In jedem Falle wird man die Vorstellung eines regelmässigen Aufbaues der Krystallmolekeln als eine erste Annäherung an die wirklichen Zustände der krystallinischen Substanz ansehen dürfen, ähnlich wie die Mechanik der sogenannten starren Körper eine erste Annäherung für das wirkliche Verhalten der in der Natur vorkommenden festen Körper liefert[81]).

I. Die Symmetriegesetze und die 32 Symmetriegruppen.

27. Die Symmetrieeigenschaften und ihre Gesetze. Die Gesamtheit derjenigen N Richtungen, längs deren sich ein Krystall in *jeder* Hinsicht, also auch in seinen *sämtlichen* physikalischen Eigenschaften gleichartig verhält (vgl. Nr. **34**), bezeichnen wir kurz als Figur F. Die Figur F solcher N gleichwertigen Richtungen ist, wie wir bereits oben (Nr. **25**) erwähnten, identisch mit den N Loten, die man vom Mittelpunkt der *allgemeinen einfachen Krystallform* auf deren Seitenflächen fällen kann.

Für die in Nr. **25** erwähnten geometrischen *Symmetrieeigenschaften* der Figur F giebt es *vier einfachste Typen;* sie entsprechen der Art und Weise, auf die man die Figur F mit sich zur Deckung bringen kann[82]). Dies kann so geschehen, dass man 1) sie um eine durch O gehende Axe a dreht — a heisst *Symmetrieaxe,* genauer Symmetrieaxe *erster Art*[83]) —, 2) dass man sie gegen eine durch O gehende Ebene σ spiegelt — *Symmetrieebene* —, 3) dass man jede Richtung durch die entgegengesetzte ersetzt — O heisst *Symmetriezentrum*[84]) —, 4) dass man sie um eine durch O gehende Axe a dreht und ausserdem gegen eine zu dieser Axe senkrechte Ebene spiegelt — a heisst *Symmetrie-*

---

und anderen beobachteten anomalen Ätzfiguren zu betrachten. Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 14 (1888), p. 375 u. ff.

81) Damit erledigen sich die Ausführungen von *Goldschmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 29 (1898), p. 38; *Beckenkamp*, 32 (1900), p. 45; *Viola*, 34 (1901), p. 388. Vgl. auch die dynamischen Vorstellungen von Lord *Kelvin* in Nr. **33**.

82) D. h. jede Richtung kommt in eine Lage, in der sich ursprünglich ebenfalls eine der N Richtungen befand.

83) Solche Axen sollen im Folgenden meist als Symmetrieaxen schlechthin bezeichnet werden. Die Axen werden als *einseitig* oder *zweiseitig* unterschieden, je nachdem ihre beiden entgegengesetzten Richtungen gleichwertig sind oder nicht. Im letzten Fall heissen sie auch *polar.*

84) *v. Fedorow* sagt „Inversionszentrum" und versteht unter einem Symmetriezentrum den Schnittpunkt der Symmetrieelemente (Axen, Ebenen), Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 28.

axe zweiter Art[85]). Eine Symmetrieaxe erster oder zweiter Art heisst *n-zählig*, wenn der kleinste Drehungswinkel, der die Deckung von F mit sich herbeiführt, der $n$te Teil von 2π ist.

Besitzt die Figur F eine Symmetrieaxe erster Art, so ist sie mit sich selbst auf mehrfache Art *kongruent;* besitzt sie eine der drei anderen Symmetrieeigenschaften, so ist sie sich selbst *spiegelbildlich gleich*[86]).

Die Symmetrieeigenschaften, die ein Krystall resp. seine Figur F besitzen kann, sind, wie in Nr. **26** erwähnt, nicht unabhängig voneinander. Die krystallographisch wichtigsten Gesetze, die hier bestehen, sind folgende[87]): 1) Die Schnittlinie von zwei Symmetrieebenen ist eine Symmetrieaxe; der zugehörige Winkel ist das Doppelte desjenigen, den die beiden Ebenen einschliessen. Insbesondere ist die Schnittlinie von zwei senkrechten Symmetrieebenen eine zweizählige Axe. 2) Besitzt umgekehrt ein Krystall eine n-zählige Axe und eine durch sie gehende Symmetrieebene, so besitzt er n solcher Ebenen, die gleiche Winkel miteinander einschliessen. 3) Von den drei Eigenschaften: Symmetrieebene, Symmetriezentrum und zweizählige Symmetrieaxe bedingen je zwei die dritte, wenn Axe und Ebene senkrecht aufeinander stehen. 4) Eine n-zählige Symmetrieaxe zweiter Art ist zugleich Symmetrieaxe erster Art und zwar vom doppelten Winkel. 5) Enthält ein Krystall mehrere Symmetrieaxen, die mehr als zweizählig sind, so müssen seine Symmetrieaxen mit denjenigen eines der bekannten regelmässigen *Euler*'schen Polyeder identisch sein.

