Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0302
LOG Titel: 9. Bemerkungen zu Nr. 8
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

Contact

wenn für alle möglichen Zusammenstösse $d\nu = d\nu_1$ ist. Nun ist aber, wie wir sogleich in Nr. 10 sehen werden, stets

$$(16) \qquad d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2\, d\xi_3\, d\eta_3\, d\zeta_3,$$

daher ist die Gleichung $d\nu = d\nu_1$ erfüllt, wenn man für alle möglichen Werte der Variabeln hat

$$(17) \qquad f(\xi\eta\zeta)f(\xi_1\eta_1\zeta_1) = f(\xi_2\eta_2\zeta_2)f(\xi_3\eta_3\zeta_3).$$

Hieraus folgt, wenn, wie wir bisher vorausgesetzt haben, alle Moleküle gleichartig sind, mit Rücksicht darauf, dass die Energie beim elastischen Stoss erhalten bleibt und dass die Funktion f nur von der Verbindung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ abhängen kann,

$$(18) \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-\frac{1}{\alpha^2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

welche Gleichung das *Maxwell*'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz ausdrückt. Ist n die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit, so erhält man durch Integration über alle Werte von ξ, η, ζ, $A = \frac{n}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}$. Aus Formel (18) kann nun allerdings die Richtigkeit der in Nr. 8 mit A bezeichneten Annahme *Maxwell*'s bewiesen werden, nicht aber darf dieselbe zur Ableitung der Form des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes benutzt werden.

9. Bemerkungen zu Nr. 8. Ist das Gas ein Gemisch mehrerer einfacher Gase, so gilt für die Zusammenstösse zweier verschiedenartiger Moleküle eine der Gleichung (17) vollkommen analoge Gleichung, nur dass in derselben die beiden Funktionen f, die sich auf verschiedene Gase beziehen, von einander verschieden sein können. Man sieht sofort, dass dieselbe erfüllt ist, wenn jede dieser Funktionen die Form (18) hat und die Werte der Konstanten α^2 sich verkehrt wie die Massen eines Moleküles des betreffenden Gases verhalten. Daraus beweist man leicht, dass die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküles für alle Gasarten denselben Wert hat, wodurch eine der zur Erklärung des *Avogadro*'schen und *Dalton*'schen Gesetzes erforderlichen Voraussetzungen (vgl. Nr. 4) gastheoretisch begründet ist.

Dass in einem Gemische verschiedenartiger Gasmoleküle durch die Zusammenstösse Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft aller Moleküle bewirkt wird, wurde schon in einer früheren Abhandlung[30]) *Maxwell*'s und später von *Stefan*[31]) und *Tait*[32]) bewiesen. Letzterer

30) *Maxwell,* Papers 1, p. 383; Phil. mag. (4) 19 (1860), p. 25.

31) *Stefan,* Wien. Ber. (2) 65 (1872), p. 354.

32) *Tait,* Edinb. Trans. 33 (1886), p. 79; Edinb. Proc. 13, p. 21.

sowie auch *Natanson*[33]) berechneten auch die Geschwindigkeit, mit welcher der Ausgleich der lebendigen Kraft vor sich geht. Erwähnt sei noch eine allerdings einen Spezialfall behandelnde Arbeit *Rayleigh's*[34]). Auch *Waterston*[35]) hat diesen Satz in einer schon 1845 überreichten, aber erst 47 Jahre später abgedruckten Abhandlung erwähnt, wenn auch nicht zureichend begründet. Letztere Abhandlung enthält noch vieles Interessante, so eine gastheoretische Ableitung der Schallgeschwindigkeit, des Gasdruckes auf eine bewegte Wand u. s. w.

Aus dem bisher Entwickelten folgt bloss, dass die *Maxwell*'sche Geschwindigkeitsverteilung, wenn sie unter den Gasmolekülen besteht durch die Zusammenstösse den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit gemäss nicht geändert wird. *Maxwell*[36]) hat auch schon eine Schlussweise angedeutet, aus welcher hervorgeht, dass sie die einzige ist, welche diese Bedingung erfüllen kann. Dieselbe wurde weiter ausgearbeitet durch *Planck*[37]) und *Boltzmann*[38]) und läuft darauf hinaus, dass eine Geschwindigkeitsverteilung, welche dem Wärmegleichgewicht entspricht, sich den Wahrscheinlichkeitsgesetzen gemäss durch sehr lange Zeit erhalten muss. Kehrt man am Ende dieser Zeit die Richtungen der Geschwindigkeiten aller Moleküle um, ohne deren Grösse zu ändern, so muss sie daher wieder in eine dem Wärmegleichgewichte entsprechende übergehen. Dabei treten aber an Stelle der Moleküle, für welche die Variabeln zwischen den Grenzen (9) und (11) liegen, diejenigen für welche sie zwischen den Grenzen (13) und (14) liegen und umgekehrt, was dann direkt zur Gleichung (17) führt.

Der gesamte soeben dargestellte *Maxwell*'sche Beweis für dessen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz wurde in etwas anderer Weise dargestellt von *Kirchhoff*[39]).

10. Der Satz bezüglich der gastheoretischen Funktionaldeterminante. Der Beweis der Gleichung (16), welche auch so geschrieben werden kann

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_3}{\partial \eta_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \zeta_1} = 1,$$

33) *Natanson,* Ann. Phys. Chem. 34 (1888), p. 970.
34) *Rayleigh,* Phil. mag. (5) 32 (1891), p. 424.
35) *Waterston,* London Phil. Trans. 183 (1892), p. 1—81.
36) *Maxwell,* Papers 2, p. 45; Phil. mag. (4) 35 (1868), p. 187.
37) *Planck,* Münch. Ber. 24, Nov. 1894.
38) *Boltzmann,* Ann. Phys. Chem. 55 (1895), p. 223; Gastheorie 1, p. 44.
39) *Kirchhoff,* Vorles. über Wärmetheorie, 14. Vorles.; vgl. auch *Boltzmann,* Ann. Phys. Chem. 53 (1894), p. 955; 55 (1895), p. 223; *Planck,* Münch. Ber. 24, Nov. 1894.