

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0243

LOG Titel: 12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

worin σ und σ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k = f(\eta), \quad \sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta'_k = f(\eta, \eta')$$

ein, so ergibt sich aus (7):

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta \cos \eta \eta' &= \sigma \sigma' \cdot f(\eta, \eta') \\ \Delta &= \sigma \sigma \cdot f(\eta) = \sigma' \sigma' \cdot f(\eta'). \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für den *Cosinus eines Kantenwinkels* $\eta \eta'$, ausgedrückt durch die Axenelemente und die Indices der Kanten η und η' :

$$(9) \quad \cos \eta \eta' = \frac{f(\eta, \eta')}{\sqrt{f(\eta) \cdot f(\eta')}}.$$

Die Identitäten, zu denen eine quadratische Form und die zu ihr adjungierte Form Anlass geben, lauten in dem vorliegenden Falle:

$$(10) \quad \begin{aligned} f(\eta) f(\eta') - f(\eta, \eta') f(\eta, \eta') &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdot \varphi((\eta \eta')) \\ \varphi(h) \varphi(h') - \varphi(h, h') \varphi(h, h') &= \frac{\Delta}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \cdot f((hh')). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe bildet man die Ausdrücke für den *Sinus* und die *Tangente* eines Flächenwinkels:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sin hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt{\frac{f((hh'))}{\varphi(h) \cdot \varphi(h')}} \\ \tan hh' &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1 a_2 a_3} \cdot \frac{\sqrt{f((hh'))}}{\varphi(h, h')} \end{aligned}$$

und eines Kantenwinkels:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sin \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \sqrt{\frac{\varphi((\eta \eta'))}{f(\eta) \cdot f(\eta')}} \\ \tan \eta \eta' &= a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{\sqrt{\varphi((\eta \eta'))}}{f(\eta, \eta')}. \end{aligned}$$

Mit den Werten von ϱ aus (4) und σ aus (8) erhalten wir für die *Koordinaten einer Fläche* h :

$$(13) \quad \cos \mu \pi_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_i} \cdot \frac{h_i}{\sqrt{\varphi(h)}},$$

und für die *Koordinaten einer Kante* η :

$$(14) \quad \sin(\nu_i) \cos \eta \nu_i = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot a_i \eta_i}{\sqrt{f(\eta)}}.$$

12. Eigenschaften der Büschel von Flächen oder Kanten.

Sind h, h', h'' die Flächen einer Zone, so kann man nach (4) S. 408 die Verhältnisse der Indices von h'' darstellen durch die Indices der Flächen h, h' und eine *rationale Zahl* τ , die mit h'' variiert:

$$(15) \quad \begin{aligned} h_1'' : h_2'' : h_3'' &= h_1 + \tau h_1' : h_2 + \tau h_2' : h_3 + \tau h_3' \\ \tau &= -\frac{(hh'')_\alpha}{(h'h'')_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Gehen wir zu den Koordinaten der Fläche über, so ergibt sich mit Rücksicht auf S. 415:

$$\begin{aligned} u_1'' : u_2'' : u_3'' &= u_1 + tu_1' : u_2 + tu_2' : u_3 + tu_3' \\ t &= \frac{\rho}{\rho'} \cdot \tau = -\frac{(u u'')_\alpha}{(u' u'')_\alpha} = -\frac{\sin h h''}{\sin h' h''}. \end{aligned}$$

t ist das *negative Teilungsverhältnis*, das die Lage der Fläche h'' in der Zone der Flächen h, h' bestimmt durch Angabe des Sinusverhältnisses, nach welchem h'' den Winkel hh' teilt. Wir können jetzt t und τ auch ausdrücken durch die Indices der Flächen h, h', h'' und die Axenelemente, denn nach (4) ist³¹⁾:

$$(16) \quad \begin{aligned} t &= -\frac{(hh')_\alpha}{(h'h')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}} \\ \tau &= -\frac{\sin hh''}{\sin h'h''} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(h'')}{\varphi(h)}}. \end{aligned}$$

In analoger Weise lassen sich die Indices einer Kante η'' , die mit η und η' in einem Büschel liegt, darstellen durch die Indices von η, η' und eine rationale Zahl d :

$$(17) \quad \begin{aligned} \eta_1'' : \eta_2'' : \eta_3'' &= \eta_1 + d\eta_1' : \eta_2 + d\eta_2' : \eta_3 + d\eta_3' \\ d &= -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Koordinaten dieser Kante nach S. 412, 415:

$$\begin{aligned} \xi_1'' : \xi_2'' : \xi_3'' &= \xi_1 + \delta\xi_1' : \xi_2 + \delta\xi_2' : \xi_3 + \delta\xi_3' \\ \delta &= \frac{\sigma}{\sigma'} \cdot d = -\frac{(\xi\xi'')_\alpha}{(\xi'\xi'')_\alpha} = -\frac{\sin \eta \eta''}{\sin \eta' \eta''}, \end{aligned}$$

worin nach (8):

$$(18) \quad \delta = -\frac{(\eta\eta'')_\alpha}{(\eta'\eta'')_\alpha} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta'')}{f(\eta)}}, \quad d = -\frac{\sin \eta \eta''}{\sin \eta' \eta''} \cdot \sqrt{\frac{f(\eta'')}{f(\eta)}}.$$

