

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0282

LOG Titel: 48. Beziehungen der verschiedenen Strukturtheorien zueinander

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

selbst Symmetrie besitzt; insbesondere ob man zu Molekelgittern für jede der 32 Symmetrieklassen gelangt. Erst dann würden diese Packungen im Sinne der Strukturtheorien der Symmetrie der Krystalle entsprechen. Diese Frage ist bisher nicht untersucht worden.

Fedorow, der in seiner Gestaltenlehre die Kugelpackungen ebenfalls abgeleitet hat, hält die Vorstellung von Lord *Kelvin* deshalb für nicht wahrscheinlich¹⁷³⁾, weil die Krystalle nicht die Tendenz zeigten, die rhombendodekaedrischen Formen auszubilden, die den dichtesten Packungen entsprechen, sondern vielmehr solche Formen, die bei einem Minimum der Oberfläche den grössten Inhalt haben, nämlich die kubooktaedrischen¹⁷⁴⁾.

48. Beziehungen der verschiedenen Strukturtheorien zu einander. *L. Sohncke* hat in seinen Arbeiten dem Begriff der regelmässigen Anordnung nicht die in Nr. 41 erörterte allgemeine Bedeutung gegeben. Er ging von der beschränkenden Annahme aus, dass die Regelmässigkeit in *Deckbewegungen* resp. in der *Kongruenz* des Molekelhaufens mit sich zum Ausdruck kommt¹⁷⁵⁾ und operiert deshalb nur mit *Bewegungsgruppen*. Die Bewegungsgruppen führen jedoch, wenn man die Molekel *beliebig* annimmt, ihrer Natur nach nur zu Molekelhaufen mit *Axensymmetrie*. Dies tritt in *Sohncke's* ersten Arbeiten nicht deutlich hervor, weil er in ihnen nicht mit den Molekelhaufen, sondern mit den Punktsystemen operierte und im Punkt gelegentlich nicht den *formalen*, sondern den *wirklichen* Vertreter der Molekel sah. Punktsysteme, deren Symmetrie über diejenige der bezüglichen Bewegungsgruppe hinausgeht, kann man dann, wenn überhaupt, nur so ableiten, dass man dem konstituierenden Punkt eine *besondere Lage* zu den Axen der Gruppe anweist¹⁷⁶⁾. Die Symmetrie der Struktur beruht aber dann nicht ausschliesslich auf der Anordnung, sondern auch auf der Symmetrie der Molekel, ähnlich wie es bei den *Bravais'schen* Gittern der Fall ist.

Sohncke hat deshalb, als die Arbeiten von *Fedorow* und *Schönflies* erschienen waren, seine Theorie etwas erweitert¹⁷⁷⁾. Er meinte, alle

173) Zeitschr. f. Kryst. 28 (1898), p. 232.

174) Vgl. auch Zeitschr. f. Kryst. 27 (1897), p. 43, wo *Fedorow* zeigt, dass bei gegebenen Volumen mit höherer Symmetrie die Oberfläche kleiner wird.

175) Entwicklung einer Theorie der Krystalstruktur, p. 28. Es muss aufpassen, dass *Sohncke* im Gegensatz hierzu bei der Ermittlung aller regelmässigen ebenen Punktsysteme die Regelmässigkeit im Sinne von Nr. 41 gefasst hat. Vgl. J. f. Math. 77 (1873), p. 48.

176) Für die Verwendung der 65 Gruppen zur Erzeugung von Punktsystemen bestimmter Symmetrie vgl. *L. Wulff*, Zeitschr. f. Kryst. 13 (1888), p. 503 ff.

177) Zeitschr. f. Kryst. 14 (1888), p. 426 u. 25 (1896), p. 529

Fälle zu umfassen, wenn er den erzeugenden Raumpunkt durch eine Gruppe von n Punkten ersetzt, die nunmehr zusammen die erzeugende Molekel versinnbildlichen. Die Einführung dieser n -Punktner hat übrigens einen doppelten Zweck. Ein aus einer Raumgruppe abgeleitetes Punktsystem kann nämlich infolge der Symmetrie des Punktes, die derjenigen einer *Kugel* gleich ist, unter Umständen eine höhere Symmetrie erhalten, als der bezüglichen Raumgruppe entspricht¹⁷⁸⁾; in einem solchen Fall soll der unsymmetrische n -Punktner die Symmetrie des Punktsystems *negativ* beeinflussen. Er soll sie zweitens auch *positiv* beeinflussen, was natürlich nur bei besonderer Wahl der n Punkte möglich ist¹⁷⁹⁾.

