$$f(\xi) f(\eta) f(\zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Da aber anderseits die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Geschwindigkeit nur von deren Grösse, nicht von ihrer Richtung im Raume abhängen soll, so muss sich das Produkt $f(\xi) f(\eta) f(\zeta)$ für beliebige Werte von ξ, η, ζ auf eine Funktion von $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ reduzieren, woraus sofort folgt

$$f(\xi) = a e^{b \xi^2},$$

wobei a und b Konstanten sind. Die letztere muss einen negativen Wert haben, wenn sich die Anzahl der Moleküle als eine endliche ergeben soll.

Maxwell bemerkt jedoch selbst[23]), dass es nicht gerechtfertigt ist, a priori die besprochene Annahme zu machen, dass dieselbe vielmehr erst bewiesen werden kann, wenn sein Geschwindigkeitsverteilungsgesetz schon in anderer Weise abgeleitet worden ist, welche andere Ableitung in nächster Nummer besprochen werden wird. Dieselbe Bemerkung wurde nachher noch oft wiederholt[24]). Trotzdem ging dieser erste *Maxwell*'sche Beweis seiner ausserordentlichen Einfachheit wegen in sehr viele Lehrbücher und Darstellungen der Gastheorie über und wurde besonders auch von *Tait*[25]) wieder eingehend diskutiert. Ja *Bertrand* und *Poincaré*[26]) scheinen das *Maxwell*'sche Gesetz nur aus jenen Darstellungen gekannt zu haben, da sie dasselbe widerlegt zu haben glauben, indem sie unter Ignorierung seiner späteren Beweise wieder neuerdings auf den besprochenen schon von *Maxwell* selbst und nachher so oft erkannten Mangel seines ersten Beweises hinwiesen. Andere ebenfalls nicht ganz einwandfreie Beweise des *Maxwell*'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes wurden von *Meyer*[27]) und *Buchanan*[28]) gegeben.

8. Zweiter Beweis Maxwell's für sein Geschwindigkeitsverteilungsgesetz. Der zweite Beweis[29]), den *Maxwell* für sein Geschwin-

---

23) *Maxwell,* Phil. mag. (4) 35 (1868), p. 145; Papers 2, p. 43; Phil. Trans. 157.

24) *Kirchhoff,* Wärmetheorie, 13. Vorles., § 6, p. 140; *Voigt,* Theor. Phys. 2, p. 801; *Boltzmann,* Ann. Phys. Chem. 53 (1895), p. 958.

25) *Tait,* Edinb. Trans. 33, p. 66 und 252; *Burbury,* Phil. mag. (5) 21, p. 481; *Boltzmann,* ebenda 23, p. 305; *Burnside,* Edinb. Trans. 33, p. 501.

26) *Bertrand,* Paris C. R. 122 (1896), p. 963, 1083, 1314; *Boltzmann,* Paris C. R. 122 (1896), p. 1173; *Bertrand,* Calcul des probabilités, p. 29—32; *Poincaré,* Calcul des probabilités, p. 21.

27) *O. E. Meyer,* Ann. Phys. Chem. 7 (1879), p. 317; 10 (1880), p. 296; Theorie der Gase, 1. Aufl. math. Anhang; *Boltzmann,* Ann. Phys. Chem. 8 (1879), p. 653; 11, p. 529.

28) *Buchanan,* Phil. mag. (5) 25 (1888), p. 165.

29) *Maxwell,* Papers 2, p. 44; Phil. mag. (4) 35 (1868), p. 186; *Boltzmann,* Gastheorie, p. 32.

digkeitsverteilungsgesetz liefert, bezieht sich in der Form, die ihm *Maxwell* giebt, auf den Fall, dass die Moleküle vollkommen elastische Kugeln oder materielle Punkte sind, welche eine Kraft auf einander ausüben, deren Richtung in ihre Verbindungslinie fällt und deren Grösse eine solche Funktion ihrer Entfernung ist, welche nur für sehr kleine Entfernungen erhebliche Werte annimmt.

