

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0242

LOG Titel: 11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Achseneinheiten und Indizes

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

In ξ seien p der Pol, der gleichzeitig dem Grundkreis angehört, und s_1, s_2 zwei beliebig gewählte Pole. Die gnomonischen Projektionen von s, s_1, s_2 seien bezeichnet mit S, S_1, S_2 (Fig. 14). Dann wird das Doppelverhältnis $(s_2 s_1 s p)$ durch die Projektion auf das einfache Verhältnis der Strecken $S_2 S$ und $S_1 S$ zurückgeführt:

$$(s_2 s_1 s p) = (S_2 S_1 S \infty) = \frac{S_2 S}{S_1 S}.$$

Da sein Wert eine rationale Zahl sein muss, so können wir die Strecke $S_1 S$ zur Einheit wählen und auf der Zonenlinie die Pole S_2 markieren, für die das Verhältnis $S_2 S : S_1 S$ eine ganze Zahl ist. In analoger Weise verfahren wir in der Zone η :

$$(s'' s' s q) = (S'' S' S \infty) = \frac{S'' S}{S' S}.$$

Nun kann durch p und q je ein Büschel von Zonenkreisen gelegt werden, deren Projektionen zwei zu den Kugeldurchmessern nach p' und q parallele Büschel von Zonenlinien sind. Da die Zonenlinien jedes Büschels äquidistant sind, so ergibt sich der oben angeführte Satz.

11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices³⁰⁾. Sie ergeben sich aus der Relation zwischen den Winkeln, die von fünf Geraden oder Ebenen eingeschlossen werden:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \cos 45 & \cos 41 & \cos 42 & \cos 43 \\ \cos 15 & 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 25 & \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 35 & \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt wird und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden,

$$(2) \quad \Delta \cos 45 = \sum_{i,k=1}^3 \Delta_{ik} \cos 4i \cos 5k.$$

Fällt 4 mit 5 zusammen, so erhält man eine Beziehung zwischen den

30) *H. de Senarmont* in: *Traité de cristallographie* par *W. H. Miller*, 1842, Note p. 198; *Th. Liebisch*, *Zeitschr. f. Kryst.* 1 (1877), p. 132; 4 (1880), p. 263; *Geometr. Krystallogr.* 1881, p. 63—98.

sechs Flächenwinkeln eines vollständigen Vierflachs oder den sechs Kantenwinkeln eines vollständigen Vierkants:

$$(3) \quad \Delta = \sum_{ik=1}^3 \Delta_{ik} \cos 4i \cos 4k.$$

Es seien 1, 2, 3 die Axen π_1, π_2, π_3 und 4, 5 die Normalen μ, μ' der Flächen h, h' . Dann sind die Koordinaten dieser Flächen nach (S. 412):

$$\cos \mu \pi_i = \varrho \cdot \frac{h_i}{a_i}, \quad \cos \mu' \pi_i = \varrho' \cdot \frac{h'_i}{a_k},$$

worin ϱ und ϱ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k = \varphi(h), \quad \sum_{ik=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h'_k = \varphi(h, h')$$

ein, so ergibt sich aus (2) und (3):

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta \cos hh' &= \varrho \varrho' \cdot \varphi(h, h') \\ \Delta &= \varrho \varrho' \cdot \varphi(h) = \varrho' \varrho' \cdot \varphi(h'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir folgenden Wert für den *Cosinus eines Flächenwinkels* hh' ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Flächen h und h' :

$$(5) \quad \cos hh' = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}}.$$

Es seien 1, 2, 3 die Normalen p_1, p_2, p_3 der Axenebenen und 4, 5 die Kanten η, η' . Multipliziert man in (1) die zweite, dritte, vierte Zeile und die zweite, dritte, vierte Reihe mit

$$\sin \pi_2 \pi_3, \quad \sin \pi_3 \pi_1, \quad \sin \pi_1 \pi_2,$$

so ergibt sich:

$$(6) \quad \left| \begin{array}{cccc} \cos \eta \eta' & \sin \pi_2 \pi_3 \cos \eta v_1 & \sin \pi_3 \pi_1 \cos \eta v_2 & \sin \pi_1 \pi_2 \cos \eta v_3 \\ \sin \pi_2 \pi_3 \cos v_1 \eta' & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \sin \pi_3 \pi_1 \cos v_2 \eta' & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \sin \pi_1 \pi_2 \cos v_3 \eta' & \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{array} \right| = 0$$

oder, wenn $\cos \pi_i \pi_k$ mit c_{ik} bezeichnet wird:

$$(7) \quad \Delta \cos \eta \eta' = \sum_{ik=1}^3 c_{ik} \sin(v_i) \sin(v_k) \cos \eta v_i \cos \eta' v_k.$$

Die Koordinaten der Kanten η, η' sind nach S. 412:

$$\begin{aligned} \sin(v_i) \cos \eta v_i &= \sigma \cdot a_i \eta_i \\ \sin(v_k) \cos \eta' v_k &= \sigma' \cdot a_k \eta'_k, \end{aligned}$$

worin σ und σ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k = f(\eta), \quad \sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta'_k = f(\eta, \eta')$$

ein, so ergibt sich aus (7):

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta \cos \eta \eta' &= \sigma \sigma' \cdot f(\eta, \eta') \\ \Delta &= \sigma \sigma \cdot f(\eta) = \sigma' \sigma' \cdot f(\eta'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für den *Cosinus eines Kantenwinkels* $\eta \eta'$, ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Kanten η und η' :

$$(9) \quad \cos \eta \eta' = \frac{f(\eta, \eta')}{\sqrt{f(\eta) \cdot f(\eta')}}.$$

Die Identitäten, zu denen eine quadratische Form und die zu ihr adjungierte Form Anlass geben, lauten in dem vorliegenden Falle:

$$(10) \quad \begin{aligned} f(\eta) f(\eta') - f(\eta, \eta') f(\eta, \eta') &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdot \varphi((\eta \eta')) \\ \varphi(h) \varphi(h') - \varphi(h, h') \varphi(h, h') &= \frac{\Delta}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \cdot f((hh')). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe bildet man die Ausdrücke für den *Sinus* und die *Tangente* eines Flächenwinkels:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sin hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt{\frac{f((hh'))}{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}} \\ \tan hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \frac{\sqrt{f((hh'))}}{\varphi(h, h')} \end{aligned}$$

und eines Kantenwinkels:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sin \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \sqrt{\frac{\varphi((\eta \eta'))}{f(\eta) \cdot f(\eta')}} \\ \tan \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi((\eta \eta'))}}{f(\eta, \eta')}. \end{aligned}$$

Mit den Werten von ϱ aus (4) und σ aus (8) erhalten wir für die *Koordinaten einer Fläche* h :

$$(13) \quad \cos \mu \pi_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_i} \cdot \frac{h_i}{\sqrt{\varphi(h)}},$$

und für die *Koordinaten einer Kante* η :

$$(14) \quad \sin(\nu_i) \cos \eta \nu_i = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot a_i \eta_i}{\sqrt{f(\eta)}}.$$

12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten.

Sind h, h', h'' die Flächen einer Zone, so kann man nach (4) S. 408 die Verhältnisse der Indices von h'' darstellen durch die Indices der Flächen h, h' und eine *rationale Zahl* τ , die mit h'' variiert: