Nun ist nach (27):

$$\cos \varkappa\psi_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{f(\psi_1)\cdot\varphi(\varkappa)}}\cdot|\varkappa f^2 f^3|$$

u. s. w., demnach[35]):

$$b_1 : b_2 : b_3 = \frac{\sqrt{f(\psi_1)}}{|\varkappa f^2 f^3|} : \frac{\sqrt{f(\psi_2)}}{|f^1 \varkappa f^2|} : \frac{\sqrt{f(\psi_3)}}{|f^1 f^2 \varkappa|}. \tag{28}$$

15. Aufeinander senkrechte Flächen und Kanten. Besitzt ein Krystall *zwei aufeinander senkrechte Flächenrichtungen* h, h', so besteht nach (5) die Gleichung:

$$\sum_{ik=1}^{3} \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k' = 0, \tag{29}$$

d. h. die sechs Grössen:

$$z_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k}$$

sind verbunden durch eine lineare homogene Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten r_{ik}:

$$\sum_{ik=1}^{3} z_{ik} r_{ik} = 0 \tag{30}$$

$$2r_{ik} = h_i h_k' + h_k h_i'.$$

Umgekehrt ist das Bestehen einer solchen Relation zwar eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von zwei aufeinander senkrechten Flächenrichtungen, denn die Zahlen r_{ik} sind der *Bedingung* unterworfen, dass die aus ihnen gebildete Determinante verschwindet und die den Koeffizienten r_{11}, r_{22}, r_{33} adjungierten Unterdeterminanten vollständige Quadrate sind. Ein analoger Satz gilt für zwei aufeinander senkrechte Kanten[36]).

16. Krystallberechnung. Um die zur Beschreibung eines Krystallpolyeders notwendigen und ausreichenden Grössen zu gewinnen, muss ein der Symmetrie des Krystalls entsprechendes Axensystem gewählt werden. Dann reduziert sich die Beschreibung auf die Angabe der Symmetrieeigenschaften, der Axenelemente und der Indices je einer Fläche der vorhandenen einfachen Krystallformen. Im Folgenden sind zur Erläuterung der Berechnung nur trikline Krystalle berück-

35) *A. T. Kupffer,* Handb. d. rechn. Krystallonomie 1831, p. 494.; *H. de Senarmont* in: Traité de crist. par *W. H. Miller,* 1842, Note p. 198.

36) *H. St. Smith,* Proc. Math. Soc. London 8 (1877), p. 83. Hier sind auch die Fälle, in denen die Grössen z_{ik} durch zwei, drei, vier oder fünf homogene Gleichungen des ersten Grades mit ganzzahligen Koefficienten verknüpft sind, ausführlich behandelt.

sichtigt, in denen zu Axen irgend drei in einer Ecke zusammenstossende Kantenrichtungen gewählt werden können[37]).

Da es sich bei der geometrischen Untersuchung der Krystallpolyeder um Beziehungen zwischen Axenelementen, Indices und Winkeln handelt, so ordnen sich die Aufgaben der Krystallberechnung in drei Gruppen.

17. Berechnung der Axenelemente. Zur Berechnung der fünf *Axenelemente* eines triklinen Krystalls: der drei Winkel zwischen den Axen und der beiden Verhältnisse der Axeneinheiten, sind mindestens fünf von einander unabhängige Winkel zu messen. Hierzu können benutzt werden:

A. vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, oder

B. fünf Flächen, von denen die eine zugleich eine der Diagonalflächen des vollständigen Vierflachs ist, das von den anderen bestimmt wird.

Die *einfachsten* Fälle (A) und (B) liegen vor, wenn drei dieser Flächen, die eine Ecke bilden, zu Axenebenen p_1, p_2, p_3 gewählt werden[38]). Dann ergeben sich die Winkel zwischen den Axen π_1, π_2, π_3 aus dem sphärischen Dreieck der Pole ν_1, ν_2, ν_3 der Axenebenen (Fig. 12).

(A) Werden nun die Verhältnisse der Axeneinheiten $a_1 : a_2 : a_3$ dadurch definiert, dass einer Fläche h, welche die Axen in endlichen Entfernungen schneidet, die Indices h_1, h_2, h_3 erteilt werden, so dienen zur Berechnung jener Verhältnisse nach (2) S. 414:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\sin \mu \nu_3 \nu_1}{\sin \mu \nu_3 \nu_2}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \mu \nu_1 \nu_2}{\sin \mu \nu_1 \nu_3}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\sin \mu \nu_2 \nu_3}{\sin \mu \nu_2 \nu_1}.$$

Sind z. B. die Winkel $\mu\nu_2$ und $\mu\nu_3$ gemessen, so findet man aus dem Dreieck $\mu\nu_2\nu_3$, dessen Seiten gegeben sind, die Winkel $\mu\nu_2\nu_3$ und $\mu\nu_3\nu_2$. Daher sind auch die Winkel $\mu\nu_2\nu_1$ und $\mu\nu_3\nu_1$ bekannt.

(B) Werden die Axeneinheiten definiert mit Hülfe von zwei Flächen, von denen jede in die Zone einer Axe fällt, so benutzt man zu ihrer Berechnung die Relationen (1) auf S. 414. Es ist z. B. für eine Fläche t_1 aus der Zone der Axe π_1 mit den Indices $0 h_2 h_3$ und dem Pol τ_1 (Fig. 12):

$$\frac{h_2 a_3}{h_3 a_2} = \frac{\cos \tau_1 \pi_2}{\cos \tau_2 \pi_3} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_3 \nu_1}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_2 \nu_1} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin (\nu_3)}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin (\nu_2)}$$

oder

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \pi_3 \pi_1}{\sin \pi_1 \pi_2} \cdot \frac{\sin \nu_2 \tau_1}{\sin [\nu_2 \nu_3 - \nu_2 \tau_1]}.$$

---

37) Über die Vereinfachungen, die in der Berechnung höher symmetrischer Krystalle eintreten, geben die Lehrbücher der Krystallographie Auskunft.

38) *W. H. Miller,* Treatise 1839, chapt. VII.