Im Falle des Wärmegleichgewichtes eines homogenen Gases kann der Ausdruck für die auf die Volumeneinheit entfallende Zahl der Gasmoleküle, für welche die Komponenten der Geschwindigkeit in den drei Koordinatenrichtungen zwischen den Grenzen liegen, welche in Nr. 7 als die Grenzen (9) bezeichnet wurden, nach dem Gesagten in die Form gebracht werden

$$f(\xi\eta\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{10}$$

Wir wollen nun die Anzahl $d\nu$ der Zusammenstösse berechnen, welche diese Moleküle während irgend einer Zeit δt mit solchen Molekülen erfahren, deren Zustand vor dem Zusammenstosse durch die folgenden zwei Bedingungen bestimmt ist: Die eine Bedingung soll der Bedingung (9) vollkommen analog lauten, nur dass sämtliche darin vorkommenden Grössen im allgemeinen irgend welche andere Werte haben, welche wir mit dem Index 1 bezeichnen wollen. Wir wollen diese erste Bedingung die Bedingung (11) nennen. Unsere zweite Bedingung, welche (11a) heissen möge, soll verlangen, dass die Länge der kürzesten Entfernung OO' der beiden Geraden, in denen sich die Centra der Moleküle vor dem Stosse bewegten, zwischen b und $b + db$ liegen und dass die Richtung der Geraden OO' mit einer bestimmten Richtung G einen Winkel bilde, welcher zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt. Als letztere Gerade kann man die Durchschnittslinie einer auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit V der Moleküle vor dem Stosse senkrechten und einer beliebigen fixen Ebene wählen.

Da der Zustand des Gases unserer Annahme gemäss molekular ungeordnet ist, so kann die Anzahl $d\nu$ der Zusammenstösse, welche wir berechnen wollen, nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden werden. Wir ziehen durch den Mittelpunkt jedes der Moleküle, deren Anzahl durch die Formel (10) gegeben ist, eine Ebene senkrecht zu V, konstruieren in jeder dieser Ebenen den Kreisring, welcher von den dem Moleküle konzentrischen Kreisen mit den Radien b und $b + db$ begrenzt ist. Aus jedem solchen Kreisring schneiden wir durch die beiden Radien, welche mit der Geraden G die Winkel ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ bilden, ein Flächenelement heraus und konstruieren über jedem solchen Flächenelemente ein rechtwinkliges

Parallelepiped von der Höhe $V\delta t$, also dem Volumen $b\,db\,d\varepsilon\,V\delta t$. — Da die Anzahl dieser Parallelepipeda ebenfalls durch die Formel (10) gegeben ist, so erhalten wir das gesamte Volumen aller dieser Parallelepipeda, indem wir das Volumen eines derselben mit dem Ausdrucke (10) multiplizieren. Die Anzahl der Moleküle, welche sich in einem dieser Parallelepipeda zu Anfang der Zeit δt befinden und für welche die Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Grenzen (11) liegen, wird nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen gefunden, indem man dieses Produkt noch mit $f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1$ multipliziert, und man sieht leicht, dass alle diese Moleküle während der Zeit δt an einem Moleküle, dessen Geschwindigkeitskomponenten zwischen den Grenzen (9) liegen, so vorübergehen würden, dass dabei zugleich b und ε zwischen den Grenzen b und $b + db$ und ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen, wenn zwischen den Molekülen keine Wechselwirkung stattfinden würde, d. h. dass alle diese Moleküle zugleich unserer Bedingung (11a) genügen.

Nun ist die Anzahl der so berechneten Vorübergänge gleich der früher mit $d\nu$ bezeichneten Zahl der Zusammenstösse und man hat

$$(12)\qquad d\nu = f(\xi\eta\zeta)f(\xi_1\eta_1\zeta_1)Vb\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1\,db\,d\varepsilon\,\delta t.$$