28. Historische Entstehung der Krystallsysteme. Die Einteilung der Krystalle in Systeme ist ursprünglich unter wesentlicher Anlehnung an die äusseren Formen der Krystallindividuen erfolgt[88]). Man pflegte solche Krystalle zu einem System zusammenzufassen, deren Flächen sich mit rationalen Indices auf gleichartige Koordinatensysteme beziehen lassen (Nr. **8**). Als Koordinatenebenen und Koordinatenaxen benutzte man einerseits die *Symmetrieebenen*, die sich anschaulich am unmittelbarsten darboten, andererseits solche Richtungen *(Axen)*,

---

85) Auch axe de symétrie alterne [*Curie*, Bull. de la soc. min. 7 (1884), p. 450]. *v. Fedorow* spricht von „zusammengesetzter Symmetrie“: Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 28.

86) Solche Auffassungen des Symmetriebegriffes, die von dem obigen verschieden sind [vgl. z. B. *Beckenkamp,* Zeitschr. f. Kryst. 32 (1900), p. 45 u. 48; 33 (1900), p. 613], müssen hier unberücksichtigt bleiben. Vgl. auch Anm. **124.**

87) Für den Beweis vgl. Nr. **29.**

88) Die Arbeiten von *Hessel, Gadolin* u. s. w. (s. Litteraturübersicht p. 394 u. 395) kamen erst in neuester Zeit zur Geltung.

die auf Symmetrieebenen senkrecht stehen, oder sonst im Krystall ausgezeichnet sind, die aber nicht in allen Fällen Symmetrieaxen waren. Erst in neuerer Zeit ist die Benutzung von Symmetrieaxen, sowie überhaupt die Charakterisierung der Krystalle durch ihre Symmetrie, allgemeiner geworden. Demgemäss pflegen die Krystallographen die Krystalle folgendermassen in Systeme zu teilen:

1) *Reguläre* (*kubische, tesserale*) Krystalle; vier dreizählige Axen. 2) *Hexagonale* Krystalle; eine dreizählige oder sechszählige Axe. 3) *Tetragonale* Krystalle; eine vierzählige Axe. 4) *Rhombische* Krystalle; drei zueinander senkrechte ungleiche Axen. 5) *Monokline* Krystalle; eine ausgezeichnete Axe. 6) *Trikline* Krystalle; keine ausgezeichnete Richtung.

Im hexagonalen System werden die Krystalle mit dreizähliger Axe vielfach auch als *rhomboedrisches Krystallsystem* oder doch als *rhomboedrische Unterabteilung* des hexagonalen Systems bezeichnet.

Was die *Symmetrie* dieser Systeme betrifft, so ist die des rhombischen und monoklinen Systems nicht mehr einheitlich bestimmt. Die drei Axen des rhombischen Systems sind nicht für alle Krystalle zugleich zweizählige Symmetrieaxen, ebenso ist im monoklinen System nicht bei allen Krystallen eine zweizählige Symmetrieaxe vorhanden. (Vgl. Nr. **32**.)

Die vorstehende Einteilung in sechs resp. sieben Systeme findet übrigens in den Strukturtheorien eine wesentliche Stütze (Nr. **36**).

29. Die Deckoperationen und ihre Zusammensetzung. Die *mathematische* Theorie fasst, zumal mit Rücksicht auf die Strukturtheorien, ausser den Symmetrieeigenschaften auch die *Deckoperationen* ins Auge, in denen die Symmetrieeigenschaften gemäss dem Vorstehenden ihren Ausdruck finden. Der Symmetrieaxe entspricht eine *Drehung*; wir bezeichnen sie, falls sie um die Axe a stattfindet, durch $\mathfrak{A}(\alpha)$, wo α der Drehungswinkel ist; falls die Axe n-zählig ist, durch $\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$; ist insbesondere $n = 2$, also π der Drehungswinkel, so bezeichnen wir die Drehung auch als *Umwendung* $\mathfrak{U}$. Die drei anderen bezüglichen Deckoperationen heissen *Spiegelung*, *Inversion* und *Drehspiegelung* [89]), wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{A}}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, wenn a

89) Vgl. *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstruktur, p. 29. Für $n = 2$ ist die Drehspiegelung mit der Inversion identisch. Eine zweizählige Axe zweiter Art ist daher einem Symmetriecentrum äquivalent.

Statt der Drehspiegelung kann auch eine Drehung in Verbindung mit einer Inversion benutzt werden; vgl. *Minnigerode*, Neues Jahrb. f. Min. Beilagebd. 5 (1887), p. 145, u. 1894, 1, p. 92.

wieder eine n-zählige Axe ist. Sie heissen auch Deckoperationen *zweiter Art*, während man die Drehung auch *Deckbewegung* oder Deckoperation *erster Art* nennt.

Theoretisch ist es wichtig, auch diejenigen Deckoperationen zu betrachten, bei denen jede Richtung von F mit sich selbst zur Deckung gelangt. Man bezeichnet sie als *Identität* und hat dafür das Zeichen 1 eingeführt; es deutet an, dass diese Deckungsart auch so herstellbar ist, dass F in Ruhe bleibt.

Die zur Figur F zugehörige einfache Krystallform kann man in N Teilfiguren zerlegen, die bei jeder Deckoperation ineinander übergeführt werden. Sind alle Deckoperationen Drehungen, so sind alle Teilfiguren kongruent, im andern Fall sind sie teils kongruent, teils spiegelbildlich gleich.

Seien nun $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ irgend zwei Deckoperationen der Figur F. Wird dann auf F zunächst die Operation $\mathfrak{L}$ und dann die Operation $\mathfrak{M}$ angewandt, so wird F in der Endlage ebenfalls mit sich zur Deckung gelangt sein. Wir haben damit eine *neue* Deckoperation $\mathfrak{N}$ von F definiert, die in der Aufeinanderfolge resp. in der Verbindung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ besteht, die man *Produkt* von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ nennt und durch $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ bezeichnet[90]). Diese Definition soll auch in dem Fall gelten, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die gleiche Deckoperation bedeuten; alsdann bezeichnet man $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}=\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}=\mathfrak{L}^3$ u. s. w. und nennt $\mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}^3, \ldots$ *Potenzen* von $\mathfrak{L}$.[91])

Für die durch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ bestimmte Operation $\mathfrak{N}$ bestehen in den einfachsten Fällen folgende Sätze, die sich unmittelbar ergeben, wenn man eine von O ausgehende Gerade nacheinander den bezüglichen Operationen unterwirft und die Endlage mit der Anfangslage vergleicht.

1) Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ zwei Spiegelungen an den Ebenen σ und σ_1, ist a ihre Schnittlinie und $\sphericalangle(\sigma\sigma_1)=\alpha$, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1=\mathfrak{A}(2\alpha)$. 2) Ist die Ebene σ senkrecht zur Axe u, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{J}=\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{U}=\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{U}=\mathfrak{S}$. 3) Ist a eine Symmetrieaxe zweiter Art und σ die zu ihr senkrechte Ebene, so ist gemäss der Definition $\overline{\mathfrak{A}}(\alpha)=\mathfrak{A}(\alpha)\mathfrak{S}$; auch ist $\overline{\mathfrak{A}}^2(\alpha)=\mathfrak{A}(2\alpha)$.

Diese Sätze bilden zugleich die Quelle derjenigen Gesetze, die wir oben (Nr. 27) für die Symmetrieeigenschaften ausgesprochen haben.

---

90) Die Operationen, die durch $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ dargestellt werden, sind im allgemeinen verschieden.

91) Ist $\mathfrak{L}$ eine Drehung, so stellen also $\mathfrak{L}^2$ und $\mathfrak{L}^3$ eine Drehung um den doppelten und dreifachen Winkel dar.

Ferner bestehen folgende Sätze allgemeiner Art, die unmittelbar evident sind: 1) Das Produkt von zwei Operationen erster Art oder zwei Operationen zweiter Art ist eine Operation erster Art. 2) Das Produkt aus einer Operation erster Art und einer Operation zweiter Art ist eine Operation zweiter Art.

Endlich erwähne ich noch folgendes:

Für jede Deckoperation giebt es eine endliche Zahl von Wiederholungen, die die Figur F in ihre Anfangslage zurückführt; anders ausgedrückt, es existiert für jede Deckoperation eine gewisse *Potenz*, die die *Identität* liefert. Insbesondere ist:

$$\mathfrak{S}^2 = 1, \quad \mathfrak{J}^2 = 1, \quad \mathfrak{U}^2 = 1. \tag{1}$$

Ist ferner a eine n-zählige Axe, so hat man um a die Drehungen

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^2, \ldots, \quad \mathfrak{A}^{n-1}, \quad \mathfrak{A}^n = 1,$$

und wenn a eine $2n$-zählige Axe zweiter Art ist, so hat man die Drehspiegelungen

$$\overline{\mathfrak{A}}, \quad \overline{\mathfrak{A}}^3, \ldots, \quad \overline{\mathfrak{A}}^{2n-1}$$

und die Drehungen

$$\overline{\mathfrak{A}}^2, \quad \overline{\mathfrak{A}}^4, \ldots, \quad \overline{\mathfrak{A}}^{2n-2}, \quad \overline{\mathfrak{A}}^{2n} = 1.$$

30. Der Gruppenbegriff. Bezeichnet man durch

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots \tag{2}$$

die *sämtlichen* voneinander verschiedenen Deckoperationen einer Figur F, so muss die Deckoperation, die durch das Produkt aus zweien oder mehreren von ihnen dargestellt wird, ebenfalls in der Reihe (2) auftreten. Die Reihe enthält also auch jede Potenz der Operationen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$ und daher auch (Nr. **29**) die Identität. Dies ist diejenige Eigenschaft, die man als *Gruppeneigenschaft* bezeichnet; man sagt, dass die obigen Operationen eine *Gruppe G* bilden[92]). Geht man zu den Symmetrieeigenschaften zurück, so heisst dies, dass jede Symmetrieeigenschaft in der Reihe auftritt, die durch irgend zwei von ihnen gemäss Nr. **27** bedingt wird.

Für die Beziehung der Figur F resp. der allgemeinen Krystallform zu der vorstehenden Gruppe gilt der Satz: Wird irgend eine durch den Mittelpunkt der Krystallform gehende Richtung den N Operationen der Gruppe unterworfen, so entstehen stets N gleichwertige Richtungen; analog entstehen sämtliche Flächen der Krystallform, wenn eine von ihnen allen Operationen der Gruppe unterworfen wird. Das Gleiche gilt für die N Teile, in die man die Krystallform gemäss Nr. **29** zerlegen kann.

---

92) Näheres findet man in Bd. I 1 6 dieser Encyklopädie.

Hat die durch die Reihe (2) definierte Gruppe G die Eigenschaft, dass ein Teil ihrer Operationen gleichfalls die Gruppeneigenschaft besitzt, so bilden diese eine *Untergruppe* von G. Die Zahl dieser Operationen ist stets ein genauer Teiler von N. Eine Untergruppe von G bilden gemäss Nr. **29** insbesondere die in der Reihe (2) enthaltenen Bewegungen.

31. Mathematische Ableitung aller Symmetriegruppen[93]. Die Aufgabe, alle möglichen Krystallklassen abzuleiten, ist gemäss dem Vorigen in der *allgemeineren* Aufgabe enthalten, *alle überhaupt möglichen* Gruppen von Deckoperationen einer Figur F abzuleiten. Diese sollen *Symmetriegruppen* oder *Punktgruppen* heissen; aus ihnen werden wir die krystallographischen dadurch ausscheiden, dass in ihnen nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Axen auftreten dürfen (Nr. **25**). Man scheidet sie in Gruppen *erster Art* und Gruppen *zweiter Art*, je nachdem in ihnen nur Deckoperationen erster Art oder auch solche zweiter Art vorkommen.

Die Gruppen *erster Art* kann man so ableiten, dass man nach allen möglichen Verbindungen von Symmetrieaxen fragt, die ein *Polyeder* gemäss den Sätzen von Nr. **27** besitzen kann[94]. Es ergeben sich die folgenden:

