

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0254

**LOG Titel:** 23. Perspektivische Kristallzeichnungen

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

strumente gestatten die wiederholten Justierungen eines Krystals, die bei jenen Apparaten für jede einzelne Zone erforderlich sind, zu vermeiden; sie bestimmen die Lage jeder Fläche durch zwei Winkel, die der geographischen Länge und Breite entsprechen (Polarkoordinaten Fig. 2). Die Vorzüge beider Messungsverfahren vereinigen die dreikreisigen Reflexionsgoniometer<sup>51)</sup>. Über den Gang der Berechnung, der durch geeignete Justierung der Krystalle bedeutend vereinfacht werden kann, handelt die unten angegebene Litteratur<sup>2)</sup>.

**22. Rechtwinklige Hilfsaxensysteme.** Zur Berechnung eines triklinen Krystals kann an Stelle des schiefwinkligen Systems krystallographischer Axen  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  ein Hilfsaxensystem  $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*$  von rechtwinkligen gleich langen Axen mit demselben Anfangspunkt eingeführt werden, dessen Vorteil darin besteht, dass wie bei den Krystallen des regulären Systems die Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen eines Winkels zwischen Flächen oder Kanten die einfachste Gestalt annehmen und die Indices einer Ebene und ihrer Normale einander gleich sind. Das Hilfsaxensystem ist so zu wählen, dass z. B.  $\pi_3$  mit  $\pi_3^*$  und die Ebene  $\pi_3\pi_1$  mit  $\pi_3\pi_1^*$  zusammenfällt<sup>53)</sup>. Die auf das Hilfsaxensystem bezogenen Werte der Indices von Flächen oder Kanten erhält man unter Berücksichtigung der Definition der Koordinaten in Nr. 9 mit Hilfe der Transformationsformeln, die den Übergang von einem schiefwinkligen Koordinatensystem in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit demselben Anfangspunkte vermitteln.

**23. Perspektivische Krystalzeichnungen.** Nach dem Gesetz der Zonen ist das Auftreten von Scharen paralleler Kanten charakteristisch für die Krystallpolyeder. Daher sind die perspektivischen Krystalzeichnungen stets Parallelprojektionen. Im Folgenden sollen orthogonale Projektionen benutzt werden. Zu ihrer Herstellung bieten sich zwei Verfahren dar.

I. Sind die Axenelemente und die Indices der Flächen eines Krystallpolyeders gegeben, so projiziert man zunächst das Axensystem auf die Bildebene  $\mathfrak{B}$  und findet dann die Projektionen der Kanten-

51) G. J. H. Smith, Min. Mag. 12 (1899), p. 175; 14 (1904), p. 1.

52) E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 32 (1900), p. 131, 446; G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 29; A. J. Moses u. A. F. Rogers, Zeitschr. f. Kryst. 38 (1903), p. 209, 506; K. Stöckl, Zeitschr. f. Kryst. 39 (1904), p. 23; L. Borgström u. V. Goldschmidt, Zeitschr. f. Kryst. 41 (1906), p. 63.

53) C. Neumann, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 492; E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 632, 709; G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 24 (1895), p. 505.

richtungen mit Hülfe einer, in einer Axenebene entworfenen, perspektivischen Linienprojektion des dem Polyeder entsprechenden Flächenbündels.

Die *indirekten* Projektionen der Axensysteme setzen voraus, dass eine Projektion von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen  $OA, OB, OC$  hergestellt sei. Wir nehmen an, dass in der Anfangslage die Ebene  $BOC$  in die Bildebene  $\mathfrak{B}$  falle und  $OC$  vertikal stehe. Darauf werde das System gedreht um  $OC$  um den Winkel  $\varrho$  im Sinne der Uhrzeigerbewegung und nach vorn geneigt, um die in  $\mathfrak{B}$  liegende Normale  $OE$  von  $OC$  um den Winkel  $\sigma$ . In dieser Stellung sind  $OF, OG, OH$  die senkrechten Projektionen der Axen auf  $\mathfrak{B}$  (Fig. 15). Bezeichnet man die Verkürzungsmassstäbe auf den Axen mit  $a, b, c$  und die Winkel  $G OH = \varphi, HOF = \psi$ , so bestehen folgende Beziehungen:

