auf den Axenebenen erzeugten Kanten ε_4, ε_5, ε_6 die Axenwinkel teilen. Wird in analoger Weise die Lage einer beliebigen Fläche h bestimmt, welche mit den Axenebenen die Kanten ω_1, ω_2, ω_3 bildet (Fig. 11), so ist das Doppelverhältnis:

$$(\pi_3 \pi_2 \varepsilon_4 \omega_1) = \frac{\sin \pi_3 \varepsilon_4}{\sin \pi_2 \varepsilon_4} : \frac{\sin \pi_3 \omega_1}{\sin \pi_2 \omega_1} = \frac{OE_2}{OE_3} : \frac{OH_2}{OH_3} = h_2 : h_3$$

$$(\pi_1 \pi_3 \varepsilon_5 \omega_2) = h_3 : h_1$$

$$(\pi_2 \pi_1 \varepsilon_6 \omega_3) = h_1 : h_2 .$$

---

23) *J. G. Grassmann,* Zur physischen Krystallonomie 1 (1829), p. X, 5, 50; *J. Fr. Chr. Hessel,* Krystallometrie 1831, p. 223; *M. L. Frankenheim,* J. f. Math. 8 (1832), p. 172; *W. H. Miller,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 5 (1868), § 5.

Die projektivischen Koordinaten[24]) *einer Krystallfläche sind also identisch mit deren Indices*[25]).

Setzt man an Stelle der Geraden, die in diesen Doppelverhältnissen auftreten, die zu ihnen senkrechten Ebenen, so erhält man das Grundgesetz in der Form, in der es von *C. Fr. Gauss* 1831 ausgesprochen wurde[26]). Zur direkten Ableitung dient die Polfigur (Fig. 12), in der ε den Pol der Einheitsfläche e und μ den Pol der Fläche h bedeutet. Die rechtseitigen Dreiecke $\mu\pi_1\nu_2$, $\mu\pi_1\nu_3$, u. s. w., die den Eckpunkt μ gemein haben, liefern:

$$\begin{aligned}
&\cos\mu\pi_1 = \sin\nu_2\mu\sin\mu\nu_2\nu_3 = \sin\nu_3\mu\sin\mu\nu_3\nu_2\\
(1)\qquad &\cos\mu\pi_2 = \sin\nu_3\mu\sin\mu\nu_3\nu_1 = \sin\nu_1\mu\sin\mu\nu_1\nu_3\\
&\cos\mu\pi_3 = \sin\nu_1\mu\sin\mu\nu_1\nu_2 = \sin\nu_2\mu\sin\mu\nu_2\nu_1.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt z. B.

$$(2)\qquad \frac{h_2}{h_3}\cdot\frac{a_3}{a_2} = \frac{\cos\mu\pi_2}{\cos\mu\pi_3} = \frac{\sin\mu\nu_1\nu_3}{\sin\mu\nu_1\nu_2}.$$

Für die Einheitsfläche gilt:

$$(3)\qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\cos\varepsilon\pi_2}{\cos\varepsilon\pi_3} = \frac{\sin\varepsilon\nu_1\nu_3}{\sin\varepsilon\nu_1\nu_2}.$$

Demnach ist:

$$(4)\qquad \frac{h_2}{h_3} = \frac{\sin\varepsilon\nu_1\nu_2}{\sin\varepsilon\nu_1\nu_3} : \frac{\sin\mu\nu_1\nu_2}{\sin\mu\nu_1\nu_3}.$$

Der rechtsstehende Quotient ist das Doppelverhältnis der vier Zonenkreise $\nu_1\nu_2$, $\nu_1\nu_3$, $\nu_1\varepsilon$, $\nu_1\mu$, die durch den Pol ν_1 der Axenebene p_1 gehen[27]).

Den allgemeinen Ausdruck für das Doppelverhältnis von vier Flächen h, h', h'', h''' einer Zone als Funktion ihrer Indices hat *W. H. Miller* 1839 angegeben[28]). Bedeuten 1, 2, 3, 4 vier Punkte einer Kugeloberfläche, von denen 1, 2, 3 auf einem Hauptkreise liegen, so besteht die Beziehung:

$$\cos 41\cdot\sin 23 + \cos 42\cdot\sin 31 + \cos 43\cdot\sin 12 = 0.$$

Wendet man sie der Reihe nach an auf die Pole h, h', h'' und den Schnittpunkt der Kugel der Polfigur mit je einer der Axen π_1, π_2, π_3, so erhält man für die Koordinaten u_λ, u_λ', u_λ'' ($\lambda = 1, 2, 3$) die Gleichungen:

---

24) *W. Fiedler,* Vierteljahrsschr. naturf. Ges. zu Zürich 15 (1870), p. 152; Darstellende Geometrie, 3. Aufl. 3 (1888), p. 69, 642.

