sichtigt, in denen zu Axen irgend drei in einer Ecke zusammenstossende Kantenrichtungen gewählt werden können[37]).

Da es sich bei der geometrischen Untersuchung der Krystallpolyeder um Beziehungen zwischen Axenelementen, Indices und Winkeln handelt, so ordnen sich die Aufgaben der Krystallberechnung in drei Gruppen.

17. Berechnung der Axenelemente. Zur Berechnung der fünf *Axenelemente* eines triklinen Krystalls: der drei Winkel zwischen den Axen und der beiden Verhältnisse der Axeneinheiten, sind mindestens fünf von einander unabhängige Winkel zu messen. Hierzu können benutzt werden:

A. vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, oder

B. fünf Flächen, von denen die eine zugleich eine der Diagonalflächen des vollständigen Vierflachs ist, das von den anderen bestimmt wird.

Die *einfachsten* Fälle (A) und (B) liegen vor, wenn drei dieser Flächen, die eine Ecke bilden, zu Axenebenen p_1, p_2, p_3 gewählt werden[38]). Dann ergeben sich die Winkel zwischen den Axen π_1, π_2, π_3 aus dem sphärischen Dreieck der Pole ν_1, ν_2, ν_3 der Axenebenen (Fig. 12).

(A) Werden nun die Verhältnisse der Axeneinheiten $a_1 : a_2 : a_3$ dadurch definiert, dass einer Fläche h, welche die Axen in endlichen Entfernungen schneidet, die Indices h_1, h_2, h_3 erteilt werden, so dienen zur Berechnung jener Verhältnisse nach (2) S. 414:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\sin \mu \nu_3 \nu_1}{\sin \mu \nu_3 \nu_2}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \mu \nu_1 \nu_2}{\sin \mu \nu_1 \nu_3}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\sin \mu \nu_2 \nu_3}{\sin \mu \nu_2 \nu_1}.$$

Sind z. B. die Winkel $\mu\nu_2$ und $\mu\nu_3$ gemessen, so findet man aus dem Dreieck $\mu\nu_2\nu_3$, dessen Seiten gegeben sind, die Winkel $\mu\nu_2\nu_3$ und $\mu\nu_3\nu_2$. Daher sind auch die Winkel $\mu\nu_2\nu_1$ und $\mu\nu_3\nu_1$ bekannt.

(B) Werden die Axeneinheiten definiert mit Hülfe von zwei Flächen, von denen jede in die Zone einer Axe fällt, so benutzt man zu ihrer Berechnung die Relationen (1) auf S. 414. Es ist z. B. für eine Fläche t_1 aus der Zone der Axe π_1 mit den Indices $0 h_2 h_3$ und dem Pol τ_1 (Fig. 12):

$$\frac{h_2 a_3}{h_3 a_2} = \frac{\cos \tau_1 \pi_2}{\cos \tau_2 \pi_3} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_3 \nu_1}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin \tau_1 \nu_2 \nu_1} = \frac{\sin \nu_3 \tau_1 \cdot \sin (\nu_3)}{\sin \nu_2 \tau_1 \cdot \sin (\nu_2)}$$

oder

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{\sin \pi_3 \pi_1}{\sin \pi_1 \pi_2} \cdot \frac{\sin \nu_2 \tau_1}{\sin [\nu_2 \nu_3 - \nu_2 \tau_1]}.$$

---

37) Über die Vereinfachungen, die in der Berechnung höher symmetrischer Krystalle eintreten, geben die Lehrbücher der Krystallographie Auskunft.

38) *W. H. Miller,* Treatise 1839, chapt. VII.

Diese Beziehung und die analogen Gleichungen ergeben sich auch aus dem allgemeinen Ausdruck (11) S. 419 für die Tangente eines Flächenwinkels; zugleich ist ersichtlich, dass durch Auflösung von (11) *einwertige* Verhältnisse der Axeneinheiten nur in dem hier vorliegenden besonderen Falle zu erhalten sind.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem geht die letzte Formel über in:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \tan \tau_1 \nu_2 .$$

A. Die Axenelemente eines triklinen Krystalls können allgemein dadurch definiert werden, dass vier Flächen, von denen nicht drei einer Zone angehören, beliebige ganze Zahlen als Indices erhalten; dabei ist zu beachten, dass die Determinante der Indices von drei Flächen in ihrem Vorzeichen mit dem Drehungssinn der von den Flächennormalen gebildeten Ecke übereinstimmen muss[39]). Hierdurch sind, da es nur auf die Verhältnisse der Indices ankommt, acht Grössen willkürlich gewählt. In der That erfordern die Richtungen der drei Axen und die Verhältnisse der Axeneinheiten zu ihrer Bestimmung je zwei Grössen.

