

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0276

LOG Titel: 42. Die Bewegungsgruppen und die Gruppen zweiter Art

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

dass ihr n -faches eine Decktranslation des Molekelhaufens ist. Auch die so definierte Schraubungsaxe muss als eine n -zählige *Symmetrieaxe* des Molekelhaufens angesehen werden, da der Molekelhaufen als allseitig unbegrenzt angenommen wird (vgl. Nr. 26). Es giebt Fälle, in denen Drehungsaxen überhaupt fehlen und nur Schraubenaxen auftreten.

Von Operationen zweiter Art kann ausser den drei in Nr. 29 erwähnten noch eine *Spiegelung* an einer Ebene auftreten, die mit einer *Gleitung* längs dieser Ebene verbunden ist. (*Ebene gleitender Symmetrie.*) Die Gleitung t ist immer die Hälfte einer dem Molekelhaufen zukommenden Decktranslation τ . Auch diese Ebene muss als *Symmetrieebene* von ihm betrachtet werden; es kann vorkommen, dass Symmetrieebenen ganz fehlen und nur Ebenen gleitender Symmetrie auftreten.

Ist $\mathfrak{S}(t)$ die eben definierte Operation, so ist $\mathfrak{S}^2 = 2t = \tau$; ist ferner \mathfrak{A} die Schraubung um eine n -zählige Axe, so ist $\mathfrak{A}^n = nt = \tau$. In diesen Gleichungen finden die vorstehenden Definitionen ihren mathematischen Ausdruck.

42. Die Bewegungsgruppen und die Gruppen zweiter Art. Deckoperationen giebt es bei einem regulären Punktsystem immer unendlich viele. Die Zahl der zugehörigen Symmetrieaxen und Symmetrieebenen ist gleichfalls unendlich gross, und von der Art und Verteilung dieser Axen und Ebenen im Raum wird offenbar die Symmetrieart des Punktsystems resp. des Molekelhaufens abhängen. Die genauere Analyse dieser Frage führt wieder auf den Gruppenbegriff. Werden nämlich zwei Deckoperationen eines Punktsystems hintereinander ausgeführt, so stellen sie offenbar wieder eine Deckoperation dar; die Deckoperationen besitzen daher *Gruppencharakter* (Nr. 30), und es giebt auch für jedes regelmässige Punktsystem eine *ihm zugehörige Gruppe von Deckoperationen*. Auch hier besteht der Satz, dass man alle Punkte eines regelmässigen Punktsystems erhält, wenn man irgend einen Raumpunkt den sämtlichen Operationen der bezüglichen Gruppe unterwirft. Die Begriffe des regelmässigen Punktsystems resp. des regelmässigen Molekelhaufens und der Gruppe von Deckoperationen sind also *äquivalent*, und die Aufgabe, alle Gattungen regelmässiger Molekelhaufen zu finden, ist daher gleichwertig mit der Aufgabe, *alle räumlichen Gruppen von Deckoperationen* zu bestimmen.

Selbstverständlich sind nur solche Raumgruppen krystallographisch brauchbar, deren Punktsysteme sich allseitig unbegrenzt erstrecken und deren Punkte nicht unendlich nahe aneinander kommen können¹²⁹⁾.

129) D. h. der Abstand zweier Punkte muss oberhalb einer endlichen Grösse bleiben, nämlich der Dimension der Molekeln.

Die Punkte sind ja Vertreter der Molekeln und je zwei Molekeln müssen ausserhalb von einander liegen.

Alle Punkte, die aus einem Ausgangspunkt durch alle Operationen der Gruppe hervorgehen, sollen *homologe* Punkte heissen.

Die *Bewegungsgruppen*, d. h. diejenigen, die nur Bewegungen enthalten, sind zuerst von *C. Jordan*¹³⁰⁾ abgeleitet worden, später nochmals von *Sohncke*⁷⁶⁾, der verschiedene Irrtümer der *Jordan'schen* Resultate berichtigte. Solcher Gruppen giebt es 65.¹³¹⁾ Die Gruppen, die auch Deckoperationen zweiter Art enthalten, wurden von *A. Schoenflies*¹³²⁾ und *v. Fedorow*¹³³⁾ bestimmt. Solcher giebt es 165, so dass es insgesamt 230 krystallographisch verwendbare Gruppen giebt, d. h. solche, die den beiden am Ende der Nr. 41 aufgestellten Bedingungen genügen¹³⁴⁾. Für diese Gruppen und die zu ihnen gehörigen Molekelhaufen gelten folgende Sätze¹³⁵⁾.