25) *Liebisch,* Geom. Krystallogr. 1881, p. 16.

26) *C. Fr. Gauss,* Werke 2 (1863), p. 308; aus dem Nachlass d. J. 1831. Vgl. *Liebisch,* Zeitschr. f. Kryst. 3 (1878), p. 28.

27) *W. H. Miller,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 1866—67, p. 75.

28) *W. H. Miller,* A treatise on crystallography, 1839, p. 14.

$$u_\lambda \cdot \sin h'h'' + u_\lambda' \cdot \sin h''h + u_\lambda'' \cdot \sin hh' = 0,$$

aus denen sich ergiebt ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$\sin h'h'' : \sin h''h : \sin hh' = (u'u'')_\alpha : (u''u)_\alpha : (uu')_\alpha.$$

Analog gilt für die Flächen h, h', h''' ($\beta = 1, 2, 3$):

$$\sin h'h''' : \sin h'''h : \sin hh' = (u'u''')_\beta : (u'''u)_\beta : (uu')_\beta.$$

Bezeichnen wir mit ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' Proportionalitätsfaktoren, so können wir nun die Koordinaten ersetzen durch die entsprechenden Indices und Axeneinheiten:

$$u_\lambda = \varrho \cdot \frac{h_\lambda}{a_\lambda}, \quad u_\lambda' = \varrho' \cdot \frac{h_\lambda'}{a_\lambda}, \quad u_\lambda'' = \varrho'' \cdot \frac{h_\lambda''}{a_\lambda}, \quad u_\lambda''' = \varrho''' \cdot \frac{h_\lambda'''}{a_\lambda}.$$

Dann drückt sich das Doppelverhältnis der vier Flächen in folgender Weise durch deren Indices aus:

$$(h\,h'\,h''\,h''') = \frac{\sin h\,h''}{\sin h'h''} : \frac{\sin h\,h'''}{\sin h'h'''} = \frac{(h\,h'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} : \frac{(h\,h''')_\beta}{(h'h''')_\beta}.$$

Das Doppelverhältnis von vier Flächen einer Zone ist also eine rationale Zahl.

Hieraus ergiebt sich, dass eine Zone bekannt ist, wenn man in ihr zwei aufeinanderfolgende Winkel kennt.

Das Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse enthält die Lösungen der folgenden fundamentalen Aufgaben (*W. H. Miller* 1839).

I. Wenn die Winkel zwischen vier Flächen h, h', h'', h''' einer Zone und die Indices von drei Flächen h, h', h'' gegeben sind, so berechnet man die Indices der vierten Fläche aus:

$$h_1''' : h_2''' : h_3''' = \mathfrak{G} h_1 - h_1' : \mathfrak{G} h_2 - h_2' : \mathfrak{G} h_3 - h_3'$$

$$\mathfrak{G} = (h\,h'\,h''\,h''') \cdot \frac{(h'h'')_\alpha}{(hh'')_\alpha}.$$

II. Wenn die Indices der vier Flächen und zwei ihrer Winkel, z. B. hh' und hh'' gegeben sind, so findet man den Winkel hh''' aus:

$$\operatorname{cotg} hh''' = (1 - \mathfrak{A}) \operatorname{cotg} hh' + \mathfrak{A} \operatorname{cotg} hh''$$

$$\mathfrak{A} = (h\,h'\,h''\,h''').$$

Zur logarithmischen Berechnung bequemer ist:

$$\operatorname{tang}\left(hh'' - \tfrac{1}{2} hh'\right) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} hh' \cdot \operatorname{tang}\left(45^0 + \Theta\right)$$

$$\operatorname{tang} \Theta = \mathfrak{A} \cdot \frac{\sin(h'h + hh'')}{\sin hh''}.$$

Zwischen den Winkeln von vier harmonischen Flächen ($\mathfrak{A} = -1$) besteht die Relation:

$$2 \operatorname{cotg} hh' - \operatorname{cotg} hh'' - \operatorname{cotg} hh''' = 0.$$

Ist $hh''' = 90^0$ und $h'h''$ bekannt, so ergiebt sich hh' aus:

$$\frac{\sin(2hh' + h'h'')}{\sin h'h''} = \frac{\mathfrak{A}+1}{\mathfrak{A}-1}.$$