Zu diesem Behuf genügt es aber Zwei-Punktner zu verwenden, und zwar ist dies für alle diejenigen Krystalle nötig, die einer Gruppe zweiter Art entsprechen. Ist nämlich \mathcal{G} irgend eine Gruppe zweiter Art und \mathcal{G}' die in ihr enthaltene Bewegungsgruppe, so hat man zu dem Punktsystem, das mit \mathcal{G}' gebildet ist, nur diejenigen Punkte hinzuzufügen, die sich aus ihnen durch die in \mathcal{G}' enthaltenen Operationen zweiter Art ergeben. Dabei sind die Punkte von \mathcal{G}' Vertreter von kongruenten Molekeln, die übrigen Punkte vertreten Molekeln, die ihnen spiegelbildlich gleich sind; je zwei von ihnen zusammen bilden die erzeugende Molekel im Sinne *Sohncke's*. Beschränkt man also *Sohncke's* erweiterte Theorie auf den vorstehend genannten Fall, so ist sie von der reinen Strukturtheorie geometrisch nur in der Bezeichnung unterschieden. Allerdings ist die Frage, wie der zweite Raumpunkt anzunehmen ist, gerade die Hauptsache, und ihre volle Beantwortung ist nichts anderes als die Ableitung der 165 Gruppen zweiter Art.

Die Beziehung der *Bravais's*chen Theorie zu den allgemeineren Strukturtheorien ist bereits in Nr. 40 angedeutet worden. Konstruiert man um die Gitterpunkte die Paralleloeder Φ , so enthält jedes von ihnen je eine *Bravais's*che Molekel. Löst man die *Bravais's*chen Molekeln in ihre N gleichartigen Bestandteile auf, so liegen diese N Bestandteile symmetrisch um die Gitterpunkte herum und man kann Φ in N einander teils kongruente, teils spiegelbildliche Teile zerlegen, so dass jeder dieser Teile einen dieser Bestandteile einschliesst. Jeder dieser Teile stellt überdies einen Fundamentalbereich φ derjenigen

178) Ein einfaches Beispiel liefert die cyklische Gruppe C_n , die zu n Ecken eines regulären n -Ecks als zugehörigem Punktsystem führt. Dieses Punktsystem gestattet *stets* auch Umwendungen um die Symmetrieachsen des Polygons.

179) Einzelne Systeme obiger Struktur gab bereits *I. Haag* an, Programm d. Gymn. Rottweil, 1887.

Gruppe \mathcal{G} dar, die den allgemeineren Molekelhaufen in sich überführt, der durch Auflösung jeder *Bravais'schen* Molekel in ihre N Bestandteile entstanden ist.

Ist dagegen \mathcal{G} *irgend eine andere* Raumgruppe, so existiert zwar für sie (Nr. 42) immer noch eine Gruppe von Translationen und man kann zu ihr resp. um die Gitterpunkte immer noch die Fundamentalbereiche Φ des Gitters konstruieren. Auch jetzt noch liegen in jedem Φ die N Punkte, die den N Molekeln entsprechen, aber sie liegen nicht mehr symmetrisch gegen die Mittelpunkte von Φ , sondern haben allgemeinere Lage. Demgemäss bilden auch die zu ihnen gehörigen N Fundamentalbereiche φ nicht mehr das konvexe Paralleloeder Φ , sondern ein komplizierteres konkav-konvexes Paralleloeder, das ebenfalls ein Fundamentalbereich φ_r des Gitters ist; und dieses Paralleloeder füllt ebenfalls in gleicher Orientierung lückenlos den Raum aus. Man hat also auch hier lauter parallel orientierte Molekelkomplexe¹⁸⁰⁾.

Für die Anschauung ist es einfacher, auch in diesen Fällen von den Bereichen Φ und ihrer Anordnung auszugehen, in jeden von ihnen die N Molekeln hineinzusetzen¹⁸¹⁾ und mit N in einander stehenden Gittern zu operieren (Nr. 42). Man darf aber nicht vergessen, dass eine *beliebige* Wahl dieser N Molekeln in Φ die Symmetrie der Struktur nicht verbürgt, und dass dies nur dann der Fall ist, wenn ihre Lage eine solche ist, wie sie einer der 230 Gruppen \mathcal{G} entspricht¹⁸²⁾.