1) Jeder zu einer der 230 Gruppen \mathcal{G} gehörige Molekelhaufen entsteht, indem man eine beliebige Molekel den sämtlichen Operationen der Gruppe unterwirft.

2) Jede der 230 Gruppen enthält unter ihren Deckoperationen unendlich viele Translationen, die eine Gruppe bilden und ein Raumgitter bestimmen¹³⁶⁾. In jedem regelmässigen Molekelhaufen sind daher auch solche Molekeln enthalten, deren Centra ein Gitter bilden. Diese Translationsgruppe heisse \mathcal{L} .

3) Jede der 230 Gruppen ist einer der 32 Punktgruppen *isomorph*, worunter folgendes zu verstehen ist. Sei G eine dieser 32 Gruppen und \mathcal{G} eine ihr isomorphe Raumgruppe. Enthält dann G irgend eine n -zählige Symmetrieaxe a , so giebt es in \mathcal{G} unendlich viele zu a *parallele* n -zählige Symmetrieaxen, die gemäss Nr. 41 Drehungsaxen wie Schraubenaxen sein können. Enthält G ferner eine Symmetrieebene, so enthält \mathcal{G} unendlich viele ihr *parallele* Symmetrieebenen,

130) Ann. di matemat. (2) 2 (1869), p. 167 u. 322.

131) Bei *Sohncke* treten noch 66 Gruppen auf, da eine doppelt gezählt ist.

132) Math. Ann. 28 (1887), p. 319; 29 (1887), p. 50 u. 34 (1889), p. 173.

133) Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, Petersburg 1890 (russisch). Die Notwendigkeit, auch diese Gruppen in Betracht zu ziehen, wurde von *Fedorow* schon in seiner Gestaltenlehre (1885) betont.

134) Eine Aufzählung und Beschreibung der Gruppen sowie ihrer Symmetrieelemente giebt auch *Barlow*, Zeitschr. f. Kryst. 23 (1894), p. 1; eine vergleichende Zusammenstellung giebt *H. Hilton*, Centralbl. f. Mineral. 1901, p. 746.

135) Für diese Sätze vgl. *Schoenflies*, Krystalsysteme, und *H. Hilton*, Crystallography.

136) Vgl. auch *K. Rohn*, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 51 (1899), p. 445 u. Math. Ann. 53 (1900), p. 440.

die (Nr. 41) auch Ebenen gleitender Symmetrie sein können. Enthält G ein Symmetriecentrum, oder eine n -zählige Axe zweiter Art a' , so enthält \mathcal{G} unendlich viele Symmetriecentren resp. unendlich viele zu a' parallele n -zählige Axen zweiter Art.

4) Dies lässt sich auch so ausdrücken. Seien

$$(6) \quad \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$$

die Operationen von G , an Zahl N , so entsprechen jeder einzelnen von ihnen unendlich viele gleichartige Operationen von \mathcal{G} . Ist z. B. \mathcal{L} eine Drehung $\mathcal{R}(\alpha)$, so giebt es in \mathcal{G} unendlich viele Drehungen oder Schraubungen vom gleichen Winkel um parallele Axen, und zwar erhält man *alle* diese Drehungen oder Schraubungen, indem man irgend eine von ihnen mit sämtlichen Translationen, die in \mathcal{G} enthalten sind, multipliziert (Nr. 29). Wählt man nun je unter diesen unendlich vielen gleichartigen Operationen von \mathcal{G} je eine einzelne aus, und sind

$$(7) \quad \mathcal{L}', \mathcal{M}', \mathcal{N}' \dots$$

N derartige Operationen, so erhält man dem Vorstehenden gemäss *alle* Operationen von \mathcal{G} , indem man noch jede der Operationen (7) mit den *sämtlichen* Translationen der in \mathcal{G} enthaltenen Translationsgruppe \mathcal{T} multipliziert.

5) Sei m die der Gruppe G entsprechende symmetrische Bravais'sche Molekel, so kann man sie gemäss Nr. 30 so entstehen lassen, dass man irgend einen ihrer N Teile den Operationen (6) unterwirft. Wenn man nun irgend eine Molekel zunächst den Operationen 7) unterwirft, so ergibt sich dadurch gemäss 4) ein Komplex von N Molekeln, dessen Individuen zu den N Teilen von m parallel orientiert sind¹³⁷⁾. Unterwirft man nun diesen Komplex noch den sämtlichen Translationen von \mathcal{T} , so dass er sich gitterartig im Raum wiederholt, so entstehen alsdann gemäss 4) die *sämtlichen* Molekeln des zu \mathcal{G} gehörigen Molekelhaufens. Die *Orientierung* der Molekeln ist daher für alle Gruppen \mathcal{G} , die derselben Punktgruppe G isomorph sind, die *gleiche* und zwar diejenige, die bei der Auflösung eines Molekelgitters in einen allgemeineren Molekelhaufen entsteht.

Da der zu \mathcal{G} gehörige Molekelhaufen so erzeugt werden kann, dass man von einem gewissen Komplex von N Molekeln ausgeht und ihn allen Translationen von \mathcal{T} unterwirft, sagt man auch, dass der

137) Der Komplex entsteht also immer dadurch aus den N Individuen einer symmetrischen Molekel Bravais', dass man diese N Individuen parallel mit sich um geeignete kleine Strecken verschiebt. Bei den einfachsten Gruppen \mathcal{G} reduzieren sich diese Verschiebungen auf Null, und der Komplex ist mit der Molekel von Bravais identisch.

Molekelhaufen resp. das zugehörige Punktsystem aus N *ineinander gestellten Gittern* besteht.

6) Die in Nr. 31 abgeleiteten Sätze über Punktgruppen übertragen sich auf die räumlichen Gruppen. In jeder Raumgruppe \mathcal{G} , die auch Operationen zweiter Art enthält, bilden die in sie eingehenden Bewegungen eine Untergruppe \mathcal{G}' , und auch hier können die Deckoperationen zweiter Art von \mathcal{G} so erhalten werden, dass man zu ihren Bewegungen noch eine geeignete Operation zweiter Art hinzufügt. Der Hauptwert dieses Satzes besteht darin, dass man an ihm eine Methode hat, um sämtliche Gruppen \mathcal{G} zweiter Art abzuleiten. Um nämlich aus einer der 65 Bewegungsgruppen \mathcal{G}' eine Gruppe zweiter Art zu erhalten, kann man zu ihr jede Operation zweiter Art hinzufügen, die die sämtlichen Axen der Gruppe \mathcal{G}' ineinander überführt¹³⁸).

43. Die reine Strukturtheorie. Aus den vorstehenden Gruppensätzen ergeben sich für die zu ihnen gehörigen Molekelhaufen die folgenden Eigenschaften.

1) Die Ausgangsmolekeln, aus denen sie gebildet sind, sind durchaus beliebig. Die konstituierenden Bausteine der Krystalsubstanz unterliegen also keinerlei geometrischer oder physikalischer Beschränkung. Sie können durchaus asymmetrisch sein¹³⁹) und auch selbst wieder atomistisch aus einzelnen Teilchen bestehen u. s. w. (Vgl. auch Nr. 45.)

2) Die in jeder Gruppe \mathcal{G} enthaltene Translationsgruppe \mathfrak{T} bewirkt, dass der für die *Bravais'sche* Theorie abgeleitete Satz von der *krystallographischen Gleichwertigkeit aller parallelen Richtungen*, sowie die Geltung des Gesetzes der rationalen Indices auch hier zutrifft.

3) Aus dem Isomorphismus zwischen der Gruppe \mathcal{G} und der Gruppe G folgt, dass dem zu \mathcal{G} gehörigen Molekelhaufen genau die *Symmetrie der Gruppe G zukommt*. Dazu betrachte man die Figur F der N gleichwertigen Richtungen der Gruppe G und bezeichne die Geraden, die aus einer Richtung g durch die Operationen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \dots$ von G hervorgehen, mit g_1, g_m, g_n, \dots . Ist dann g' irgend eine zu g parallele Gerade des Raumes, so werden die unendlich vielen Geraden

138) Diese Methode kann man auch benutzen, um die 65 Bewegungsgruppen zu erhalten. Ist \mathcal{G}' eine solche von niederer Symmetrie, so erhält man eine von höherer Symmetrie, indem man zu \mathcal{G}' eine Axe hinzufügt, die Symmetrieaxe für alle Axen von \mathcal{G}' ist.

139) Dies wird neuerdings auch von den Krystallographen mehrfach gefordert. Vgl. z. B. *Viola*, Zeitschr. f. Kryst. 31 (1899), p. 109 und *Beckenkamp*, 32 (1900), p. 48.

g'_i , die aus g' durch die unendlich vielen Operationen \mathcal{L}' hervorgehen, zu g_i parallel sein, ebenso alle Geraden g'_m zu g_m u. s. w. Die zu einander krystallographisch gleichwertigen Richtungen des Molekelhaufens sind also genau den N Richtungen der Gruppe G parallel.

Als Hauptergebnis der Theorie ergibt sich also auch hier, dass die Symmetrie jedes regelmässigen Molekelhaufens einer der 32 Klassen entspricht¹⁴⁰).

4) Ist \mathcal{G} eine Gruppe zweiter Art, so enthält der zugehörige Molekelhaufen zwei Arten von konstituierenden Molekeln, die einander spiegelbildlich gleich sind¹⁴¹). Jede Deckbewegung von \mathcal{G} führt jede Molekel in eine ihr kongruente über, jede Operation zweiter Art in eine solche, die ihr spiegelbildlich gleich ist. Den Krystallen, die in enantiomorphen Formen auftreten können, die also zu den 65 Gruppen erster Art gehören, entsprechen Molekelhaufen mit nur kongruenten Molekeln und zwar ist die eine Form aus Molekeln der einen Art, die andere Form aus Molekeln der andern Art aufgebaut¹⁴²).

Es bleibt die Frage offen, welche der 230 Gattungen von Molekelhaufen auch in praktischer Hinsicht brauchbar sind. L. Wulff¹⁴³) hält nur diejenigen für zulässig, in denen je N Molekeln sich zu einer natürlichen Einheit zusammenfassen lassen und zwar soll diese natürliche Einheit wieder ein symmetrischer Komplex sein. Diese Zusammenfassung stellt den umgekehrten Prozess dar, durch den wir in Nr. 48 von dem Bravais'schen Gitter zu den allgemeinen Strukturen übergangen, und so sind die Wulff'schen Strukturen mit den Bravais'schen Gittern gleichwertig; geometrisch unterscheiden sie sich von ihnen nur in der Bezeichnung und krystallographisch nur in der Frage, was man als die Einheit des krystallographischen Aufbaus betrachten will.

140) Eine Ableitung der 32 Klassen auf Grund der Strukturtheorie giebt Barlow, Zeitschr. f. Kryst. 34 (1901), p. 1. Der analoge Beweis von Viola, ebenda (1902) 35, p. 236 ist irrig.

141) Die Notwendigkeit, beide Arten von Molekeln zu berücksichtigen, wurde zuerst von Fedorow betont in seinen russischen Schriften, vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 39. Eine eigentliche Beschränkung der Molekelqualität ist hierin übrigens nicht enthalten. Die Gleichberechtigung der Begriffe kongruent und spiegelbildlich gleich geht durch die ganze Krystallographie, sie muss deshalb auch in den Grundlagen der Theorie notwendig zum Ausdruck kommen. Auch führt die Bravais'sche Auffassung, die die Molekel in N Elemente auflöst¹²⁸), zu der gleichen Konsequenz. Hierin liegt also keine Hypothese, sondern eine mathematische Folgerung vor. Vgl. hierzu Sohneke, Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 447 und Schönflies, Zeitschr. f. phys. Chemie 10 (1892), p. 517.

142) Diese Konsequenz trifft übrigens auch für die Bravais'sche Theorie zu.

143) Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 503.