---

93) Die Ableitung aller Symmetriegruppen resp. nur derjenigen, die krystallographische Bedeutung haben, ist von den verschiedensten Seiten nach den verschiedensten Methoden ausgeführt worden; sowohl von Krystallographen, wie von Mathematikern. Ausser *Hessel* (Anm. 3) ist zu erwähnen: *Bravais*, Journ. de math. Paris 14 (1849), p. 141 und Études cristallographiques, Journ. de l'éc. polyt. Heft 34 (1851), p. 229. In der ersten Arbeit zählt *Bravais* nur 31 Arten auf; die fehlende Art wird aber in der zweiten Arbeit p. 275 nebst Anm. doch erwähnt; vgl. Anm. 31. Ausserdem vgl. *Gadolin*, Acta soc. Fenn. Helsingfors 9 (1871), p. 1; *v. Fedorow*, Verhandl. d. russ. min. Ges. 20 (1884), p. 334; *P. Curie*, Bull. de la soc. min. de France 7 (1884), p. 89 u. 418; *H. Minnigerode*, Neues Jahrb. f. Min. Beilageband 5 (1887), p. 145; *F. Becke*, Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 73; *Viola*, N. Jahrb. f. Min. Beilageband 10 (1896), p. 167 und 497, wo die Ableitung mit Hilfe der Quaternionen geschieht; *V. v. Lang*, Wiener Berichte 105^{2a} (1896), p. 362; vgl. auch dessen Krystallographie 1866; *K. Rohn*, Abh. d. naturw. Ges. Isis, Dresden 1896, p. 72; *Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 27 (1897), p. 1; *v. Fedorow*, 28 (1897), p. 468; *G. Wulf*, Annuaire géol. et minéral. de la Russie, 2 (1897); *A. Schmidt*, Zeitschr. f. Kryst. 33 (1900), p. 620; *V. de Souza Brandão*, Neues Jahrb. f. Min. 1901, 2, p. 37; *G. Tschermak*, 39 (1904), p. 433. Vgl. auch Anm. 140.

H. Schoute giebt eine Ableitung aller Unterabteilungen des regulären Systems für den vierdimensionalen Raum: Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences, Bordeaux 1895.

94) Geht man von anderen Symmetrieaxen aus, als solchen, die ein Polyeder haben kann, so folgen daraus notwendig *unendlich viele* andere Axen, die

1) Die *zyklische Gruppe.* Sie entspricht einer Figur F, die nur *eine einzige* n-zählige Symmetrieaxe besitzt. Die Gruppe, die durch C_n bezeichnet werde, besteht aus den Potenzen derselben Operation $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ und enthält die Operationen

$$(3) \qquad \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}^2, \ldots, \mathfrak{A}^{n-1},\ \mathfrak{A}^n = 1.$$

Die Gruppe existiert für *jedes* n.[95])

2) Die *Diedergruppe*, ebenfalls für jedes n existierend. Die Figur F besitzt *eine* n-zählige Symmetrieaxe a (*Hauptaxe*) und n zu ihr senkrechte zweizählige Axen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (*Nebenaxen*)[96]); die Axen sind also identisch mit den sämtlichen Symmetrieaxen einer *Doppelpyramide.* Die Gruppe, die wir mit D_n bezeichnen, enthält die $2n$ Operationen

$$(4) \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}^2, \ldots, \mathfrak{A}^{n-1},\ \mathfrak{A}^n = 1, \\ \mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_{n-1},\ \mathfrak{U}_n. \end{array}$$

3) Die *Gruppen der regelmässigen Körper*, deren Symmetrie mit derjenigen der regelmässigen Körper identisch ist. Solcher giebt es drei: die *Tetraedergruppe* T, die dem Tetraeder entspricht und vier dreizählige und drei zweizählige Axen enthält; die *Oktaedergruppe* O, die dem Oktaeder und Würfel entspricht und drei vierzählige, vier dreizählige und sechs zweizählige Axen enthält; endlich die *Ikosaedergruppe* J, die dem Ikosaeder und Dodekaeder entspricht und deren Symmetrieaxen besitzt. Sie hat jedoch keine krystallographische Bedeutung[97]).

Für *Gruppen zweiter Art* sind zunächst folgende allgemeine Sätze zu erwähnen: 1) In jeder Gruppe zweiter Art giebt es gleich viele Deckoperationen erster wie zweiter Art. 2) Die Deckoperationen zweiter Art kann man erhalten, indem man die Deckoperationen erster Art mit einer und derselben, übrigens beliebigen Operation zweiter Art multipliziert. 3) Jede Gruppe zweiter Art entsteht, indem man zu einer Gruppe erster Art noch eine geeignete Symmetrieeigenschaft zweiter Art hinzufügt; sie muss der Bedingung genügen, dass die zugehörige Operation zweiter Art die Axen der Gruppe in

---

entweder der Symmetrie eines Kegels oder der einer Kugel entsprechen. Vgl. Anm 105.

95) Für $n = 1$ besteht die Gruppe nur aus der Identität, was mit einer einzähligen Axe identisch ist (Nr. 29).

96) Für $n = 2$ wird die Gruppe als *Vierergruppe* bezeichnet. Sie enthält drei zweizählige, zueinander senkrechte Axen. Wegen der Bezeichnungen vgl. *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884.

97) Für ihre mathematischen Eigenschaften vgl. das Citat in Anm. 96.

sich überführt. In dieser Weise sind alle Gruppen zweiter Art aus den Gruppen erster Art ableitbar[98]). Man erhält folgende Typen:

1) Solche, die aus den Gruppen erster Art durch Hinzufügung eines Symmetriezentrums oder einer Symmetrieebene entstehen; und zwar muss die Symmetrieebene zugleich Symmetrieebene für die Axen der bezüglichen Gruppe erster Art sein. So entstehen aus C_n die Gruppen C_n^h mit n-zähliger Axe und horizontaler, zur Axe senkrechter Symmetriebene[99]), die Gruppen C_n^v mit n vertikalen, durch die Axe gehenden Symmetrieebenen, und für *ungerades* n die Gruppen C_n^i mit n-zähliger Axe und einem Symmetriezentrum[100]). Aus D_n entstehen die Gruppen D_n^h mit einer horizontalen Symmetrieebene und n vertikalen, die durch die Nebenaxen gehen, und die Gruppen D_n^d mit n vertikalen Symmetrieebenen, die die Winkel der n Nebenaxen halbieren. Aus T entstehen zwei Gruppen T^h und T^d; die erste besitzt drei Symmetrieebenen, deren jede zwei zweizählige Axen verbindet, die zweite besitzt sechs Symmetrieebenen, die durch je zwei dreizählige Axen gehen. Endlich entsteht aus O eine Gruppe O^h, der sämtliche eben genannten Symmetrieebenen zukommen; eine analoge Gruppe entsteht aus J.

2) Solche, die eine *einzige* Symmetrieaxe zweiter Art enthalten. Sie entstehen, indem man die n-zählige Axe einer zyklischen oder Diedergruppe in eine $2n$-zählige Axe *zweiter Art* verwandelt. Sie existieren nur für *gerades* n und sollen durch S_{2n} resp. S_{2n}^u bezeichnet werden. Die so definierten Gruppen S_{2n}^u sind aber mit den Gruppen D_n^d identisch. Die Gruppen S_{2n} sind für *ungerades* n mit C_n^i identisch; neue Gruppen ergeben sich also nur für *gerades* n.[101])

Ein Symmetriezentrum enthalten die Gruppen $C_n^i = S_{2n}$ für *ungerades* n, die Gruppen C_n^h und D_n^h für *gerades* n, die Gruppen $D_n^d = S_{2n}^u$ für *ungerades* n und die Gruppen T^h und O^h. In allen diesen Gruppen sind wegen des Symmetriezentrums beide Richtungen einer jeden Axe gleichwertig[83]).

32. Gruppentheoretische Systematik der Krystalle. Mit Rücksicht auf das Gesetz der rationalen Indices können von den vorstehenden Symmetriegruppen nur solche die Symmetrie eines wirk-

98) Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. Daher ergeben sich manche Gruppen zweiter Art im Folgenden mehrfach.

99) Die n-zählige Axe von C_n und D_n denke man sich vertikal.

100) Für *gerades* n ist C_n^i mit C_n^h identisch; vgl. Anm. 98.

101) Die Gruppen S_{2n} für gerades n sind diejenigen, die bei *Bravais* fehlen. Dies liegt daran, dass er meinte, mit den damals bekannten Symmetrieeigenschaften (Punkt, Axe, Ebene der Symmetrie) auszukommen. Vgl. Anm. 93.

lichen Krystalles darstellen, in denen 2-, 3-, 4- und 6-zählige Axen auftreten. Die Zahl der so definierten möglichen Krystallklassen ist 32.

Die Krystallklassen lassen sich auch in der Weise in *Systeme* einteilen, dass man diejenigen zusammenfasst, die in gewissen Symmetrieaxen übereinstimmen. Gegenüber der historisch und praktisch entstandenen Einteilung, die sich übrigens auch an der Hand der Gittertheorien einstellt (Nr. **36**), ist diese Systematik insofern eine einheitliche, als sie nach einem einzigen Prinzip erfolgt. Doch ist zu bemerken, dass keine Systematik etwas absolut zwingendes besitzt, da die Art, wie man Krystalle verschiedener Symmetrie zu einer Gesamtklasse vereinigen will, teilweise subjektivem Ermessen unterliegt. Die Einteilung in Systeme ist daher auch nicht überall die gleiche[102]).

Von dem eben genannten Standpunkt aus kommt man zu folgenden *sechs* einheitlich definierten Systemen:

1) *Reguläres System*; die Symmetrie ist durch die Axen der Tetraeder- und Oktaedergruppe charakterisiert. Ihm gehören die Gruppen O^h, O, T^h, T^d und T an.

2) *Hexagonales System*, durch eine sechszählige Hauptaxe charakterisiert; zu ihm gehören die Gruppen D_6^h, D_6, C_6^h, C_6^v, C_6, S_6^u, S_6.

3) *Tetragonales System*, mit vierzähliger Hauptaxe und den Gruppen D_4^h, D_4, C_4^h, C_4^v, C_4, S_4^u, S_4.

4) *Trigonales System*, mit dreizähliger Hauptaxe und den Gruppen D_3^h, D_3, C_3^h, C_3^v, C_3.

5) *Digonales System*, mit nur zweizähligen Axen und den Gruppen D_2^h, D_2, C_2^h, C_2^v, C_2, S_2[103]).

6) *Monogonales System*, ohne jede Axe, mit den Gruppen C_1^h und C_1, wo C_1^h nur eine Symmetrieebene enthält und C_1 eine Gruppe ohne jede Symmetrie ist (die also nur die Identität enthält)[95]).

Der Unterschied zwischen der vorstehenden Einteilung und der historischen ist folgender:

Von den Gruppen des vorstehenden hexagonalen und trigonalen Systems pflegt man die Gruppen D_6^h, D_6, C_6^h, C_6^v, C_6, D_3^h, D_3 dem

102) Von neueren Arbeiten über Abgrenzung und Definition der Krystallsysteme, bei denen übrigens die Symmetrie nicht mehr den alleinigen Einteilungsgrund abgiebt, und für eine damit zusammenhängende Bevorzugung des Syngoniebegriffs vgl. *Fedorow,* Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 107; 24 (1895), p. 605; 28 (1897), p. 36; 29 (1898), p. 654; *Goldschmidt,* 31 (1899), p. 135; 32 (1900), p. 49; *de Souza Brandão,* Neues Jahrb. f. Min. 1901, 2 p. 37; *G. Friedel,* Bull. soc. franc. de minéral. 28 (1905), p. 142.

103) Die Gruppe S_2 besitzt nur ein Symmetriezentrum, das gemäss Anm. 19 mit einer zweizähligen Axe zweiter Art identisch ist.

hexagonalen System zuzurechnen, und die Gruppen D_3^d, D_3, C_3^h, C_3^v, C_3 als *rhomboedrisches System* zusammenzufassen resp. als rhomboedrische Unterabteilung des hexagonalen Systems. Ferner teilt man die Gruppen des digonalen und monogonalen Systems in *drei* Systeme, in das *rhombische* mit den Gruppen D_2^h, D_2, C_2^v, das *monokline* mit den Gruppen C_2^h, C_2, C_1^h und das *trikline* mit den Gruppen S_2 und C_1.

33. Die Unterabteilungen der Krystallsysteme. Für jede dieser Einteilungen giebt es in jedem System eine Gruppe höchster Symmetrie; sie heisst die *Hauptgruppe* oder *Holoedrie*; die andern Gruppen sind Untergruppen der Hauptgruppe (Nr. **30**) und enthalten entweder die Hälfte oder nur den vierten Teil der Deckoperationen der Hauptgruppe. Sie heissen demgemäss *Hemiedrie* resp. *Tetartoedrie.* Die zugehörigen Krystallformen besitzen ebenfalls nur die Hälfte resp. den vierten Teil der Flächen der holoedrischen Krystallform. Werden die rhomboedrischen Krystalle als Unterabteilung des hexagonalen Systems betrachtet, so giebt es eine Gruppe des hexagonalen Systems, nämlich C_3, die nur den achten Teil der Operationen der Hauptgruppe D_6^h enthält; sie wird als *Ogdoedrie* bezeichnet. Die den einzelnen Untergruppen zukommenden Bezeichnungen stimmen nicht bei allen Forschern überein und hängen teilweise von der Gestalt der Krystallform ab.