Sind von den sechs Winkeln zwischen vier derartigen Flächen fünf gegeben, so liefert die Relation (3) S. 418 zur Bestimmung des sechsten Winkels eine quadratische Gleichung; die Entscheidung über die beiden möglichen Fälle ist erst mit Hülfe des sechsten Winkels herbeizuführen.

Zur Berechnung der Axenelemente aus den sechs Winkeln dient nun der Ausdruck (5) S. 418 für den Cosinus eines Flächenwinkels, der mit Benutzung der Bezeichnung z_{ik} (S. 423) lautet:

$$\cos hh = \frac{\sum_{i,k=1}^{3} z_{ik} h_i h_k'}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} z_{ik} h_i h_k \cdot \sum_{i,k=1}^{3} z_{ik} h_i' h_k'}} .$$

Man findet also zunächst die sechs Grössen z_{ik}, auf deren Verhältnisse es allein ankommt, und darauf aus ihnen die Axenelemente[40]).

Diese Berechnung ist von *B. Hecht* allgemein in der Weise durch-

39) *B. Hecht,* N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 5 (1887), p. 587, 589, 590.

40) Eine ausführliche Darstellung spezieller Fälle gab *H. Dufet,* Bull. soc. franç. de min. 26 (1903), p. 190.

geführt worden, dass die Winkel und die Indices der Ausgangsflächen in den Endformeln symmetrisch auftreten[41]).

M. Websky hat gezeigt, wie der Fall A mit Hülfe der Gesetze der Zonen und der rationalen Doppelverhältnisse trigonometrisch auf (B) zurückgeführt werden kann[42]).

B. Das soeben erwähnte Verfahren von *M. Websky* gestattet auch in diesem Falle, auf trigonometrischem Wege die Bedingungen von (B) zu erfüllen.

18. Berechnung der Indices. Zur Berechnung der *Indices* einer Krystallfläche ist die Kenntnis der Axenelemente nicht erforderlich in den folgenden Fällen:

Liegt eine Fläche h in zwei bekannten Zonen η, η', so ergeben sich ihre Indices nach (5) S. 408 aus:

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\eta\eta')_1 : (\eta\eta')_2 : (\eta\eta')_3 .$$

Fällt eine Fläche h''' in die Zone von drei bekannten Flächen, an die sie durch einen gemessenen Winkel angeschlossen ist, so ist das Doppelverhältnis der vier Flächen bekannt. Daher gelten die Beziehungen unter I, S. 415:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \mathfrak{G} h_1' - h_1'' : \mathfrak{G} h_2' - h_2'' : \mathfrak{G} h_3' - h_3'',$$

$$\mathfrak{G} = (h'h''h'''h) \cdot \frac{(h''h''')_\alpha}{(h'h''')_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Auf die Benutzung dieser Beziehungen lässt sich auch die Lösung der Aufgabe zurückführen, die Indices einer Fläche h zu bestimmen, die mit den bekannten Flächen h', h'', h''' in einer Zone liegt und mit einer dieser Zone nicht angehörenden Fläche k einen gegebenen Winkel einschliesst[43]). Denn man findet z. B. den Winkel hh' mit Hülfe der Relation:

$$\cos kh \sin h'h'' + \cos kh' \sin h''h + \cos kh'' \sin hh' = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{L} \sin hh' + \mathfrak{M} \cos hh' = \mathfrak{N},$$

worin:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \cos kh'' - \cos kh' \cos h''h', \\ \mathfrak{M} &= \cos kh' \sin h''h', \\ \mathfrak{N} &= \cos kh \sin h''h' \end{aligned}$$

41) *B. Hecht,* N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 7 (1891), p. 488; Anleitung zur Krystallberechnung 1893, p. 15—17.

42) *M. Websky,* Monatsber. Berlin. Akad. 1879, p. 339; *Th. Liebisch,* Geom. Kryst. 1881, p. 161.

43) *Th. Liebisch,* Geometr. Kryst. 1881, p. 176.