ν Moleküle stossen in der Zeiteinheit $\frac{\nu c \cos\vartheta}{2h}$ mal auf die Decke des Gefässes, wobei ein stossendes Molekül jedesmal die Bewegungsgrösse $mc\cos\vartheta$ an dieselbe abgiebt und beim Zurückprallen wieder von ihr empfängt, so dass alle ν Moleküle in der Zeiteinheit der Decke des Gefässes die Bewegungsgrösse

$$\frac{nmc^2}{h}\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta$$

mitteilen. Die gesamte an die Decke abgegebene Bewegungsgrösse erhält man durch Integration dieses Ausdruckes bezüglich ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. *Clausius* setzt dieselbe gleich dem Gesamtdrucke pq, der auf die Decke des Gases wirkt, und erhält so wieder die Formel (3). Hierbei sind die Zusammenstösse der Moleküle unter einander und der Umstand, dass die Moleküle verschiedene Geschwindigkeiten haben, nicht berücksichtigt.

3. Allgemeinere Ableitung des Gasdruckes. In sehr allgemeiner Weise kann das Problem der Berechnung des Gasdruckes auf folgende Art gelöst werden (vgl. *Stefan*[12]), *Boltzmann*[13]), *Clausius*' Gastheorie[14]), sowie die Anmerkung, welche er der in Anm. 8 zitierten Abhandlung in den gesammelten Abhandlungen beifügt).

In einem Gefässe vom Volumen V seien beliebige Gasmoleküle vorhanden, zwischen denen sich ein stationärer Bewegungszustand herausgebildet hat. Die Summe der Wirkungssphären der Moleküle verschwinde gegenüber V. Wir betrachten ein endliches oder unendlich kleines ebenes Stück der Gefässwand vom Flächeninhalte q, welches wir den Stempel nennen, und ziehen senkrecht dazu aus dem Gefässe heraustretend die Abszissenaxe. Im Gefässe seien n_1 Moleküle (jedes von der Masse m_1), deren Schwerpunkte in den Koordinatenrichtungen die Geschwindigkeitskomponenten ξ_1, η_1, ζ_1 haben, ebenso n_2 Moleküle, je mit der Masse m_2 und den Schwerpunktsgeschwindigkeitskomponenten ξ_2, η_2, ζ_2 u. s. f. im Durchschnitte gleichförmig verteilt. Von den n_1 Molekülen stossen in der Zeiteinheit $\frac{n_1\xi_1 q}{V}$ auf den Stempel. Sie prallen jedenfalls durchschnittlich mit der gleichen Geschwindigkeit davon zurück. Bezeichnet daher X_1 die Kraft, welche der Stempel während irgendeines Momentes der Wechselwirkung auf eines dieser Moleküle in der Abszissenrichtung ausgeübt

12) *Stefan,* Wien Ber. (2) 65 (1872), p. 360.
13) *Boltzmann,* Gastheorie 1, p. 9.
14) *Clausius,* Gastheorie, p. 26.

hat, so ist der gesamte Antrieb $\int X_1 dt$ über die ganze Zeit der Wechselwirkung zwischen dem Stempel und diesem Moleküle erstreckt gleich $2 m_1 \xi_1$.

Diese Grösse wurde oft nur halb in Rechnung gesetzt, indem statt der Summe $2 m_1 \xi_1$ der Bewegungsmomente, welche das Molekül an den Stempel abgiebt und beim Rückprall wieder von ihm erhält, bloss das erstere in Rechnung gesetzt wurde, so schon von *Krönig* l. c., ferner von *Puschl*[15]), *Hansemann*[16]); dadurch erhält man statt der Formel (1) die äusserlich der Gleichung der lebendigen Kraft entsprechendere, aber falsche Formel

$$\frac{mc^2}{2} = Ph. \tag{4}$$

Noch einen anderen Koeffizienten findet *Böhnert*[17]), dessen Rechnungen von *O. E. Meyer*[18]) widerlegt werden.