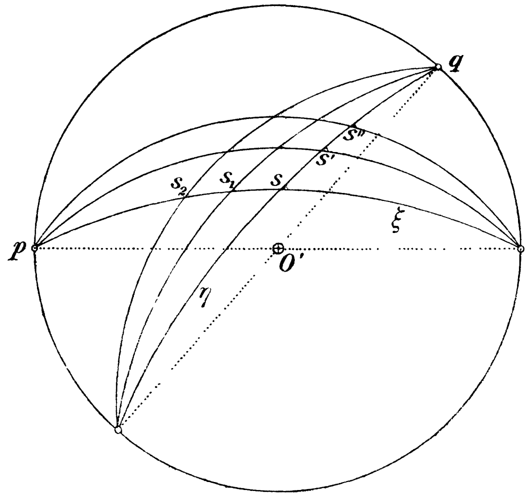

Fig. 13. Stereographische Projektion.

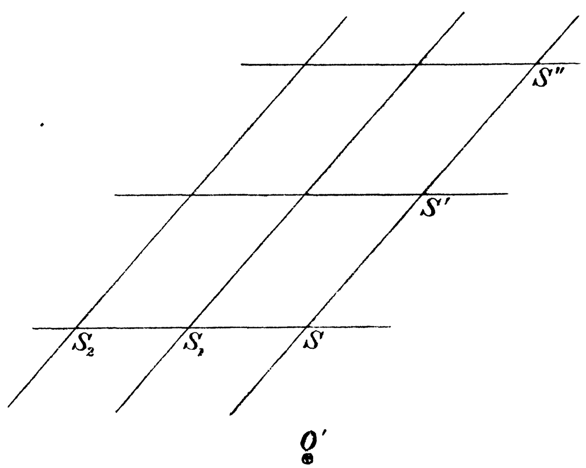

Fig. 14. Gnomonische Projektion.

Aus dem Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse folgt, dass die gnomonische Projektion einer Polfigur auf unendlich viele Arten in ein Netz von kongruenten Parallelogrammen geteilt werden kann[29]). Es seien ξ, η zwei Zonenkreise durch den Pol s (Fig. 13).

29) *G. F. H. Smith*, Min. Mag. 13 (1903), p. 314.

In ξ seien p der Pol, der gleichzeitig dem Grundkreis angehört, und s_1, s_2 zwei beliebig gewählte Pole. Die gnomonischen Projektionen von s, s_1, s_2 seien bezeichnet mit S, S_1, S_2 (Fig. 14). Dann wird das Doppelverhältnis $(s_2 s_1 s p)$ durch die Projektion auf das einfache Verhältnis der Strecken $S_2 S$ und $S_1 S$ zurückgeführt:

$$(s_2 s_1 s p) = (S_2 S_1 S \infty) = \frac{S_2 S}{S_1 S}.$$

Da sein Wert eine rationale Zahl sein muss, so können wir die Strecke $S_1 S$ zur Einheit wählen und auf der Zonenlinie die Pole S_2 markieren, für die das Verhältnis $S_2 S : S_1 S$ eine ganze Zahl ist. In analoger Weise verfahren wir in der Zone η:

$$(s'' s' s q) = (S'' S' S \infty) = \frac{S'' S}{S' S}.$$

Nun kann durch p und q je ein Büschel von Zonenkreisen gelegt werden, deren Projektionen zwei zu den Kugeldurchmessern nach p und q parallele Büschel von Zonenlinien sind. Da die Zonenlinien jedes Büschels äquidistant sind, so ergiebt sich der oben angeführte Satz.

11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices[30]. Sie ergeben sich aus der Relation zwischen den Winkeln, die von fünf Geraden oder Ebenen eingeschlossen werden:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \cos 45 & \cos 41 & \cos 42 & \cos 43 \\ \cos 15 & 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 25 & \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 35 & \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt wird und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden,

$$(2) \qquad \Delta \cos 45 = \sum_{ik=1}^{3} \Delta_{ik} \cos 4i \cos 5k.$$

Fällt 4 mit 5 zusammen, so erhält man eine Beziehung zwischen den

30) *H. de Senarmont* in: Traité de cristallographie par *W. H. Miller*, 1842, Note p. 198; *Th. Liebisch*, Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 132; 4 (1880), p. 263; Geometr. Krystallogr. 1881, p. 63—98.