

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0251

LOG Titel: 20. Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der Achsenelemente

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

kann immer ausgeführt werden mit Hülfe der allgemeinen Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen jener Winkel (5), (9), (11), (12) auf S. 418—419.

Wie eine nach Zonen vorschreitende Winkelberechnung durchgeführt werden kann, hat *M. Websky* dargelegt⁴⁵⁾.

20. Berechnung der wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente. Zwischen den auf solche Weise berechneten Werten der Flächenwinkel und den durch Messung erhaltenen Werten bestehen Differenzen, die aus Störungen des Krystallisationsvorganges und aus Beobachtungsfehlern entspringen. Die berechneten Werte sind Funktionen der Näherungswerte der Axenelemente, die aus den fünf Fundamentalwinkeln nach Nr. 17 abgeleitet wurden. Es sollen nun mit Hülfe aller Winkelmessungen *die wahrscheinlichsten Werte der Axenelemente* berechnet werden, d. h. die Werte, für welche die Summe der mit den zugehörigen Gewichten p multiplizierten Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Flächenwinkeln ein Minimum ist. Diese Rechnung ist zuerst von *F. E. Neumann*⁴⁶⁾ durchgeführt worden. Ihre praktische Ausführung wurde vereinfacht von *B. Hecht*⁴⁷⁾, indem er an Stelle der Axenelemente die sechs Grössen (S. 423):

$$z_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} = z_{ki} = \frac{\Delta_{ki}}{a_i a_k}$$

einführte, deren Verhältnisse allein in Betracht kommen.

Es seien z_{ik}^0 die aus fünf Fundamentalwinkeln abgeleiteten Näherungswerte von z_{ik} , ω^0 der mit ihrer Hülfe berechnete Wert des Winkels der Flächen h, h' , dessen gemessener Wert mit ω' bezeichnet sei; p bedeute das Gewicht der Beobachtung. Ferner seien dz_{ik} die zu berechnenden Korrekturen von z_{ik}^0 und ω der mit den korrigierten Werten $z_{ik}^0 + dz_{ik}$ berechnete Winkel. Bezeichnet man nun:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ik}} \right)^0 = Q_{ik},$$

so ist:

$$\omega = \omega^0 + Q_{11} dz_{11} + Q_{22} dz_{22} + Q_{33} dz_{33} + Q_{23} dz_{23} + Q_{31} dz_{31} + Q_{12} dz_{12}.$$

Die Grössen Q_{ik} findet man durch Differentiation von (5) S. 418:

$$\cos \omega = \frac{\varphi(h, h')}{\sqrt{\varphi(h)\varphi(h')}},$$

worin:

45) *M. Websky*, Berlin Ber. 1879, p. 339.

46) *F. E. Neumann*, Berlin Abhdl. 1830, p. 189 (Krystallsystem des Albites).

47) *B. Hecht*, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 5 (1887), p. 601, 614, 622, 627, 633, 637.

$$\varphi(h, h') = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h_i h'_k, \quad \varphi(h) = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h_i h_k, \quad \varphi(h') = \sum_{ik=1}^3 z_{ik} h'_i h'_k.$$

Es ergibt sich:

$$-\frac{\sin \omega d\omega}{\cos \omega} = \frac{d\varphi(h, h')}{\varphi(h, h')} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(h)}{\varphi(h)} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi(h')}{\varphi(h')},$$

oder:

$$d\omega = \frac{\cotg \omega}{2} \left[\frac{d\varphi(h)}{\varphi(h)} + \frac{d\varphi(h')}{\varphi(h')} - 2 \frac{d\varphi(h, h')}{\varphi(h, h')} \right].$$

Setzt man hierin:

$$d\varphi(h) = \sum_{ik=1}^3 h_i h_k dz_{ik}, \quad d\varphi(h') = \sum_{ik=1}^3 h'_i h'_k dz_{ik}, \quad d\varphi(h, h') = \sum_{ik=1}^3 h_i h'_k dz_{ik},$$

so erhält man für die Koeffizienten von dz_{ik} :

$$Q_{ii} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ii}} \right)^0 = \frac{\cotg \omega^0}{2} \left[\frac{h_i^2}{\varphi^0(h)} + \frac{h'_i{}^2}{\varphi^0(h')} - 2 \frac{h_i h'_i}{\varphi^0(h, h')} \right],$$

$$Q_{ik} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_{ik}} \right)^0 = \frac{\cotg \omega^0}{2} \left[\frac{h_i h_k}{\varphi^0(h)} + \frac{h'_i h'_k}{\varphi^0(h')} - \frac{h_i h'_k + h_k h'_i}{\varphi^0(h, h')} \right].$$

Es sind nun die Größen dz_{ik} so zu bestimmen, dass:

$$\sum p(\omega' - \omega)^2,$$

oder:

$$\sum p(\omega' - \omega^0 - Q_{11} dz_{11} - Q_{22} dz_{22} - Q_{33} dz_{33} - Q_{23} dz_{23} - Q_{31} dz_{31} - Q_{12} dz_{12})^2$$

ein Minimum wird. Dabei kann eine der Grössen dz_{ik} gleich Null gesetzt werden. Ein bequemes Schema für die Rechnung hat *Hecht* a. a. O. mitgeteilt⁴⁸⁾.

21. Anwendung mehrkreisiger Reflexionsgoniometer. Abweichend gestaltet sich die Krystallberechnung, wenn die Flächenwinkel nicht mit *einkreisigen Reflexionsgoniometern*⁴⁹⁾, sondern mit *zweikreisigen Theodolithgoniometern*⁵⁰⁾ gemessen werden. Diese In-

48) Über Ausgleichungsmethoden in der Krystallberechnung vgl. *H. Dauber*, Sitzungsber. Wien Akad. 39 (1860), p. 685; *A. Schrauf*, Lehrb. d. physik. Min. 1 (1866), p. 223; *V. von Lang*, Lehrb. d. Kryst. 1866, p. 351; *J. Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 5 (1881), p. 463; 22 (1893), p. 376; *A. Brezina*, Methodik der Krystallbestimmung 1884, p. 223; *A. Sella*, Riv. min. crist. 10 (1892), p. 33; *C. Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 333; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1903), p. 1.

49) Vgl. namentlich *M. Websky*, Zeitschr. f. Kryst. 4 (1880), p. 545.

50) *S. Czapski*, Zeitschr. f. Instr. 13 (1893), p. 1, 242; *V. Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 210; 24 (1895), p. 610; 29 (1898), p. 333; *E. v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 574; 32 (1900), p. 464; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 37 (1903), p. 50. — Das erste zweikreisige Goniometer wurde von *W. H. Miller* konstruiert Proc. Cambr. Phil. Soc. 4 (1882), p. 236.