Für alle diese Zusammenstösse sollen nun die Geschwindigkeitskomponenten der beiden Moleküle nach dem Stosse zwischen den Grenzen

$$(13)\qquad \begin{array}{l} \xi_2 \text{ und } \xi_2 + d\xi_2 \\ \eta_2 \text{ und } \eta_2 + d\eta_2 \\ \zeta_2 \text{ und } \zeta_2 + d\zeta_2 \end{array}$$

und

$$(14)\qquad \begin{array}{l} \xi_3 \text{ und } \xi_3 + d\xi_3 \\ \eta_3 \text{ und } \eta_3 + d\eta_3 \\ \zeta_3 \text{ und } \zeta_3 + d\zeta_3 \end{array}$$

liegen. Dann ist die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeneinheit des Gases während der Zeit δt umgekehrt so erfolgen, dass vor denselben die Geschwindigkeitskomponenten der beiden stossenden Moleküle zwischen den Grenzen (13) und (14) liegen, während b und ε, deren Werte durch die Zusammenstösse so wenig wie der von V verändert werden, zwischen denselben Grenzen liegen,

$$(15)\qquad d\nu_1 = f(\xi_2\eta_2\zeta_2)f(\xi_3\eta_3\zeta_3)Vb\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\zeta_2\,d\xi_3\,d\eta_3\,d\zeta_3\,db\,d\varepsilon\,\delta t.$$

Für die letzteren Zusammenstösse liegen aber umgekehrt die Geschwindigkeitskomponenten der beiden stossenden Moleküle nach dem Stosse zwischen den Grenzen (9) und (11), und man sieht sofort, dass die Zustandsverteilung durch die Zusammenstösse nicht verändert wird, wenn für alle möglichen Zusammenstösse $d\nu = d\nu_1$ ist. Nun ist aber, wie wir sogleich in Nr. 10 sehen werden, stets

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2\, d\xi_3\, d\eta_3\, d\zeta_3, \tag{16}$$

daher ist die Gleichung $d\nu = d\nu_1$ erfüllt, wenn man für alle möglichen Werte der Variabeln hat

$$f(\xi\eta\zeta)f(\xi_1\eta_1\zeta_1) = f(\xi_2\eta_2\zeta_2)f(\xi_3\eta_3\zeta_3). \tag{17}$$

Hieraus folgt, wenn, wie wir bisher vorausgesetzt haben, alle Moleküle gleichartig sind, mit Rücksicht darauf, dass die Energie beim elastischen Stoss erhalten bleibt und dass die Funktion f nur von der Verbindung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ abhängen kann,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-\frac{1}{\alpha^2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \tag{18}$$

welche Gleichung das *Maxwell*'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz ausdrückt. Ist n die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit, so erhält man durch Integration über alle Werte von ξ, η, ζ, $A = \frac{n}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}$. Aus Formel (18) kann nun allerdings die Richtigkeit der in Nr. 8 mit A bezeichneten Annahme *Maxwell*'s bewiesen werden, nicht aber darf dieselbe zur Ableitung der Form des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes benutzt werden.

9. Bemerkungen zu Nr. 8. Ist das Gas ein Gemisch mehrerer einfacher Gase, so gilt für die Zusammenstösse zweier verschiedenartiger Moleküle eine der Gleichung (17) vollkommen analoge Gleichung, nur dass in derselben die beiden Funktionen f, die sich auf verschiedene Gase beziehen, von einander verschieden sein können. Man sieht sofort, dass dieselbe erfüllt ist, wenn jede dieser Funktionen die Form (18) hat und die Werte der Konstanten α^2 sich verkehrt wie die Massen eines Moleküles des betreffenden Gases verhalten. Daraus beweist man leicht, dass die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküles für alle Gasarten denselben Wert hat, wodurch eine der zur Erklärung des *Avogadro*'schen und *Dalton*'schen Gesetzes erforderlichen Voraussetzungen (vgl. Nr. 4) gastheoretisch begründet ist.

Dass in einem Gemische verschiedenartiger Gasmoleküle durch die Zusammenstösse Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft aller Moleküle bewirkt wird, wurde schon in einer früheren Abhandlung[30]) *Maxwell*'s und später von *Stefan*[31]) und *Tait*[32]) bewiesen. Letzterer

30) *Maxwell,* Papers 1, p. 383; Phil. mag. (4) 19 (1860), p. 25.
31) *Stefan,* Wien. Ber. (2) 65 (1872), p. 354.
32) *Tait,* Edinb. Trans. 33 (1886), p. 79; Edinb. Proc. 13, p. 21.