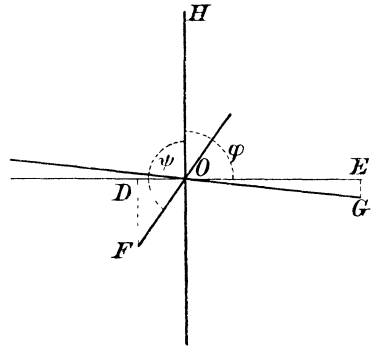


Fig. 15. Projektion von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen.

$$a : b : c = OF : OG : OH$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 \varrho \cos^2 \sigma} : \sqrt{1 - \sin^2 \varrho \cos^2 \sigma} : \cos \sigma.$$

$$\sin^2 \varrho = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \quad \sin^2 \sigma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \tan \varrho \sin \sigma = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\tan(\psi - 90^\circ) = \cot \varrho \sin \sigma = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Soll nach der Drehung um  $\varrho$  die Projektion der vorderen Axe  $OA$  gleich  $1/r$  der Projektion  $OE$  der seitlichen Axe  $OB$  und nach der Neigung um  $\sigma$  die Abweichung  $DF$  von  $A$  unter die horizontale Gerade gleich  $1/s$  von  $OE$  sein, so finden die Beziehungen statt<sup>54)</sup>:

$$r = \frac{OE}{OD} = \cot \varrho, \quad s = \frac{OE}{OF} = \frac{1}{\sin \sigma}$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = r^2 + s^2 : r^2 s^2 + 1 : (r^2 + 1)(s^2 - 1)$$

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{1}{r s}, \quad \tan(\psi - 90^\circ) = \frac{r}{s}.$$

54) V. v. Lang, Lehrb. d. Krystallogr. 1866, § 71.

Die vielbenutzte *Mohs'sche* orthogonale Parallelprojektion<sup>55)</sup> fordert, dass in der Projektion des Hexaeders die rechte Seitenfläche  $\frac{1}{3}$  so breit als die linke und die obere Endfläche,  $\frac{1}{6}$  so hoch als die linke Seitenfläche breit oder, was dasselbe bedeutet,  $\frac{1}{8}$  so hoch als das ganze Hexaeder breit erscheinen soll. In diesem Falle ist  $r = 3$ ,  $\mathfrak{s} = 8$  und:

$$\begin{aligned}\tan \varrho &= \frac{1}{3}, & \sin \sigma &= \frac{1}{8}; \\ \varrho &= 18^\circ 26' 6'', & \sigma &= 7^\circ 10' 51''; \\ a : b : c &= 8,54 : 24,02 : 25,10. \\ \varphi - 90^\circ &= 2^\circ 23' 9'', & \psi - 90^\circ &= 20^\circ 33' 22''.\end{aligned}$$

Angenähert ist:

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{1}{25}, \quad \tan(\psi - 90^\circ) = \frac{9}{25}.$$

Die Projektion steht sehr nahe der anisometrischen Projektion:

$$a : b : c = 8 : 23 : 24$$

und der monodimetrischen Projektion:

$$a : b : c = 1 : 3 : 3.$$

*Fr. Naumann*<sup>56)</sup> wählte  $r = 3$ ,  $\mathfrak{s} = 9$ , so dass:

$$\begin{aligned}\varrho &= 18^\circ 26' 6'', & \sigma &= 6^\circ 22' 46''; \\ a : b : c &= 7 : 19 : 20; \\ \varphi - 90^\circ &= 2^\circ 7' 16'', & \psi - 90^\circ &= 18^\circ 26' 6''.\end{aligned}$$

Die Projektion ungleich langer schiefwinkliger Axen  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  mit den Axenelementen:

$$\begin{aligned}OA : OB : OC &= a : b : c, \\ \pi_2 \pi_3 &= \alpha, \quad \pi_3 \pi_1 = \beta, \quad \pi_1 \pi_2 = \gamma\end{aligned}$$

ist nun in folgender Weise auszuführen:

Die Richtungen von  $OF$ ,  $OG$ ,  $OH$  in Fig. 15 seien bezeichnet mit  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$ .  $\pi_3$  falle mit  $Z^*$  zusammen und  $\pi_2$  liege in der Ebene  $Y^*Z^*$  (Fig. 16). Bezeichnen wir noch den nach vorn rechts sich öffnenden Winkel der Ebenen  $\pi_1 \pi_3$  und  $\pi_2 \pi_3$  mit  $C$ :

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}},$$

so erhalten wir aus den rechtwinkligen Koordinaten der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

55) *W. Haidinger*, Mem. of the Wernerian Nat. Hist. Soc. 1821—23. Frei übersetzt in Ann. Phys. Chem. 5 (1825), p. 507.

