44. Reguläre Raumteilungen von gitterartiger Struktur. In der Theorie der Raumgitter sahen wir, dass einem Raumgitter eine reguläre Raumteilung entspricht, gebildet von den sämtlichen Parallelepipeden, die das Gitter ausmachen. Sie stellen unendlich viele parallel orientierte Polyeder dar, die den Raum *regelmässig und lückenlos* erfüllen. Dieser Begriff, dessen krystallographische Wichtigkeit offenbar ist, lässt sich verallgemeinern; man kann die Aufgabe stellen, den Raum in allgemeinster Weise mit kongruenten Polyedern in paralleler Lage regelmässig und lückenlos zu erfüllen. In dieser Form ist die Aufgabe allerdings noch unbestimmt; bestimmt wird sie erst, wenn man die Polyeder als *konvex* annimmt.

Die vorstehende Frage hat zuerst *E. v. Fedorow* gestellt und beantwortet[144]). Es giebt fünf Gattungen solcher Polyeder. Sie haben sämtlich einen Mittelpunkt, ihre Flächen paaren sich in kongruente parallele Polygone, die selbst parallele Kanten und einen Mittelpunkt haben. *Fedorow* bezeichnet sie deshalb als *Paralleloeder* (Parallelflächner). Sie können 3, 4, 6 und 7 parallele Flächenpaare besitzen, und stellen in den einfachsten Fällen einen Würfel, eine gerade sechsseitige Säule, ein Rhombendodekaeder, einen von vier Sechsecken und acht Rhomben begrenzten Körper[145]), endlich ein Kubooktaeder dar, d. h. die Durchdringungsfigur eines Würfels mit einem Oktaeder. Die übrigen Polyeder dieser Art entstehen aus ihnen durch affine Änderung.

Bei jeder Raumteilung, die aus derartigen Polyedern besteht, bilden die Centra der Polyeder ein Raumgitter, wie es auch oben für die Parallelepipeda der Fall ist. Ferner geht die ganze Raumteilung in sich über, d. h. jedes Polyeder in ein anderes, falls man eine diesem Gitter zugehörige Translation ausführt.

45. Allgemeinster Begriff der regulären Raumteilung und der Fundamentalbereich. Der wichtige Begriff der regulären Raumteilung lässt sich auf folgende Art, die auch auf Gitter anwendbar ist, verallgemeinern. Man gehe von irgend einem regulären Punktsystem aus und lege um alle seine Punkte kongruente Kugeln, die ausserhalb von einander liegen, so giebt es zu jedem Punkt einer dieser Kugeln in allen andern die *homologen* (Nr. 42). Dies bleibt bestehen, wenn wir die Kugeln wachsen lassen. Dabei werden die Kugeln einander allmählich durchdringen, und den ganzen Raum lückenlos ausfüllen.

---

144) Gestaltenlehre 1885. Vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 25 (1896), p. 115. Vgl. auch Lord *Kelvin*, Proc. Lond. Roy. Soc. 55 (1894), p. 1.

145) Diesen benutzt *Fedorow* für seine krystallographische Theorie nicht; vgl. Nr. 46 und Anm. 155.

Auf Grund dieser Vorstellung lässt sich für jeden Punkt, resp. jede Kugel ein gewisses Polyeder definieren, das *Fundamentalbereich* heisst und zwar auf folgende Weise.

Seien p und p' zwei Punkte des Punktsystems, S und S' die um sie gelegten Kugeln und sei S' die resp. eine erste Kugel, in die die Kugel S eindringt. Dann durchdringen sich S und S' in einem Kreise k, und es sei ε die Ebene dieses Kreises. Wir ersetzen dann die Kugeln für das weitere Wachstum durch diejenigen Teile, die auf der einen resp. der andern Seite von ε liegen, dann wird, wenn S und S' um p resp. p' wachsen, zwar der Kreis k wachsen, aber so, dass die Ebene ε sich der Lage nach nicht ändert. Diese Ebene ε liefert also eine Grenzebene des um p resp. p' sich bildenden Polyeders. Die übrigen Grenzebenen werden von den Ebenen gebildet, die sich bei der weiteren Durchdringung von S mit andern Nachbarkugeln ergeben.

Alle sich so um $p, p', \ldots$ bildenden Polyeder enthalten in ihrem Innern lauter homologe Punkte. Ist nun $\mathfrak{G}$ die Raumgruppe, zu der das betrachtete Punktsystem gehört, so ist klar, dass alle diese Polyeder durch jede Operation von $\mathfrak{G}$ mit einander zur Deckung gelangen; sie sind entweder sämtlich kongruent oder teils kongruent, teils spiegelbildlich gleich, je nachdem $\mathfrak{G}$ eine Gruppe erster oder zweiter Art ist. Diese Polyeder bilden also wieder eine *reguläre Raumteilung* und stellen deren *Fundamentalbereiche* dar[146]); wir bezeichnen sie durch φ.

In jedem Fundamentalbereich φ liegt je eine, die Krystallsubstanz bildende Molekel und zwar an homologer Stelle. Dieser Bereich bildet also den *Spielraum*, in dem die Molekel an *beliebiger* Stelle und von *beliebiger* Qualität angenommen werden kann; *in ihm kann der Krystallograph nach Belieben schalten und walten.* Die in ihm enthaltene Substanz stellt daher die *kleinste krystallographische Einheit* des Aufbaues dar[147]).

Der auf die vorstehende Weise sich bildende Fundamentalbereich ist immer ein *konvexes* Polyeder; insbesondere bilden sich für die Gitter resp. die Translationsgruppen die soeben in Nr. **44** abgeleiteten Paralleloedertypen. Wir bezeichnen sie in ihrer Bedeutung als Fundamentalbereiche der Gitter durch φ_τ. Bei den andern Gruppen $\mathfrak{G}$

---

146) Dieser Fundamentalbereich deckt sich im wesentlichen mit dem, was *Fedorow* als *Stereoder* bezeichnet.

147) Das Verhältnis der krystallographischen Molekel zur physikalischen und chemischen bleibt hier ausser Betracht. Über die Form der Molekeln und die mit ihnen möglichen dynamisch geschlossenen Gruppen, die räumliche Polygone sind, hat kürzlich *A. Nold* spezielle Hypothesen aufgestellt und näher erörtert; vgl. Zeitschr. f. Kryst. 40 (1904), p. 13 und 433.

kann der Fundamentalbereich φ noch mannigfache Formen annehmen; das zu $\mathfrak{G}$ gehörige Punktsystem hängt nämlich von der Wahl des Ausgangspunktes ab, und dieser ist beliebig wählbar.

Was den *rein geometrischen* Begriff des zu einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörigen Fundamentalbereichs betrifft, so ist seine *allgemeinste* Definition *wesentlich allgemeiner*, als die vorstehende[148]). Diese Definition besagt, dass das Innere des Bereichs keine zwei homologen Punkte (Nr. **42**) enthält, aber von jeder Art homologer Punkte mindestens einen, im Innern oder auf der Oberfläche[149]). Er kann im übrigen beliebig begrenzt sein, geradflächig und krummflächig[150]), konkav oder konvex, er kann auch in mehrere Teile zerfallen, und dies gilt, was auch $\mathfrak{G}$ für eine Gruppe ist[151]). Es gilt sogar auch für die Translationsgruppen. Insbesondere stellen immer N Fundamentalbereiche φ von $\mathfrak{G}$, die sich aus einem solchen durch die Operationen 7) von Nr. **42** ergeben, einen Fundamentalbereich φ_τ der in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Translationsgruppe dar, und man kann sie immer so wählen, dass sie zusammen ein Polyeder bilden, das freilich nicht immer konvex zu sein braucht.

46. Die Strukturauffassung von E. v. Fedorow[152]). *Fedorow* legt den von ihm abgeleiteten Parallelflächnern eine grundlegende Bedeutung für die Struktur der Krystallsubstanz bei, besonders mit Rücksicht darauf, dass ihrer nur eine sehr beschränkte Zahl existiert. Seine Auffassung kann als eine tiefere Ausgestaltung der Ideen von *Haüy* bezeichnet werden[153]). Wesentlich für sie sind zwei grundlegende Vorstellungen. Erstens geht auch er davon aus, dass die Krystallmolekeln parallel orientiert sind; er erblickt insbesondere in seinen konvexen Parallelflächnern die natürlichen Einheiten des Krystallaufbaues, und nimmt an, dass die Krystallsubstanz eine lückenlose und regelmässige Wiederholung solcher Bereiche bildet, innerhalb deren sich die Molekeln in ebenfalls paralleler Orientierung befinden. Er be-

148) Vgl. *Schönflies*, Krystallsysteme u. Krystallstruktur, p. 569 ff.

149) Die Punkte der Oberfläche paaren sich im allgemeinen zu je zweien, die einander homolog sind.

150) Man erhält solche, wenn man z. B. die Kugeln durch Ellipsoide ersetzt. Vgl. Lord *Kelvin*, The molecular tactics of a cristall, Oxford 1894.

151) *Fedorow* nahm ursprünglich an, dass dies nur für seine asymmorphen Gruppen zutrifft, nnd sah hierin einen der Gründe, die gegen ihre krystallographische Wahrscheinlichkeit sprechen; vgl. z. B. Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 65 und 24 (1895), p. 239. Diese Annahme trifft aber dem Obigen gemäss nicht zu; sie beruht auf einer irrtümlichen Auffassung der Arbeiten von *Schoenflies*.

152) Zeitschr. f. Kryst. 20 (1892), p. 28; 24 (1895), p, 209; 25 (1896), p. 113; 28 (1898), p. 238; 37 (1903), p. 22; vgl. auch den Schluss von Nr. **37**.

153) Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 21 (1893), p. 587.