Die Summe der Antriebe aller Kräfte, welche der Stempel während der Zeiteinheit auf alle ihn treffenden Moleküle ausübt, immer erstreckt auf die ganze Zeit der Wechselwirkung zwischen dem Stempel und dem betreffenden Moleküle, ist also

$$\int dt \Sigma X = \frac{2q}{V} \Sigma n m \xi^2.$$

Nun ist aber für den stationären Zustand ΣX konstant gleich dem auf dem Stempel lastenden Drucke pq, wenn p der auf die Flächeneinheit bezogene Druck ist; daher folgt

$$pV = 2 \Sigma n m \xi^2,$$

wobei die Summe bloss über alle im Gefässe enthaltenen Moleküle zu erstrecken ist, für welche ξ einen positiven Wert hat.

Da sich durchschnittlich ebensoviel Moleküle in der positiven wie mit gleicher Geschwindigkeit in der negativen Abszissenrichtung bewegen, so kann man auch schreiben

$$pV = \Sigma m n \xi^2, \tag{5}$$

wobei jetzt die Summe über alle im Gefässe enthaltenen Moleküle zu erstrecken ist. Wenn die Moleküle alle gleichbeschaffen sind, so hat m für alle denselben Wert. Wir wollen ferner die Grösse $\frac{\Sigma n \xi^2}{N}$ den Mittelwert von ξ^2 nennen und mit $\overline{\xi^2}$ bezeichnen, wobei $N = \Sigma n$ die Gesamtzahl der Moleküle ist. Dann folgt also

15) *Puschl,* Wien Ber. 45 (1862), p. 357.

16) *Hansemann,* Ann. Phys. Chem. 144 (1871), p. 82.

17) *Böhnert,* Naturw. Wochenschr. 6 (1891), p. 319.

18) *O. E. Meyer,* Naturw. Wochenschr. 6 (1891), p. 346.

$$pV = Nm\overline{\xi^2}.$$

Nun ist Nm die gesamte Masse, daher $\frac{Nm}{V}$ die Dichte ϱ des Gases. Ferner ist

$$\overline{c^2} = \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2},$$

daher, wenn das Gas isotrop ist, $\overline{\xi^2} = \frac{1}{3}\overline{c^2}$, und man erhält

$$p = \frac{Nm}{3V}\overline{c^2} = \frac{\varrho}{3}\overline{c^2}. \tag{6}$$

Der Grund, warum man auch numerisch den richtigen Wert erhält, wenn man statt der wirklichen Molekularbewegung eine solche substituiert, wobei sich nach jeder der Koordinatenrichtungen ein Drittel der Moleküle bewegt, liegt also darin, dass gerade die Grösse $\overline{\xi^2}$ für den Druck ausschlaggebend ist und sich die Mittelwerte der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten einfach addieren.

4. Die Gasgesetze. Wählt man ein ideales Gas bei konstantem Volumen, also auch konstanter Dichte, als thermometrische Substanz, d. h. setzt man dem Drucke eines solchen die Temperatur proportional, welche man dann als die absolute bezeichnet, so folgt aus der Gleichung (6), dass die Grösse $\overline{c^2}$ der absoluten Temperatur T proportional sein muss. Bezüglich der Übereinstimmung dieser Temperaturskala mit der Lord *Kelvin*'schen absoluten Temperatur vgl. Nr. **26**, p. 543. Setzt man $\overline{c^2} = 3BT$, so folgt

$$p = B\varrho T, \tag{7}$$

also das *Boyle-Charles*'sche (*Gay-Lussac-Mariotte*'sche) Gesetz.

Dies wird noch näher bestimmt durch das zuerst empirisch von *Avogadro* aufgestellte Gesetz, dass bei allen Gasen bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke auf gleiche Volumina gleich viele Moleküle entfallen. Der mittlere Ausdruck in Formel (6) zeigt, dass dasselbe erfordert, dass bei gleicher Temperatur für alle Gase das Produkt $m\overline{c^2}$, also die mittlere lebendige Kraft der Schwerpunktsbewegung oder Progressivbewegung der Moleküle denselben Wert hat.

Bezeichnet M das sog. Molekulargewicht, d. h. die Masse des Moleküls des betr. Gases, geteilt durch die Masse m_H eines Wasserstoffatoms, so ist $m = Mm_H$ und es wird $m\overline{c^2} = Mm_H 3BT$. Da diese Grösse nach *Avogadro* von der Natur des Gases unabhängig ist, so muss $R = MB$ eine universelle Konstante sein. Gl. (7) schreibt sich dann

$$p = \frac{R}{M}\varrho T. \tag{7a}$$