56) *Fr. Naumann*, Lehrb. d. rein. u. angew. Krystallogr. 2 (1830), p. 403.

$$\begin{aligned}
 OA_1 &= a \sin \beta \sin C, & A_1 A_3 &= -a \sin \beta \cos C, & AA_3 &= a \cdot \cos \beta, \\
 OB_1 &= b \sin \alpha, & & & BB_1 &= b \cdot \cos \alpha, \\
 & & & & OC &= c,
 \end{aligned}$$

durch Multiplikation mit den entsprechenden Verkürzungsmaßstäben  $a, b, c$  die zur Konstruktion der Endpunkte  $A^*, B^*, C^*$  der Axen in der Bildebene erforderlichen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 OA_1^* &= OA_1 \cdot a, & A_1^* A_3^* &= A_1 A_3 \cdot b, & A^* A_3^* &= AA_3 \cdot c, \\
 OB_1^* &= OB_1 \cdot b, & BB_1^* &= BB_1 \cdot c, \\
 OC^* &= c \cdot c.
 \end{aligned}$$

Zuweilen ist es zur Gewinnung möglichst anschaulicher perspektivischer Zeichnungen zweckmässig, das Axensystem um andere Winkel

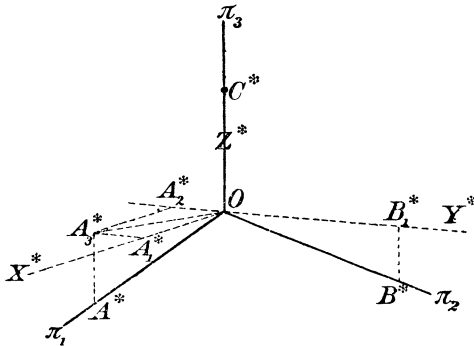


Fig. 16. Projektion ungleicher langer schiefwinkliger Axen.

gegen die Bildebene  $\mathfrak{B}$  zu drehen und ohne Vermittlung von drei gleichen, aufeinander senkrechten Axen *direkt* auf  $\mathfrak{B}$  zu projizieren. Eine Anleitung hierzu hat *St. Jolles* gegeben<sup>57)</sup>. —

Es handelt sich nun um die *Konstruktion der Kantenrichtungen*<sup>58)</sup>. Zu diesem Zwecke entwirft man in einer der Axenebenen eine perspektivische Linienprojektion des Flächenbündels, dessen Zentrum in den Endpunkt der gegenüberliegenden Axe gelegt wird. Die Verbindungsgeraden der Zonenpunkte der Linienprojektion mit dem Zentrum liefern die Gesamtheit der gesuchten Richtungen. Die Zeichnung des Kantenetzes eines Polyeders kann man an einem Eckpunkte beginnen, indem man der Reihe nach die Kanten parallel zu den entsprechenden Richtungen des Bündels aneinander fügt.

57) *St. Jolles*, Zeitschrift f. Kryst. 22 (1893), p. 1.

58) *F. H. Schröder*, Elem. d. rechn. Krystallographie 1852, p. 100.  
Encyclop. d. math. Wissensch. V 1.

II. Perspektivische Krystallzeichnungen können auch aus den drei in Nr. 5 beschriebenen Projektionen abgeleitet werden. Wir setzen wieder voraus, dass die Projektionsebenen  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{E}''$  zusammenfallen. Die Bildebene  $\mathfrak{B}$  der perspektivischen Zeichnung gehe durch das Zentrum  $C$  des Bündels der Flächen, Kanten und Flächennormalen. Dann ist ihre Lage gegeben in  $\mathfrak{E}$  durch ihre Schnittgerade  $\beta$ , in  $\mathfrak{E}'$  durch die stereographische Projektion des Hauptkreises, in dem sie die Kugel der Polfigur schneidet. Die Zeichnung soll ausgeführt werden in den Projektionsebenen, in die wir die Bildebene durch Drehung um  $\beta$  umlegen. Dabei gelangt das Zentrum  $C$  nach dem Punkt  $\mathfrak{B}'$ , den wir