Hemiedrien und Tetartoedrien, die nur aus Deck*bewegungen* bestehen, insbesondere also diejenigen Hemiedrien, die *alle* Deckbewegungen der Hauptgruppe enthalten, pflegt man *enantiomorph* zu nennen. Den zugehörigen Krystallklassen kommt nur *Axensymmetrie* zu, aber keine Symmetrieeigenschaft zweiter Art, und die zugehörige allgemeine Krystallform ist sich daher nicht selbst spiegelbildlich gleich. Hier können daher Krystallindividuen auftreten, von denen das eine das Spiegelbild des anderen ist, die sich also durch einen Links- resp. Rechtssinn unterscheiden.

34. Die Symmetrie der einzelnen physikalischen Erscheinungen. Die physikalischen Erscheinungen eines Krystalles stimmen jedenfalls längs je N gleichwertiger Richtungen überein. Sie zerfallen überdies in zwei verschiedene Klassen, je nachdem sie ihrer Natur nach in entgegengesetzten Richtungen übereinstimmen oder nicht; im letzten Fall werden sie auch als Erscheinungen *polarer* Natur bezeichnet. Beispiele der ersten Art sind die Ausdehnungserscheinungen, Beispiele der zweiten Art die pyroelektrischen. Im ersten Fall besitzen sie ein Symmetriezentrum, auch wenn die für den Krystall charakteristische Symmetrie ein solches nicht enthält. Die Symmetriegruppe derjenigen physikalischen Eigenschaften, denen ausser der Krystallgruppe noch ein Symmetriezentrum zukommt, ergiebt sich, indem man die Krystallgruppe mit einer Inversion multipliziert (Nr. **31**). Für solche physikalischen Eigenschaften werden sich daher mehrere Krystallklassen auf eine einzige reduzieren; es bleiben nur diejenigen übrig, die bereits in Nr. **31** als mit einem Symmetriezentrum behaftet aufgeführt wurden, nämlich die Gruppen O^h und T^h vom regulären System, D_6^h und C_6^h vom hexagonalen, D_4^h und C_4^h vom tetragonalen, D_3^d und C_3^i vom rhomboedrischen, D_2^h und C_2^h vom rhombischen und die Gruppe S_2 vom monoklinen System.

In mancher physikalischen Hinsicht können sich die 32 Klassen noch weiter reduzieren. So ist für gewisse optische Erscheinungen die Krystallsymmetrie stets mit der Symmetrie einer zentrischen Fläche zweiter Ordnung, nämlich eines Ellipsoids, identisch. Ein solches ist entweder eine Kugel, ein Rotationsellipsoid oder ein dreiaxiges Ellipsoid. Demgemäss besitzen in dieser Hinsicht die Krystalle des regulären Systems die Kugelsymmetrie, die des hexagonalen, tetragonalen und rhomboedrischen Systems die Symmetrie eines Rotationsellipsoids und die übrigen die Symmetrie eines dreiaxigen Ellipsoids[104]).

Allgemein gilt der Satz, dass die Symmetriegruppe, die einem Krystall in Bezug auf eine gewisse physikalische Eigenschaft zukommt, immer dann mit der spezifischen Symmetriegruppe des Krystalles identisch ist, wenn die physikalische Eigenschaft *keine* Eigensymmetrie besitzt, was z. B. für die pyroelektrischen Erscheinungen der Fall ist. Wenn aber der physikalischen Eigenschaft eine gewisse Eigensymmetrie zukommt, so besitzt der Krystall bezüglich dieser Eigenschaft diejenige Symmetrie, die aus der Verbindung dieser spezifischen Symmetrie mit der Krystallsymmetrie besteht[105]).

II. Die Strukturtheorien und die 230 Strukturgruppen.

35. Die Raumgitter und die Gruppen von Translationen. Wie in Nr. **26** erwähnt wurde, führen die Strukturtheorien auf das mathematische Problem, alle möglichen *regelmässigen Molekelanordnungen* resp. alle *regelmässigen Punktsysteme* zu bestimmen.

104) Nach der Lage des Ellipsoids zum Krystall hat man *fünf* Klassen zu unterscheiden. Für weitere Beispiele vgl. *Schoenflies,* Krystallsysteme, p. 227 ff.; *Hilton,* Cristallography, p. 98 ff.

105) Diese Symmetrie braucht nicht immer eine der 32 Klassen zu sein, wie es in dem obigen Beispiel der Fall ist, wo die Symmetrie einer Kugel auftritt. Vgl. Anm. 94.