Sind gegeben die Axenelemente des Krystals, die Indices der Flächen h, h' und deren Winkel, so findet man in der Zone dieser Flächen diejenige Fläche h'' , für welche τ den Wert ± 1 hat, aus:

$$(19) \quad h_1'' : h_2'' : h_3'' = h_1 \pm h_1' : h_2 \pm h_2' : h_3 \pm h_3'$$

und den Winkel zwischen h'' und h oder h' aus:

$$(20) \quad \frac{\sin hh''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh' + h'h''}{\sin h'h''} = \frac{\sin hh''}{\sin h'h + hh''} = \mp \sqrt{\frac{\varphi(h'')}{\varphi(h)}}.$$

31) Th. Liebisch, Zeitschr. f. Kryst. 1 (1877), p. 149; Geom. Kryst. 1881, p. 32, 75, 77, 85.

Zur logarithmischen Berechnung führt man den Hülfswinkel Θ ein durch:

$$\tan \Theta = \mp \sqrt{\frac{\varphi(h')}{\varphi(h)}}.$$

Dann ergibt sich der Winkel $h'h''$ aus:

$$\tan(h'h'' - \frac{1}{2}h'h) = \tan \frac{1}{2}h'h \cdot \tan(\Theta + 45^\circ).$$

Ein analoger Satz gilt für Kantenbüschel.

Auf die Beziehungen (19) und (20) gründet sich die *krystallographische Entwicklung* von Flächen oder Kanten eines Büschels aus zwei gegebenen Flächen oder Kanten durch fortgesetzte Addition gleichstelliger Indices³²⁾. Sie lässt sich veranschaulichen mit Hilfe der Raumgitterstruktur (Nr. 3). Denn in einem Raumgitter³³⁾ ist der Abstand \mathfrak{B} benachbarter Punkte auf einer Punktreihe η gegeben durch:

$$(21) \quad \mathfrak{B} = \sqrt{f(\eta)}$$

und der Flächeninhalt \mathfrak{S} des Elementarparallelogramms einer Netzebene η durch:

$$(22) \quad \mathfrak{S} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\varphi(h)}.$$

13. Flächendichte von Netzebenen. Der Flächeninhalt \mathfrak{S} und der Abstand der Ebene h von der nächsten benachbarten Netzebene sind umgekehrt proportional; denn das Produkt beider ist das konstante Volumen \mathfrak{V} des Elementarparallelepipedes des Raumgitters:

$$(23) \quad \mathfrak{V} = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\Delta}.$$

Der Abstand benachbarter Netzebenen ist um so grösser, je dichter sie mit Gitterpunkten besetzt sind; die Flächendichte r ist gleich dem reziproken Werte des Flächeninhaltes \mathfrak{S} :

$$(24) \quad r \cdot \mathfrak{S} = 1.$$

Nach einer Hypothese von *A. Bravais* und *E. Mallard* treten die

32) *J. F. Chr. Hessel*, Krystallogometrie 1831, p. 210; *H. Grassmann*, Ableitung der Krystallgestalten aus dem allg. Gesetz der Krystallbildung, Progr. Otto-schule in Stettin 1839; Ges. math. u. phys. Werke 2² (1902), p. 115; *Fr. A. Quenstedt*, Beitr. z. rechn. Kryst. 1848; Grundr. d. best. u. rechn. Kryst. 1873; *E. Weiss*, Über die kryst. Entwicklung des Quarzsystems u. über kryst. Entw. im allgemeinen, Abh. naturf. Ges. Halle 5 (1860); *G. Junghann*, Ann. Phys. Chem. 152 (1874), p. 68; *V. Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 28 (1897), p. 1, 414; 29 (1898), p. 38; *E. v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 35 (1902), p. 25; *H. Baumhauer*, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1904), p. 628; *E. Sommerfeldt*, Zentralblatt f. Min. 1903, p. 537; 1905, p. 427.

33) *A. Bravais*, J. éc. polyt. 19 (1850), cah. 33; 20 (1851) cah. 34; wieder abgedruckt in: Études cristallogr. 1866; *E. Mallard*, Traité de crist. 1 (1879), p. 12, 298.