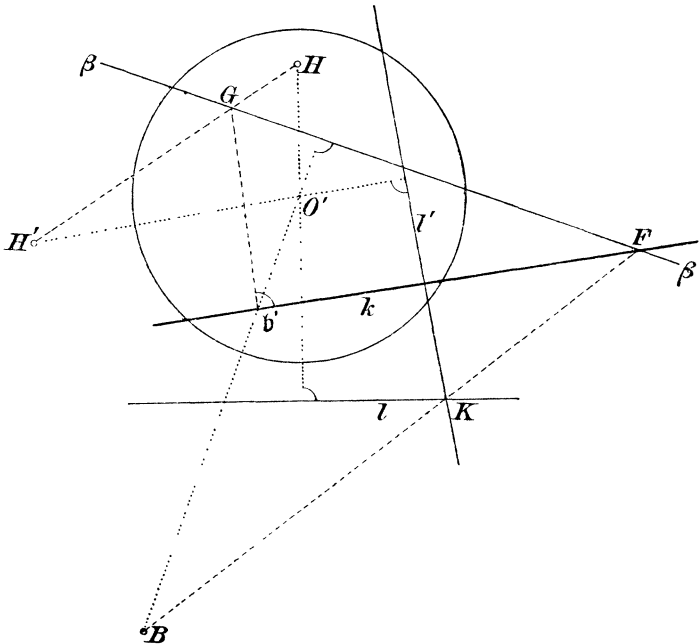


Fig. 17. Projektion der Kantenrichtungen mit Hilfe einer Linienprojektion der Flächen oder einer Punktprojektion der Flächennormalen.

erhalten, indem wir die stereographische Projektion  $\mathfrak{b}$  des Poles  $\mathfrak{b}$  von  $\mathfrak{B}$  auf die Ebene  $\mathfrak{E}$  senkrecht projizieren (vgl. Fig. 9).

a) Es sei gegeben in  $\mathfrak{E}$  die *Linienprojektion der Flächen* eines Krystallpolyeders. Wir suchen in  $\mathfrak{B}$  die Projektion  $k$  der Kantenrichtung  $\alpha$ , in der sich die Flächen  $h$ ,  $h'$  schneiden. Die Schnittgeraden dieser Flächen in  $\mathfrak{E}$  seien bezeichnet mit  $l$ ,  $l'$ ; ihr Schnittpunkt  $K$  ist die Spur von  $\alpha$  (Fig. 17). Die Gerade  $\alpha$  des Bündels wird auf  $\mathfrak{B}$  senkrecht projiziert durch ihre Verbindungsebene mit der

Normale  $CB$  von  $\mathfrak{B}$ ; daher geht die Spur dieser Ebene in  $\mathfrak{E}$  durch  $B$  und  $K$ . Es sei  $F$  der Schnittpunkt von  $BK$  mit  $\beta$ . Wird nun die Bildebene in die Projektionsebene umgelegt, so bleibt  $F$  fest und  $C$  gelangt nach  $b'$ . Folglich giebt die Verbindungsgerade  $b'F$  die Richtung der gesuchten Projektion<sup>59)</sup>.

b) Gegeben sei in  $\mathfrak{E}'$  die *Punktprojektion der Flächennormalen*. Die Schnittpunkte der Normalen der Flächen  $h, h'$  seien bezeichnet mit  $H, H'$  (Fig. 17). In dem Bündel steht die Kante  $\alpha$  senkrecht auf der Verbindungsebene von  $CH$  und  $CH'$ . Diese Ebene schneide die Bildebene in  $CG$  und  $\beta$  in  $G$ . Wird nun die Bildebene umgelegt in die Projektionsebene  $\mathfrak{E}'$ , so bleibt  $G$  fest und  $C$  gelangt nach  $b'$ . Daher gibt die Senkrechte auf  $Gb'$  in  $b'$  die Richtung der gesuchten Projektion<sup>60)</sup>.

c) Gegeben sei in  $\mathfrak{E}''$  die *stereographische Projektion der Polfigur* und des Hauptkreises  $\mathfrak{B}$ , in dem die Bildebene die Kugel der Polfigur schneidet. Wir bezeichnen die Pole zweier Flächen, die sich

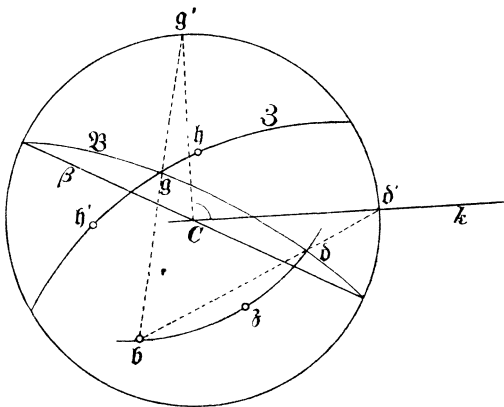


Fig. 18. Projektion der Kantenrichtungen mit Hilfe einer stereographischen Projektion der Polfigur.