Um endlich die *Fedorow'schen* Strukturen in dieser Hinsicht zu charakterisieren, ist zunächst folgendes zu bemerken. Man kann die ganz allgemeine Frage stellen, wie man überhaupt die Krystalsymmetrie zerlegen kann, so dass ein Teil durch die Molekelsymmetrie repräsentiert wird, während der andere Teil in der Anordnung, also der eigentlichen Struktur zum Ausdruck kommt. Die mathematische Erörterung dieser Frage führt zu folgendem Resultat¹⁸³⁾. Ist \mathcal{G} irgend eine der 230 Raumgruppen, so kann es vorkommen, dass

180) Es kann hier nicht erörtert werden, ob es krystallographisch zweckmässiger ist, die Molekeln oder die Molekelkomplexe als die individuellen Einheiten aufzufassen.

181) In dieser Weise hat *Mallard* die von ihm benutzten allgemeinen Strukturen konstruiert; vgl. Anm. 57.

182) Die Krystallographen haben hierauf nicht immer Rücksicht genommen; vgl. *Mallard* a. a. O. u. *Lord Kelvin* a. a. O.

183) *Schönflies*, Krystalsysteme, p. 601 und Nachr. d. Götting. Ges. d. Wiss. 1890, p. 239.

☉ eine der 32 Punktgruppen als Untergruppe enthält; sie sei G' . Es giebt dann unendlich viele Punkte des Raumes, durch die alle für G' charakteristischen Symmetrieelemente hindurchgehen; um diese Punkte herum ordnen sich die Fundamentalbereiche zu symmetrischen Polyedern P zusammen, die die Symmetrie der Gruppe G' besitzen, und die sich ebenfalls lückenlos durch den Raum fortsetzen. Man könnte daher auch in diesen Polyedern P , resp. in den in ihnen enthaltenen Molekelkomplexen, deren Symmetrie der Gruppe G' entspricht, die Einheit des Aufbaues erblicken.

Die Strukturen, die *Fedorow* allein als krystallographisch wahrscheinlich hält, sind nun dadurch definierbar, dass bei ihnen die Gruppe G' entweder geradezu diejenige Gruppe G ist, die mit ☉ isomorph ist, oder diejenige Untergruppe von G , die aus allen Bewegungen von G besteht. Dem ersten Fall entsprechen die symmorphen Systeme, dem zweiten Fall die hemisymmorphen. Im ersten Fall ist also wie bei *Bravais* die Symmetrie der Krystallmolekel mit der spezifischen Krystalsymmetrie identisch; im zweiten zerfällt der Krystall in zwei Arten spiegelbildlich gleicher Molekeln, deren Axensymmetrie mit der spezifischen Krystalsymmetrie übereinstimmt und deren Centra zwei Raumgitter bilden. Dies sind diejenigen Strukturen, die *Fedorow* zu den *Bravais*'schen hinzufügt. Eine weitere Eigenschaft der *Fedorow*'schen Vorstellungen ist dann noch die für ihn charakteristische Bevorzugung der vier obengenannten Parallelfächner und ihre Bedeutung für die Ausbildung der Krystallflächen.

C. Zur Prüfung der Strukturtheorien an der Erfahrung.

Von O. Mügge in Königsberg.

49. Einleitung. Nachdem die 32 Symmetrieklassen der endlichen Figuren bekannt geworden waren, sind mit Hilfe von Winkelmessungen und Beobachtung der Ätzfiguren, des pyroelektrischen Verhaltens, Untersuchung auf Zirkularpolarisation u. a. unter den natürlichen und künstlichen Krystallen Vertreter von 29 jener Klassen aufgefunden, während von drei Klassen (tetragonal-sphenoidische Tetartoedrie; hexagonal-trigonale Hemiedrie¹⁸⁴) und Tetartoedrie) solche bisher nicht oder nicht mit Sicherheit bekannt geworden sind. Diejenigen Elemente dagegen, welche geeignet wären für Krystalle derselben Symmetrieklasse G die jedem einzelnen zukommende Raum-

184) Hierher gehört nach den Untersuchungen von *H. Dufet* (Bull. soc. franç. de min. 9 (1886), p. 36) das zweibasische Silberorthophosphat.