die auf Symmetrieebenen senkrecht stehen, oder sonst im Krystall ausgezeichnet sind, die aber nicht in allen Fällen Symmetrieaxen waren. Erst in neuerer Zeit ist die Benutzung von Symmetrieaxen, sowie überhaupt die Charakterisierung der Krystalle durch ihre Symmetrie, allgemeiner geworden. Demgemäss pflegen die Krystallographen die Krystalle folgendermassen in Systeme zu teilen:

1) *Reguläre* (*kubische, tesserale*) Krystalle; vier dreizählige Axen. 2) *Hexagonale* Krystalle; eine dreizählige oder sechszählige Axe. 3) *Tetragonale* Krystalle; eine vierzählige Axe. 4) *Rhombische* Krystalle; drei zueinander senkrechte ungleiche Axen. 5) *Monokline* Krystalle; eine ausgezeichnete Axe. 6) *Trikline* Krystalle; keine ausgezeichnete Richtung.

Im hexagonalen System werden die Krystalle mit dreizähliger Axe vielfach auch als *rhomboedrisches Krystallsystem* oder doch als *rhomboedrische Unterabteilung* des hexagonalen Systems bezeichnet.

Was die *Symmetrie* dieser Systeme betrifft, so ist die des rhombischen und monoklinen Systems nicht mehr einheitlich bestimmt. Die drei Axen des rhombischen Systems sind nicht für alle Krystalle zugleich zweizählige Symmetrieaxen, ebenso ist im monoklinen System nicht bei allen Krystallen eine zweizählige Symmetrieaxe vorhanden. (Vgl. Nr. **32**.)

Die vorstehende Einteilung in sechs resp. sieben Systeme findet übrigens in den Strukturtheorien eine wesentliche Stütze (Nr. **36**).

29. Die Deckoperationen und ihre Zusammensetzung. Die *mathematische* Theorie fasst, zumal mit Rücksicht auf die Strukturtheorien, ausser den Symmetrieeigenschaften auch die *Deckoperationen* ins Auge, in denen die Symmetrieeigenschaften gemäss dem Vorstehenden ihren Ausdruck finden. Der Symmetrieaxe entspricht eine *Drehung*; wir bezeichnen sie, falls sie um die Axe a stattfindet, durch $\mathfrak{A}(\alpha)$, wo α der Drehungswinkel ist; falls die Axe n-zählig ist, durch $\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$; ist insbesondere $n = 2$, also π der Drehungswinkel, so bezeichnen wir die Drehung auch als *Umwendung* $\mathfrak{U}$. Die drei anderen bezüglichen Deckoperationen heissen *Spiegelung*, *Inversion* und *Drehspiegelung*[89]), wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{A}}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, wenn a

89) Vgl. *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstruktur, p. 29. Für $n = 2$ ist die Drehspiegelung mit der Inversion identisch. Eine zweizählige Axe zweiter Art ist daher einem Symmetriecentrum äquivalent.

Statt der Drehspiegelung kann auch eine Drehung in Verbindung mit einer Inversion benutzt werden; vgl. *Minnigerode*, Neues Jahrb. f. Min. Beilagebd. 5 (1887), p. 145, u. 1894, 1, p. 92.

wieder eine n-zählige Axe ist. Sie heissen auch Deckoperationen *zweiter Art*, während man die Drehung auch *Deckbewegung* oder Deckoperation *erster Art* nennt.

Theoretisch ist es wichtig, auch diejenigen Deckoperationen zu betrachten, bei denen jede Richtung von F mit sich selbst zur Deckung gelangt. Man bezeichnet sie als *Identität* und hat dafür das Zeichen 1 eingeführt; es deutet an, dass diese Deckungsart auch so herstellbar ist, dass F in Ruhe bleibt.

Die zur Figur F zugehörige einfache Krystallform kann man in N Teilfiguren zerlegen, die bei jeder Deckoperation ineinander übergeführt werden. Sind alle Deckoperationen Drehungen, so sind alle Teilfiguren kongruent, im andern Fall sind sie teils kongruent, teils spiegelbildlich gleich.

