In ξ seien p der Pol, der gleichzeitig dem Grundkreis angehört, und s_1, s_2 zwei beliebig gewählte Pole. Die gnomonischen Projektionen von s, s_1, s_2 seien bezeichnet mit S, S_1, S_2 (Fig. 14). Dann wird das Doppelverhältnis $(s_2 s_1 s p)$ durch die Projektion auf das einfache Verhältnis der Strecken $S_2 S$ und $S_1 S$ zurückgeführt:

$$(s_2 s_1 s p) = (S_2 S_1 S \infty) = \frac{S_2 S}{S_1 S}.$$

Da sein Wert eine rationale Zahl sein muss, so können wir die Strecke $S_1 S$ zur Einheit wählen und auf der Zonenlinie die Pole S_2 markieren, für die das Verhältnis $S_2 S : S_1 S$ eine ganze Zahl ist. In analoger Weise verfahren wir in der Zone η:

$$(s'' s' s q) = (S'' S' S \infty) = \frac{S'' S}{S' S}.$$

Nun kann durch p und q je ein Büschel von Zonenkreisen gelegt werden, deren Projektionen zwei zu den Kugeldurchmessern nach p und q parallele Büschel von Zonenlinien sind. Da die Zonenlinien jedes Büschels äquidistant sind, so ergiebt sich der oben angeführte Satz.

11. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices[30]. Sie ergeben sich aus der Relation zwischen den Winkeln, die von fünf Geraden oder Ebenen eingeschlossen werden:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \cos 45 & \cos 41 & \cos 42 & \cos 43 \\ \cos 15 & 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 25 & \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 35 & \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 12 & \cos 13 \\ \cos 21 & 1 & \cos 23 \\ \cos 31 & \cos 32 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt wird und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden,

$$(2)\qquad \Delta \cos 45 = \sum_{ik=1}^{3} \Delta_{ik} \cos 4i \cos 5k.$$

Fällt 4 mit 5 zusammen, so erhält man eine Beziehung zwischen den

30) *H. de Senarmont* in: Traité de cristallographie par *W. H. Miller,* 1842, Note p. 198; *Th. Liebisch,* Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 132; 4 (1880), p. 263; Geometr. Krystallogr. 1881, p. 63—98.

sechs Flächenwinkeln eines vollständigen Vierflachs oder den sechs Kantenwinkeln eines vollständigen Vierkants:

$$\Delta = \sum_{ik=1}^{3} \Delta_{ik} \cos 4i \cos 4k. \tag{3}$$

Es seien 1, 2, 3 die Axen π_1, π_2, π_3 und 4, 5 die Normalen μ, μ' der Flächen h, h'. Dann sind die Koordinaten dieser Flächen nach (S. 412):

$$\cos \mu\pi_i = \varrho \cdot \frac{h_i}{a_i}, \quad \cos \mu'\pi_i = \varrho' \cdot \frac{h_k'}{a_k},$$

worin ϱ und ϱ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^{3} \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k = \varphi(h), \quad \sum_{ik=1}^{3} \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k' = \varphi(h, h')$$

ein, so ergiebt sich aus (2) und (3):

$$\begin{aligned} \Delta \cos hh' &= \varrho\varrho' \cdot \varphi(h, h') \\ \Delta &= \varrho\varrho \cdot \varphi(h) = \varrho'\varrho' \cdot \varphi(h'). \end{aligned} \tag{4}$$

Demnach erhalten wir folgenden Wert für den *Cosinus eines Flächenwinkels hh'* ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Flächen h und h':

$$\cos hh' = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}}. \tag{5}$$

Es seien 1, 2, 3 die Normalen p_1, p_2, p_3 der Axenebenen und 4, 5 die Kanten η, η'. Multipliziert man in (1) die zweite, dritte, vierte Zeile und die zweite, dritte, vierte Reihe mit

$$\sin \pi_2\pi_3, \quad \sin \pi_3\pi_1, \quad \sin \pi_1\pi_2,$$

so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} \cos \eta\eta' & \sin\pi_2\pi_3 \cos\eta\nu_1 & \sin\pi_3\pi_1 \cos\eta\nu_2 & \sin\pi_1\pi_2 \cos\eta\nu_3 \\ \sin\pi_2\pi_3 \cos\nu_1\eta' & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \sin\pi_3\pi_1 \cos\nu_2\eta' & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \sin\pi_1\pi_2 \cos\nu_3\eta' & \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

oder, wenn $\cos \pi_i\pi_k$ mit c_{ik} bezeichnet wird:

$$\Delta \cos \eta\eta' = \sum_{ik=1}^{3} c_{ik} \sin(\nu_i) \sin(\nu_k) \cos \eta\nu_i \cos \eta'\nu_k. \tag{7}$$

Die Koordinaten der Kanten η, η' sind nach S. 412:

$$\begin{aligned} \sin(\nu_i) \cos \eta\nu_i &= \sigma \cdot a_i\eta_i \\ \sin(\nu_k) \cos \eta'\nu_k &= \sigma' \cdot a_k\eta_k', \end{aligned}$$

worin σ und σ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^{3} c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k = f(\eta), \quad \sum_{ik=1}^{3} c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k' = f(\eta, \eta')$$

ein, so ergiebt sich aus (7):

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Delta \cos \eta\eta' &= \sigma\sigma' \cdot f(\eta, \eta') \\ \Delta = \sigma\sigma \cdot f(\eta) &= \sigma'\sigma' \cdot f(\eta'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für den *Cosinus eines Kantenwinkels* $\eta\eta'$, ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Kanten η und η':

$$(9) \qquad \cos \eta\eta' = \frac{f(\eta, \eta')}{\sqrt{f(\eta) \cdot f(\eta')}}.$$

Die Identitäten, zu denen eine quadratische Form und die zu ihr adjungierte Form Anlass geben, lauten in dem vorliegenden Falle:

$$(10) \qquad \begin{aligned} f(\eta) f(\eta') - f(\eta, \eta') f(\eta, \eta') &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdot \varphi((\eta\eta')) \\ \varphi(h) \varphi(h') - \varphi(h, h') \varphi(h, h') &= \frac{\Delta}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \cdot f((hh')). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hülfe bildet man die Ausdrücke für den *Sinus* und die *Tangente* eines Flächenwinkels:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \sin hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt{\frac{f((hh'))}{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}} \\ \tan hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \frac{\sqrt{f((hh'))}}{\varphi(h, h')} \end{aligned}$$

und eines Kantenwinkels:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \sin \eta\eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \sqrt{\frac{\varphi((\eta\eta'))}{f(\eta) \cdot f(\eta')}} \\ \tan \eta\eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi((\eta\eta'))}}{f(\eta, \eta')}. \end{aligned}$$

Mit den Werten von ϱ aus (4) und σ aus (8) erhalten wir für die *Koordinaten einer Fläche* h:

$$(13) \qquad \cos \mu\pi_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_i} \cdot \frac{h_i}{\sqrt{\varphi(h)}},$$

und für die *Koordinaten einer Kante* η:

$$(14) \qquad \sin(\nu_i) \cos \eta\nu_i = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot a_i \eta_i}{\sqrt{f(\eta)}}.$$

12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten. Sind h, h', h'' die Flächen einer Zone, so kann man nach (4) S. 408 die Verhältnisse der Indices von h'' darstellen durch die Indices der Flächen h, h' und eine *rationale Zahl* τ, die mit h'' variiert: