worin σ und σ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^{3} c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k = f(\eta), \quad \sum_{ik=1}^{3} c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k' = f(\eta, \eta')$$

ein, so ergiebt sich aus (7):

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Delta \cos \eta\eta' &= \sigma\sigma' \cdot f(\eta, \eta') \\ \Delta = \sigma\sigma \cdot f(\eta) &= \sigma'\sigma' \cdot f(\eta'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für den *Cosinus eines Kantenwinkels* $\eta\eta'$, ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Kanten η und η':

$$(9) \qquad \cos \eta\eta' = \frac{f(\eta, \eta')}{\sqrt{f(\eta) \cdot f(\eta')}}.$$

Die Identitäten, zu denen eine quadratische Form und die zu ihr adjungierte Form Anlass geben, lauten in dem vorliegenden Falle:

$$(10) \qquad \begin{aligned} f(\eta) f(\eta') - f(\eta, \eta') f(\eta, \eta') &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdot \varphi((\eta\eta')) \\ \varphi(h) \varphi(h') - \varphi(h, h') \varphi(h, h') &= \frac{\Delta}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \cdot f((hh')). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hülfe bildet man die Ausdrücke für den *Sinus* und die *Tangente* eines Flächenwinkels:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \sin hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt{\frac{f((hh'))}{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}} \\ \tan hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \frac{\sqrt{f((hh'))}}{\varphi(h, h')} \end{aligned}$$

und eines Kantenwinkels:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \sin \eta\eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \sqrt{\frac{\varphi((\eta\eta'))}{f(\eta) \cdot f(\eta')}} \\ \tan \eta\eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi((\eta\eta'))}}{f(\eta, \eta')}. \end{aligned}$$

Mit den Werten von ϱ aus (4) und σ aus (8) erhalten wir für die *Koordinaten einer Fläche* h:

$$(13) \qquad \cos \mu\pi_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_i} \cdot \frac{h_i}{\sqrt{\varphi(h)}},$$

und für die *Koordinaten einer Kante* η:

$$(14) \qquad \sin(\nu_i) \cos \eta\nu_i = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot a_i \eta_i}{\sqrt{f(\eta)}}.$$

12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten. Sind h, h', h'' die Flächen einer Zone, so kann man nach (4) S. 408 die Verhältnisse der Indices von h'' darstellen durch die Indices der Flächen h, h' und eine *rationale Zahl* τ, die mit h'' variiert:

$$(15)\qquad \begin{aligned} h_1'' : h_2'' : h_3'' &= h_1 + \tau h_1' : h_2 + \tau h_2' : h_3 + \tau h_3' \\ \tau &= -\frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Gehen wir zu den Koordinaten der Fläche über, so ergiebt sich mit Rücksicht auf S. 415:

$$u_1'' : u_2'' : u_3'' = u_1 + tu_1' : u_2 + tu_2' : u_3 + tu_3'$$

$$t = \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \tau = -\frac{(u\,u'')_\alpha}{(u'u'')_\alpha} = -\frac{\sin h\,h''}{\sin h'h''}.$$

t ist das *negative Teilungsverhältnis*, das die Lage der Fläche h'' in der Zone der Flächen h, h' bestimmt durch Angabe des Sinusverhältnisses, nach welchem h'' den Winkel hh' teilt. Wir können jetzt t und τ auch ausdrücken durch die Indices der Flächen h, h', h'' und die Axenelemente, denn nach (4) ist[31]):

$$(16)\qquad \begin{aligned} t &= -\frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}} \\ \tau &= -\frac{\sin hh''}{\sin h'h''} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h)}{\varphi(h')}}. \end{aligned}$$

In analoger Weise lassen sich die Indices einer Kante η'', die mit η und η' in einem Büschel liegt, darstellen durch die Indices von η, η' und eine rationale Zahl d:

$$(17)\qquad \begin{aligned} \eta_1'' : \eta_2'' : \eta_3'' &= \eta_1 + d\eta_1' : \eta_2 + d\eta_2' : \eta_3 + d\eta_3' \\ d &= -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Koordinaten dieser Kante nach S. 412, 415:

$$\xi_1'' : \xi_2'' : \xi_3'' = \xi_1 + \delta\xi_1' : \xi_2 + \delta\xi_2' : \xi_3 + \delta\xi_3'$$

$$\delta = \frac{\sigma}{\sigma'} \cdot d = -\frac{(\xi\xi'')_\alpha}{(\xi'\xi'')_\alpha} = -\frac{\sin\eta\eta''}{\sin\eta'\eta''},$$

worin nach (8):

$$(18)\qquad \delta = -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta')}{f(\eta)}}, \quad d = -\frac{\sin\eta\eta''}{\sin\eta'\eta''} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta)}{f(\eta')}}.$$

Sind gegeben die Axenelemente des Krystalls, die Indices der Flächen h, h' und deren Winkel, so findet man in der *Zone* dieser Flächen diejenige Fläche h'', für welche τ den Wert ± 1 hat, aus:

$$(19)\qquad h_1'' : h_2'' : h_3'' = h_1 \pm h_1' : h_2 \pm h_2' : h_3 \pm h_3'$$

und den Winkel zwischen h'' und h oder h' aus:

$$(20)\qquad \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh' + h'h''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh''}{\sin h'h + hh''} = \mp\sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}}.$$

---

31) *Th. Liebisch,* Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 149; Geom. Kryst. 1881, p. 32, 75, 77, 85.

Zur logarithmischen Berechnung führt man den Hülfswinkel Θ ein durch:

$$\tan\Theta = \mp\sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}}\,.$$

Dann ergiebt sich der Winkel $h'h''$ aus:

$$\tan\left(h'h'' - \tfrac{1}{2}h'h\right) = \tan\tfrac{1}{2}h'h \cdot \tan\left(\Theta + 45^0\right).$$

Ein analoger Satz gilt für Kantenbüschel.

Auf die Beziehungen (19) und (20) gründet sich die *krystallographische Entwicklung* von Flächen oder Kanten eines Büschels aus zwei gegebenen Flächen oder Kanten durch fortgesetzte Addition gleichstelliger Indices[32]). Sie lässt sich veranschaulichen mit Hülfe der Raumgitterstruktur (Nr. **3**). Denn in einem Raumgitter[33]) ist der Abstand $\mathfrak{P}$ benachbarter Punkte auf einer Punktreihe η gegeben durch:

$$\mathfrak{P} = \sqrt{f(\eta)} \tag{21}$$

und der Flächeninhalt $\mathfrak{S}$ des Elementarparallelogramms einer Netzebene η durch:

$$\mathfrak{S} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\varphi(h)}\,. \tag{22}$$

13. Flächendichte von Netzebenen. Der Flächeninhalt $\mathfrak{S}$ und der Abstand der Ebene h von der nächsten benachbarten Netzebene sind umgekehrt proportional; denn das Produkt beider ist das konstante Volumen $\mathfrak{V}$ des Elementarparallelepipeds des Raumgitters:

$$\mathfrak{V} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\Delta}\,. \tag{23}$$

Der Abstand benachbarter Netzebenen ist um so grösser, je dichter sie mit Gitterpunkten besetzt sind; die Flächendichte $\mathfrak{r}$ ist gleich dem reziproken Werte des Flächeninhaltes $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{S} = 1\,. \tag{24}$$

Nach einer Hypothese von *A. Bravais* und *E. Mallard* treten die

---

32) *J. F. Chr. Hessel,* Krystallometrie 1831, p. 210; *H. Grassmann,* Ableitung der Krystallgestalten aus dem allg. Gesetz der Krystallbildung, Progr. Ottoschule in Stettin 1839; Ges. math. u. phys. Werke 2^2 (1902), p. 115; *Fr. A. Quenstedt,* Beitr. z. rechn. Kryst. 1848; Grundr. d. best. u. rechn. Kryst. 1873; *E. Weiss,* Über die kryst. Entwicklung des Quarzsystems u. über kryst. Entw. im allgemeinen, Abh. naturf. Ges. Halle 5 (1860); *G. Junghann,* Ann. Phys. Chem. 152 (1874), p. 68; *V. Goldschmidt,* Zeitschr. f. Kryst. 28 (1897), p. 1, 414; 29 (1898), p. 38; *E. v. Fedorow,* Zeitschr. f. Kryst. 35 (1902), p. 25; *H. Baumhauer,* Zeitschr. f. Kryst. 38 (1904), p. 628; *E. Sommerfeldt,* Zentralblatt f. Min. 1903, p. 537; 1905, p. 427.

33) *A. Bravais,* J. éc. polyt. 19 (1850), cah. 33; 20 (1851) cah. 34; wieder abgedruckt in: Études cristallogr. 1866; *E. Mallard,* Traité de crist. 1 (1879), p. 12, 298.