Seien nun $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ irgend zwei Deckoperationen der Figur F. Wird dann auf F zunächst die Operation $\mathfrak{L}$ und dann die Operation $\mathfrak{M}$ angewandt, so wird F in der Endlage ebenfalls mit sich zur Deckung gelangt sein. Wir haben damit eine *neue* Deckoperation $\mathfrak{N}$ von F definiert, die in der Aufeinanderfolge resp. in der Verbindung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ besteht, die man *Produkt* von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ nennt und durch $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ bezeichnet[90]). Diese Definition soll auch in dem Fall gelten, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die gleiche Deckoperation bedeuten; alsdann bezeichnet man $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^3$ u. s. w. und nennt $\mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}^3, \ldots$ *Potenzen* von $\mathfrak{L}$.[91])

Für die durch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ bestimmte Operation $\mathfrak{N}$ bestehen in den einfachsten Fällen folgende Sätze, die sich unmittelbar ergeben, wenn man eine von O ausgehende Gerade nacheinander den bezüglichen Operationen unterwirft und die Endlage mit der Anfangslage vergleicht.

1) Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ zwei Spiegelungen an den Ebenen σ und σ_1, ist a ihre Schnittlinie und $\sphericalangle(\sigma\sigma_1) = \alpha$, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{A}(2\alpha)$. 2) Ist die Ebene σ senkrecht zur Axe u, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{J} = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$. 3) Ist a eine Symmetrieaxe zweiter Art und σ die zu ihr senkrechte Ebene, so ist gemäss der Definition $\bar{\mathfrak{A}}(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha)\mathfrak{S}$; auch ist $\bar{\mathfrak{A}}^2(\alpha) = \mathfrak{A}(2\alpha)$.

Diese Sätze bilden zugleich die Quelle derjenigen Gesetze, die wir oben (Nr. 27) für die Symmetrieeigenschaften ausgesprochen haben.

---

90) Die Operationen, die durch $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ dargestellt werden, sind im allgemeinen verschieden.

91) Ist $\mathfrak{L}$ eine Drehung, so stellen also $\mathfrak{L}^2$ und $\mathfrak{L}^3$ eine Drehung um den doppelten und dreifachen Winkel dar.

Ferner bestehen folgende Sätze allgemeiner Art, die unmittelbar evident sind: 1) Das Produkt von zwei Operationen erster Art oder zwei Operationen zweiter Art ist eine Operation erster Art. 2) Das Produkt aus einer Operation erster Art und einer Operation zweiter Art ist eine Operation zweiter Art.

Endlich erwähne ich noch folgendes:

Für jede Deckoperation giebt es eine endliche Zahl von Wiederholungen, die die Figur F in ihre Anfangslage zurückführt; anders ausgedrückt, es existiert für jede Deckoperation eine gewisse *Potenz*, die die *Identität* liefert. Insbesondere ist:

$$\mathfrak{S}^2 = 1, \quad \mathfrak{J}^2 = 1, \quad \mathfrak{U}^2 = 1. \tag{1}$$

Ist ferner a eine n-zählige Axe, so hat man um a die Drehungen

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^2, \ldots, \mathfrak{A}^{n-1}, \quad \mathfrak{A}^n = 1,$$

und wenn a eine $2n$-zählige Axe zweiter Art ist, so hat man die Drehspiegelungen

$$\overline{\mathfrak{A}}, \quad \overline{\mathfrak{A}}^3, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}^{2n-1}$$

und die Drehungen

$$\overline{\mathfrak{A}}^2, \quad \overline{\mathfrak{A}}^4, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}^{2n-2}, \quad \overline{\mathfrak{A}}^{2n} = 1.$$

30. Der Gruppenbegriff. Bezeichnet man durch

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots \tag{2}$$

die *sämtlichen* voneinander verschiedenen Deckoperationen einer Figur F, so muss die Deckoperation, die durch das Produkt aus zweien oder mehreren von ihnen dargestellt wird, ebenfalls in der Reihe (2) auftreten. Die Reihe enthält also auch jede Potenz der Operationen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$ und daher auch (Nr. **29**) die Identität. Dies ist diejenige Eigenschaft, die man als *Gruppeneigenschaft* bezeichnet; man sagt, dass die obigen Operationen eine *Gruppe* G bilden[92]). Geht man zu den Symmetrieeigenschaften zurück, so heisst dies, dass jede Symmetrieeigenschaft in der Reihe auftritt, die durch irgend zwei von ihnen gemäss Nr. **27** bedingt wird.

Für die Beziehung der Figur F resp. der allgemeinen Krystallform zu der vorstehenden Gruppe gilt der Satz: Wird irgend eine durch den Mittelpunkt der Krystallform gehende Richtung den N Operationen der Gruppe unterworfen, so entstehen stets N gleichwertige Richtungen; analog entstehen sämtliche Flächen der Krystallform, wenn eine von ihnen allen Operationen der Gruppe unterworfen wird. Das Gleiche gilt für die N Teile, in die man die Krystallform gemäss Nr. **29** zerlegen kann.

---

92) Näheres findet man in Bd. I 1 6 dieser Encyklopädie.