der *geometrischen Summe* an, so ist jede Translation τ, die zwei Gitterpunkte verbindet, in der Form

$$\tau = m_1 \tau_x + m_2 \tau_y + m_3 \tau_z \tag{5}$$

darstellbar, wo m_1, m_2, m_3 irgendwelche positive oder negative ganze Zahlen sind. Diese Gleichung besagt, dass die Lagenänderung, die durch die Translation τ herbeigeführt wird, mit derjenigen äquivalent ist, die durch m_1-malige Folge der Translation τ_x, m_2-malige von τ_y und m_3-malige von τ_z entsteht.

Es ist klar, dass alle Translationen, die ein Gitter in sich überführen, eine Gruppe bilden; zu jedem Gitter gehört also eine Translationsgruppe. Es ist aber auch das Umgekehrte der Fall. Geht man nämlich von irgend drei Translationen τ_x, τ_y, τ_z aus, die ein Parallelepipedon Π bestimmen und unterwirft dies den sämtlichen durch die Gleichung (5) definierten Translationen, so bilden die Ecken aller aus ihm hervorgehenden Parallelepipeda dasjenige Raumgitter, dessen drei erzeugende Ebenenscharen den Seitenflächen von Π parallel sind, und sämtliche Translationen, die dies Raumgitter in sich überführen, sind mit denen von Gleichung (5) identisch.

36. Einteilung der Raumgitter nach der Symmetrie. Man kann den Raumgittern Symmetrieeigenschaften erteilen, wenn man das Parallelepipedon Π geeignet wählt, und zwar so, dass es selbst eine gewisse Symmetrie besitzt. Wir bezeichnen es als das *charakteristische* Parallelepipedon. Wählt man z. B. Π als gerade quadratische Säule und legt durch die Mitte dieser Säule alle ihre Symmetrieaxen und Symmetrieebenen, so sind sie zugleich Symmetrieaxen und Symmetrieebenen des Raumgitters; das Gleiche gilt für die Mitte einer jeden derartigen Säule und sogar auch für ihre Eckpunkte.

Die Aufgabe, alle in Bezug auf die Symmetrie zu unterscheidenden Raumgitter zu finden[109]), führt zu folgenden *vierzehn* Typen.

1) Die Gitter vom *regulären Typus*. Deren giebt es drei Arten. Die einfachste besteht aus lauter Würfeln, deren Ecken die Gitterpunkte bilden. Die andern ergeben sich, wenn man noch die Mitten der Würfel oder die Mitten der Seitenflächen hinzufügt; das charakteristische Parallelepipedon ist in beiden Fällen ein Rhomboeder[110]).

---

109) Diese Aufgabe wurde zuerst von *M. L. Frankenheim* behandelt; vgl. die Lehre von der Cohäsion, Breslau, 1835, p. 311, und System der Krystalle, Nova Acta Leopoldina 29 (1842), p. 483. Eine zweite elegante Lösung gab ***A. Bravais***, Journ. éc. polyt. 19, Heft 33 (1850), p. 1. Die Lösung von *Frankenheim* enthält ein Versehen, vgl. Anm. 42. Vgl. auch *L. Sohncke*, Ann. Phys. Chem. 132 (1867), p. 75.

110) Damit ist gemeint, dass alle Flächen von Π Rhomben sind; ein reguläres Rhomboeder ist es nicht.

2) Die Gitter vom *hexagonalen Typus.* Es giebt nur eine Art. Das charakteristische Parallelepipedon ist eine gerade rhombische Säule; die in eine und dieselbe Ebene fallenden Grundflächen bilden ein rhombisches Netz, das zugleich ein Netz von regulären Dreiecken oder auch von zentrirten regulären Sechsecken darstellt.

3) Die Gitter vom *tetragonalen Typus.* Es giebt zwei Arten. Die einfachste ist aus quadratischen Säulen aufgebaut, die andere entsteht, wenn man noch die Säulenmitten hinzufügt. Für sie ist das charakteristische Parallelepipedon wieder ein Rhomboeder.

4) Gitter vom *rhomboedrischen Typus.* Es giebt nur eine Art, das Gitter ist aus regulären Rhomboedern aufgebaut.

5) Gitter vom *rhombischen Typus.* Es giebt vier Arten. Die einfachste ist aus lauter rechtwinkligen Parallepipeden aufgebaut. Zwei andere entstehen aus ihr, indem man die Mitten der Parallelepipeda oder die Mitten ihrer Seitenflächen hinzufügt, und die vierte Art ist aus geraden rhombischen Säulen aufgebaut.

6) Gitter vom *monoklinen Typus.* Es giebt zwei Arten. Die einfachste ist aus geraden Parallelepipeden mit beliebiger Grundfläche aufgebaut, die andere entsteht aus ihm durch Hinzufügung der Mitten oder auch der Mitten der Seitenflächen[111]). Im ersten Falle heisst das charakteristische Parallelepipedon eine rhomboidische Säule, im zweiten eine klinorhombische Säule.

7) Gitter vom *triklinen Typus,* die aus beliebigen Parallelepipeden aufgebaut sind.

Jedem dieser Gitter kommt als spezifische Symmetrie die holoedrische Symmetrie desjenigen Krystallsystems zu, dem sein Name entspricht, was man am Aufbau des Gitters unmittelbar erkennt.

Die Raumgitter zerfallen also ihrer Symmetrie nach in die nämlichen sieben Klassen, die die empirisch gewonnene Einteilung der Krystalle geliefert hat. Diese bemerkenswerte Thatsache hat den Ausgangspunkt der neueren Strukturtheorien abgegeben. Es war *Bravais,* der es verstand, dies zunächst rein geometrische Resultat krystallographisch zu verwerten und darauf eine für alle 32 Klassen gleichmässig angelegte molekulare Theorie zu gründen.

37. **Die Bravais'sche Theorie.** *R. J. Haüy*[112]) ging von der Vorstellung aus, dass die kleinsten individuellen Teile der Krystalle (molécules intégrantes) eine Form haben, die durch ihre Hauptspaltungs-

---

111) Dies Gitter ist bei *Frankenheim* doppelt gezählt; vgl. Anm. 40.

112) Essai d'une théorie sur la structure des cristaux, Paris 1784, sowie Traité de minéralogie, Paris 1801.