

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0256

LOG Titel: B. Symmetrie und Struktur der Kristalle.

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Hauptaxen einer homogenen Deformation bilden einen besonderen Fall der *gleichwinkligen Geraden*, d. h. der doppelt unendlich vielen Tripel von Geraden, die vor und nach der Deformation dieselben Winkel miteinander einschliessen⁶⁶⁾.

Auch die durch einen *allseitig gleichen Druck* bei konstanter Temperatur erzeugte Kompression eines einheitlichen Krystalls ist im allgemeinen mit einer Änderung der Gestalt verbunden. Nur unter der Annahme, dass die Elastizitätsmoduln von der Grösse des Druckes unabhängig sind, bewahren die Hauptaxen des Deformationsellipsoids (von *F. E. Neumann*⁶⁷⁾ *Hauptdruckaxen* genannt) auch in triklinen Krystallen ihre Richtungen, wenn der Druck geändert wird.

Die durch eine gleichmässige Erwärmung hervorgerufene Deformation kann nur bei regulären Krystallen durch einen allseitig gleichen Druck kompensiert werden⁶⁸⁾.

B. Symmetrie und Struktur der Krystalle.

Von *A. Schönflies* in Königsberg.

25. Einleitende Erläuterungen, insbesondere zum kristallographischen Grundgesetz. Von den grundlegenden Eigenschaften der Krystalle sind wesentlich zwei für das Folgende von Wichtigkeit; die eine bezeichnen wir kurz als das *kristallographische Symmetriegesetz*, die andere ist das *Gesetz der rationalen Indices*, auch *kristallographisches Grundgesetz*⁶⁹⁾ genannt.

Im *Symmetriegesetz* kommt diejenige physikalische Eigenschaft der Krystallsubstanz zum Ausdruck, die sie von den amorphen Körpern unterscheidet. Während ein amorpher Körper sich längs verschiedener Richtungen im allgemeinen *physikalisch gleichartig* verhält,

66) *H. J. S. Smith*, Proc. Math. Soc. London. 2 (1869), p. 196; *L. Fletcher*, Phil. Mag. (5) 9 (1880), p. 81; 16 (1883), p. 275; *E. Blasius*, Ann. Phys. 22 (1883), p. 526; Zeitschr. f. Kryst. 11 (1885), p. 140; *L. Burmester*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23 (1878), p. 108; 47 (1902), p. 128.

67) *F. E. Neumann*, Ann. Phys. Chem. 31 (1834), p. 177.

68) *Liebisch*, Physikal. Krystallogr. 1891, p. 576.

69) Die neueren Erörterungen über die Frage, worin das oberste Merkmal der Krystallsubstanz zu erblicken sei, haben zu den Problemen dieses Artikels keine nähere Beziehung und bleiben daher ausser Betracht. Vgl. darüber *v. Fedorow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 99, 24 (1895), p. 245; *Goldschmidt*, 28 (1897), p. 1 u. 414; *Viola*, 34 (1901), p. 353; 35 (1902), p. 229; *G. Friedel*, Bull. soc. franc. de miner. 28 (1905), p. 95, sowie die Litteratur von Anm. 102.

zeigt ein Krystall nach *verschiedenen* von demselben inneren Punkt *O* ausgehenden Richtungen im allgemeinen *verschiedenes* Verhalten. Giebt es unter den von *O* ausgehenden Richtungen solche, längs deren der Krystall in jeder Hinsicht die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzt (*gleichwertige* Richtungen), so sind diese nicht etwa regellos um den Punkt *O* gelagert, bilden vielmehr stets eine mit *geometrischen Symmetrieeigenschaften* (Nr. 27) behaftete Figur⁷⁰⁾, d. h. eine solche, die durch einfache Operationen, wie *Drehung, Spiegelung* u. s. w. mit sich zur Deckung gelangt (Nr. 29), und zwar mit der Massgabe, dass nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige *Symmetrieachsen* auftreten. Das gleiche gilt von der sogenannten *einfachen Krystallform*⁷¹⁾, d. h. von den Ebenen, die auf den bezüglichen Geraden in gleichem Abstand von *O* senkrecht stehen, resp. von dem von ihnen gebildeten konvexen Polyeder.

Andere Symmetriearten, als die eben genannten, kommen in der Natur nicht vor; insbesondere wird eine fünfzählige Symmetrieaxe nie beobachtet. Das Symmetriegesetz ist daher ein *unmittelbares* Ergebniss der Erfahrung.

Unter dem *Gesetz der rationalen Indices* (oder der rationalen Doppelverhältnisse vgl. Nr. 6) versteht man bekanntlich das Folgende: Wenn man zu drei nicht in einer Ebene gelegenen Krystallkanten ein paralleles Dreikant konstruiert und als Masseinheit auf jeder der drei Axen des Dreikants eine Länge wählt, welche von einer alle drei Axen schneidenden, sonst aber beliebig ausgewählten Krystallfläche abgeschnitten wird, so schneidet jede andere Krystallfläche von jenen Axen Stücke ab, deren Verhältnisse durch rationale Zahlen gemessen werden.

Ob und inwiefern auch dieses Gesetz als eine *wirkliche Erfahrungstatsache* anzusehen ist, bedarf der näheren Erläuterung. Evident sagt es mehr aus, als durch unmittelbare Erfahrung je bestätigt werden kann. Denn die Frage, ob eine Zahl rational oder irrational sei, entzieht sich dem Genauigkeitsgrade jeder Messmethode. Es kommt hinzu, dass die Bildung der Krystalle kleinen Störungen unterworfen ist, die sich auch an den vollkommensten Krystallpolyedern durch geringe Winkel-

70) Lange Zeit wurde die geometrische Form als das wesentliche Kennzeichen der Krystalsymmetrie angesehen. Die Wichtigkeit des physikalischen Verhaltens wurde zuerst von *F. Neumann*, Beiträge zur Krystallogonomie (1823), Vorrede, p. 3 u. 4, betont und wird seitdem allgemein anerkannt. In letzter Zeit ist man teilweise wieder zu stärkerer Berücksichtigung der morphologischen Verhältnisse zurückgekehrt. Vgl. auch die in Anm. 102 genannte Litteratur.

71) Diese soll im Folgenden kurz als „Krystallform“ bezeichnet werden.

schwankungen verraten (vgl. Nr. 20). Der gewöhnlichen Auffassung des Grundgesetzes und seiner vorwiegenden Anwendung in der praktischen Krystallographie entspricht es, wenn wir seine Aussage enger fassen, wenn wir nämlich unter den rationalen Zahlen, von denen das Gesetz spricht, die Verhältnisse *kleiner* ganzer Zahlen verstehen. In der Tat bewegen sich die ganzen Zahlen, welche bei den Indices der zumeist vorkommenden und am besten ausgebildeten Krystallflächen auftreten, in sehr engen Grenzen; sie überschreiten im allgemeinen nicht die Grösse 10. Wir hätten daraufhin nicht von dem „Gesetz der rationalen Indices“ schlechtweg, sondern von einem „Gesetze der durch kleine ganze Zahlen ausdrückbaren rationalen Indices“ zu sprechen. In dieser engeren Fassung würde das Gesetz offenbar direkt durch die Erfahrung bestätigt und zwar (mit Rücksicht auf die schon genannten Störungen beim Bildungsprozess der Krystalle) als angenähert gültig erwiesen werden können — wenn es in dieser Fassung überhaupt allgemein zutreffend wäre. Letzteres ist indessen nicht der Fall. Es kommen nämlich, wenn auch gewissermassen als Ausnahmen, Flächen vor (z. B. die sog. Vicinalflächen), deren Indices weit über die vorhergenannten Grenzen hinausgehen. Hieraus geht hervor, dass sich die Grösse der bei den Indices auftretenden ganzen Zahlen nicht allgemein gültig einschränken lässt.

Es bleibt also nichts anderes übrig, als an der ursprünglichen Fassung, nämlich der blossen Aussage von der Rationalität der Indices, festzuhalten. Damit verzichtet man aber zugleich auf die Möglichkeit einer *direkten* Bestätigung durch die Erfahrung, und muss sich, wie bei vielen andern physikalischen Gesetzen, mit einem *indirekten* Beweis begnügen, d. h. mit der *empirischen* Bestätigung der aus der Rationalität der Indices fliessenden *theoretischen Folgerungen*. Unter allen diesen ist keine umfassender und prinzipieller als diejenige, die die Symmetrie der Krystalle betrifft. Hier aber werden die aus dem Gesetz der rationalen Indices fliessenden Folgerungen durch die Beobachtung vollinhaltlich bestätigt. Das Gesetz der rationalen Indices schliesst nämlich ebenfalls das Auftreten von anderen als 2-, 3-, 4- oder 6-zähligen Symmetrieaxen absolut aus. Z. B. ist die 5-zählige Symmetrieaxe mit diesem Gesetz unverträglich, weil sie Flächen mit irrationalen Axenabschnitts-Verhältnissen zur Folge haben würde. Indem man alle mit dem Gesetz der rationalen Indices verträglichen Symmetrieklassen aufstellt, gewinnt man ein vollständiges Einteilungsprinzip, dem sich die wirklich vorkommenden Krystalle unterordnen (vgl. Nr. 31).

In dieser Übereinstimmung dürfen wir einen vom naturwissen-

schaftlichen Standpunkte aus höchst befriedigenden Beweis des Gesetzes der rationalen Indices erblicken⁷²⁾.

Eine letzte wichtige Eigenschaft der Krystallsubstanz, die hier in Frage kommt, die sie allerdings mit jeder homogenen Substanz teilt, ist die *physikalische Gleichwertigkeit aller parallelen Richtungen*. Diese muss sich als Folge einer jeden molekularen Strukturtheorie ergeben.

26. Formulierung der mathematischen Probleme. Aus dem vorstehend geschilderten Sachverhalte entspringen zwei Aufgaben.

Die eine knüpft an die Thatsache an, dass die Symmetrieeigenschaften, die einem Krystall, wie überhaupt einem *Polyeder*, insbesondere einem *konvexen Polyeder* zukommen können, *sich gegenseitig bedingen*; ihre Art und Zahl ist durch *mathematische Gesetze* bestimmt, und es resultiert daher die Aufgabe, alle *theoretisch möglichen Verbindungen* von Symmetrieeigenschaften aufzustellen. Die Lösung dieser Aufgabe schliesst die Aufzählung und Ableitung aller Krystallsysteme und ihrer Unterabteilungen in sich ein (Nr. 31). Der erste, der in dieser Aufgabe ein geometrisches Problem erkannte und seine vollständige Lösung gegeben hat, war *C. Hessel*⁷³⁾.

Das zweite Problem knüpft an die Forderung an, eine *Hypothese* über die *molekulare Struktur* der Krystalle aufzustellen, aus der sich die obengenannten Grundgesetze als *notwendige Konsequenzen* ableiten lassen. Alle Strukturtheorien gehen davon aus, eine *regelmässige Anordnung der Krystallmolekeln* anzunehmen. Die mathematische Formulierung dieser Hypothese operiert mit einer sich nach allen

72) Es verdient bemerkt zu werden, dass das Symmetriegesetz und das Gesetz der rationalen Indices, wenn sie auch in der oben genannten Beziehung zu einander stehen, doch nicht aus einander gefolgert werden können. Einerseits kann aus dem Gesetz der rationalen Indices nicht entnommen werden, dass die Lage der *N* mit einander gleichwertigen Richtungen eines Krystalles gerade eine solche sein muss, dass sie, wie oben erwähnt, stets eine mit Symmetrie behaftete Figur bildet. Ebensowenig ist das Umgekehrte der Fall, und zwar deshalb, weil sich das Symmetriegesetz nur auf solche Flächen eines Krystalles bezieht, die durch das Symmetriegesetz mit einander verbunden sind, also als mögliche Flächen einer und derselben einfachen Krystallform auftreten können. Über die gegenseitige Beziehung der Indices solcher Krystallflächen, die verschiedenen einfachen Krystallformen angehören, kann es daher nichts aussagen.

73) Vgl. den Artikel über Krystallographie in *Gehler's* physikalischem Wörterbuch, p. 1062 ff. Eine zweite Darstellung giebt die Marburger Universitätsschrift: Über gewisse merkwürdige statische und mechanische Eigenschaften der Raumbilde (1862). Vgl. auch *L. Sohncke*, Die Entdeckung des Einteilungsprinzips der Krystalle durch *J. F. C. Hessel*, Zeitschr. f. Kryst. 18 (1891), p. 486.

Richtungen unbegrenzt ausdehnenden Krystallmasse, ersetzt die Krystallmolekeln zunächst durch Punkte (z. B. die Schwerpunkte) und gelangt so dazu, in dem unbegrenzten *regelmässigen Punktsystem* die charakteristische Struktur der Krystallsubstanz zu erblicken. Die erste Strukturtheorie dieser Art hat *A. Bravais*⁷⁴⁾ aufgestellt. Seine grundlegende Vorstellung wurde später durch *Ch. Wiener*⁷⁵⁾ und *L. Sohncke*⁷⁶⁾ verallgemeinert, in neuester Zeit endlich durch die Arbeiten von *E. v. Fedorow*⁷⁷⁾ und unabhängig von ihm durch *A. Schoenflies*⁷⁸⁾, im Anschluss an einen von *F. Klein* ausgesprochenen Gedanken⁷⁹⁾.