in der Kante  $\alpha$  schneiden, mit  $h, h'$ , den Zonenkreis  $hh'$  mit  $\mathfrak{B}$ , den Schnittpunkt von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  mit  $g$ , die Pole von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  mit  $b$  und  $z$ , so dass  $z$  der Schnittpunkt der Kante  $\alpha$  mit der Kugeloberfläche ist. Dann wird  $\mathfrak{B}$  von dem Hauptkreise  $bz$  in  $d$  derart geschnitten, dass der Winkel  $gd = 90^\circ$  ist. Die stereographischen Projektionen von

59) E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. 30 (1899), p. 9.

60) H. Dauber, Sitz.-Ber. Wien. Akad., math.-naturw. Kl. 42 (1860), p. 78; V. Goldschmidt, Über Projektion etc. 1887, p. 80; Zeitschr. f. Kryst. 19 (1891), p. 352; G. F. H. Smith, Min. Mag. 13 (1903), p. 309.

$h, h', g, z, d$  seien bezeichnet mit  $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}', g, z, \mathfrak{d}$  (Fig. 18). Wird nun die Bildebene in die Projektionsebene durch Drehung um  $\beta$  umgelegt, so gelangen nach einem auf S. 404 angeführten Satze (vgl. Fig. 7) die Pole  $g, d$  in die Schnittpunkte  $g', d'$  der Geraden  $\mathfrak{h}g, \mathfrak{b}d$  mit dem Grundkreise. Daher ist  $g'd' = 90^\circ$ . Folglich giebt die Senkrechte auf  $g'C$  in  $C$  die Richtung der gesuchten Projektion<sup>61)</sup>.

**24. Homogene Deformationen.** Die in Nr. 11—15 angeführten Beziehungen zwischen Winkeln, Axeneinheiten und Indices gelten nur unter der in Nr. 1 betonten Voraussetzung, dass die Temperatur und der äussere allseitig gleiche Druck konstant bleiben.

Erfährt ein homogener Krystall bei konstantem, allseitig gleichem Druck eine in seiner ganzen Ausdehnung gleichmässige *Änderung der Temperatur*, durch die eine Zerstörung des krystallisierten Zustandes nicht bewirkt wird, so findet eine homogene Deformation statt, bei der die Symmetrie, der Zonenverband und die Indices der Flächen erhalten bleiben. Sie ist vollständig bestimmt, wenn das Deformationsellipsoid bekannt ist, dessen Hauptaxen nach *F. E. Neumann*<sup>62)</sup> *thermische Axen* genannt werden.

In den Fällen, in denen die Richtungen der thermischen Axen eine durch die Symmetrie des Krystalls bedingte permanente Lage nicht besitzen, können sie nur für eine Deformation aus einem bestimmten Anfangszustand (Temperatur  $\Theta$ ) in einen bestimmten Endzustand (Temperatur  $\Theta'$ ) definiert werden; in jedem anderen Zustande, also auch während der Deformation, stehen diese Richtungen nicht aufeinander senkrecht.

*C. Neumann*<sup>63)</sup> hat gezeigt, wie man die Richtungen der Hauptaxen und die Werte der Hauptdilatationen berechnen kann, wenn ausser der Volumendilatation eine geeignete Anzahl von Flächenwinkeln vor und nach der Deformation gemessen sind. Da bei der thermischen Ausdehnung fester Körper die Änderungen der Koordinaten eines Punktes und der Richtungs-cosinus einer Geraden sehr klein sind, hat *C. Neumann* ihre zweiten Dimensionen vernachlässigt<sup>64)</sup>. Für eine beliebig grosse homogene Deformation eines triklinen Krystalls ist die entsprechende Aufgabe von *B. Hecht*<sup>65)</sup> gelöst worden.

61) *F. Stöber*, Bull. soc. fr. min. 22 (1899), p. 42; *G. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 36 (1902), p. 16; *S. L. Penfield*, Amer. J. of Sc. 19 (1905), p. 68.

62) *F. E. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 27 (1833), p. 245.

63) *C. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 492; vgl. *J. Beckenkamp*, Zeitschr. f. Kryst. 5 (1881), p. 436.

64) Vgl. *L. Fletcher*, Phil. Mag. (5) 16 (1883), p. 275.

65) *B. Hecht*, Zeitschr. f. Kryst. 11 (1886), p. 531; 14 (1888), p. 333.