Die Vorstellung, dass um alle Krystallmolekeln herum die Krystallmasse in gleicher Weise gelagert ist, kann kaum durch eine einfachere ersetzt werden. Andererseits kann eine molekulare Theorie, mit *H. Hertz* zu reden, immer nur ein *Bild* der Naturvorgänge geben. Inwieweit das Bild den wirklichen Bau der Stoffe und die Wirkungsweise der Kräfte widerspiegelt, ist in allen Fällen eine offene Frage. Auch wird ein solches Bild im allgemeinen einfachere Annahmen machen, als es der Natur der Dinge entspricht. Andererseits besteht wieder in der Einfachheit des Bildes sein methodischer Vorzug, und die in ihm enthaltene Hypothese wird um so wertvoller sein, je leichter sie die Hauptgesetze des bezüglichen Gebietes abzuleiten gestattet. In dieser Hinsicht lässt die Strukturtheorie nichts zu wünschen übrig; denn sowohl die Symmetriegesetze und die Gleichwertigkeit paralleler Richtungen, wie auch das Gesetz der rationalen Indices sind *unmittelbare* und *prinzipielle Folgerungen der Strukturhypothesen* (Nr. 38); auch die übliche Systematik der Krystalle (Nr. 28) findet durch sie ihre Begründung. Was allerdings die *speziellen* gestaltlichen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle betrifft, so sind bisher nur wenige zu nennen, die aus den Strukturhypothesen ihre Erklärung gefunden haben oder für die eine solche versucht wurde — allerdings ist auch kaum eine Erscheinung bekannt, die gegen sie spräche⁸⁰⁾ (vgl. Nr. 49 ff.).

74) Mémoire sur les systèmes formés etc. und Études crystallographiques.

75) Grundzüge der Weltordnung, 2. Ausgabe (1869), p. 82 ff.

76) Vgl. besonders Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur, Leipzig 1879, in der sich auch eine eingehende historische Darstellung findet.

77) Gestaltenlehre, Petersburg 1885, und Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, ebenda 1890. Für die weitere Litteratur vgl. Anm. 151.

78) Krystallssysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891, und die vorher erschienenen Arbeiten in Math. Ann. 28 (1887), p. 319; 29 (1887), p. 50; 34 (1889), p. 172.

79) Vgl. auch *W. Barlow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 1 u. 25; (1896), p. 86.

80) Als merkliche Abweichungen sind möglicherweise die von *Beckenkamp*

In jedem Falle wird man die Vorstellung eines regelmässigen Aufbaues der Krystallmolekeln als eine erste Annäherung an die wirklichen Zustände der krystallinen Substanz ansehen dürfen, ähnlich wie die Mechanik der sogenannten starren Körper eine erste Annäherung für das wirkliche Verhalten der in der Natur vorkommenden festen Körper liefert⁸¹⁾.

I. Die Symmetriegesetze und die 32 Symmetriegruppen.

27. Die Symmetrieeigenschaften und ihre Gesetze. Die Gesamtheit derjenigen N Richtungen, längs deren sich ein Krystall in jeder Hinsicht, also auch in seinen *sämtlichen* physikalischen Eigenschaften gleichartig verhält (vgl. Nr. 34), bezeichnen wir kurz als Figur F . Die Figur F solcher N gleichwertigen Richtungen ist, wie wir bereits oben (Nr. 25) erwähnten, identisch mit den N Loten, die man vom Mittelpunkt der *allgemeinen einfachen Krystallform* auf deren Seitenflächen fallen kann.

Für die in Nr. 25 erwähnten geometrischen *Symmetrieeigenschaften* der Figur F giebt es *vier einfachste Typen*; sie entsprechen der Art und Weise, auf die man die Figur F mit sich zur Deckung bringen kann⁸²⁾. Dies kann so geschehen, dass man 1) sie um eine durch O gehende Axe a dreht — a heisst *Symmetrieaxe*, genauer *Symmetrieaxe erster Art*⁸³⁾ —, 2) dass man sie gegen eine durch O gehende Ebene σ spiegelt — *Symmetrieebene* —, 3) dass man jede Richtung durch die entgegengesetzte ersetzt — O heisst *Symmetriezentrum*⁸⁴⁾ —, 4) dass man sie um eine durch O gehende Axe a dreht und ausserdem gegen eine zu dieser Axe senkrechte Ebene spiegelt — a heisst *Symmetrie-*

und anderen beobachteten anomalen Ätzfiguren zu betrachten. Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 14 (1888), p. 375 u. ff.

81) Damit erledigen sich die Ausführungen von *Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 29 (1898), p. 38; *Beckenkamp*, 32 (1900), p. 45; *Viola*, 34 (1901), p. 388. Vgl. auch die dynamischen Vorstellungen von Lord *Kelvin* in Nr. 33.

82) D. h. jede Richtung kommt in eine Lage, in der sich ursprünglich ebenfalls eine der N Richtungen befand.

83) Solche Axen sollen im Folgenden meist als *Symmetrieaxen* schlechthin bezeichnet werden. Die Axen werden als *einseitig* oder *zweiseitig* unterschieden, je nachdem ihre beiden entgegengesetzten Richtungen gleichwertig sind oder nicht. Im letzten Fall heissen sie auch *polar*.

84) *v. Fedorow* sagt „*Inversionszentrum*“ und versteht unter einem *Symmetriezentrum* den Schnittpunkt der *Symmetrieelemente* (Axen, Ebenen), Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 28.