

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0303

LOG Titel: 10. Der Satz bezüglich der gaatheoretischen Funktionaldetenainante

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

sowie auch *Natanson*³³⁾ berechneten auch die Geschwindigkeit, mit welcher der Ausgleich der lebendigen Kraft vor sich geht. Erwähnt sei noch eine allerdings einen Spezialfall behandelnde Arbeit *Rayleigh's*³⁴⁾. Auch *Waterston*³⁵⁾ hat diesen Satz in einer schon 1845 überreichten, aber erst 47 Jahre später abgedruckten Abhandlung erwähnt, wenn auch nicht zureichend begründet. Letztere Abhandlung enthält noch vieles Interessante, so eine gastheoretische Ableitung der Schallgeschwindigkeit, des Gasdruckes auf eine bewegte Wand u. s. w.

Aus dem bisher Entwickelten folgt bloss, dass die *Maxwell'sche* Geschwindigkeitsverteilung, wenn sie unter den Gasmolekülen besteht durch die Zusammenstösse den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit gemäss nicht geändert wird. *Maxwell*³⁶⁾ hat auch schon eine Schlussweise angedeutet, aus welcher hervorgeht, dass sie die einzige ist, welche diese Bedingung erfüllen kann. Dieselbe wurde weiter ausgearbeitet durch *Planck*³⁷⁾ und *Boltzmann*³⁸⁾ und läuft darauf hinaus, dass eine Geschwindigkeitsverteilung, welche dem Wärmegleichgewicht entspricht, sich den Wahrscheinlichkeitsgesetzen gemäss durch sehr lange Zeit erhalten muss. Kehrt man am Ende dieser Zeit die Richtungen der Geschwindigkeiten aller Moleküle um, ohne deren Grösse zu ändern, so muss sie daher wieder in eine dem Wärmegleichgewichte entsprechende übergehen. Dabei treten aber an Stelle der Moleküle, für welche die Variabeln zwischen den Grenzen (9) und (11) liegen, diejenigen für welche sie zwischen den Grenzen (13) und (14) liegen und umgekehrt, was dann direkt zur Gleichung (17) führt.

Der gesamte soeben dargestellte *Maxwell'sche* Beweis für dessen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz wurde in etwas anderer Weise dargestellt von *Kirchhoff*³⁹⁾.¹

10. Der Satz bezüglich der gastheoretischen Funktionaldeterminante. Der Beweis der Gleichung (16), welche auch so geschrieben werden kann

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial \eta_3}{\partial \eta_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial \zeta_1} = 1,$$

33) *Natanson*, Ann. Phys. Chem. 34 (1888), p. 970.

34) *Rayleigh*, Phil. mag. (5) 32 (1891), p. 424.

35) *Waterston*, London Phil. Trans. 183 (1892), p. 1—81.

36) *Maxwell*, Papers 2, p. 45; Phil. mag. (4) 35 (1868), p. 187.

37) *Planck*, Münch. Ber. 24, Nov. 1894.

38) *Boltzmann*, Ann. Phys. Chem. 55 (1895), p. 223; Gastheorie 1, p. 44.

39) *Kirchhoff*, Vorles. über Wärmetheorie, 14. Vorles.; vgl. auch *Boltzmann*, Ann. Phys. Chem. 53 (1894), p. 955; 55 (1895), p. 223; *Planck*, Münch. Ber. 24, Nov. 1894.

($\xi_2, \eta_2, \dots, \xi_3$ als Funktionen von ξ, η, \dots, ξ_1 und den früher gebrauchten Variablen b und ε gedacht), wurde von *Maxwell* selbst nur flüchtig angedeutet. Ein ausführlicher Beweis dieser Gleichung, sowie anderer, welche teils spezielle Fälle derselben, teils allgemeiner sind, wurde zuerst von *Boltzmann*⁴⁰⁾ erbracht. Die Gleichung selbst erwies sich als spezieller Fall eines von *Liouville* aufgestellten Prinzipes⁴¹⁾.

Dieselbe wurde später in ziemlich umständlicher Weise von *Stankewitsch*⁴²⁾ bewiesen. Am einfachsten und klarsten jedoch von *H. A. Lorentz*⁴³⁾.

Letzterer belässt in dem Differentialausdrucke $d\xi d\eta d\xi d\xi_1 d\eta_1 d\xi_1$ zunächst die drei ersteren Variablen, führt aber statt der drei letzteren die Komponenten u, v, w des gemeinsamen Schwerpunktes der Moleküle in den drei Koordinatenrichtungen ein. Sind m_1 und m_2 die Massen der möglicherweise verschiedenartigen Moleküle, so verwandelt sich hier zunächst der Differentialausdruck in

$$\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)^3 d\xi d\eta d\xi du dv dw.$$

In dem letzteren Differentialausdruck werden nun statt ξ, η, ξ die Geschwindigkeitskomponenten ξ_2, η_2, ξ_2 desselben Moleküles nach dem Stosse eingeführt, u, v, w aber belassen. Man sieht unmittelbar aus der geometrischen Konstruktion, durch welche die Geschwindigkeitskomponenten vor und nach dem Stosse, sowie die des Schwerpunktes dargestellt werden, dass dann

$$d\xi d\eta d\xi = d\xi_2 d\eta_2 d\xi_2$$

ist. Hierauf wird bei konstantem ξ_2, η_2, ξ_2 an Stelle von u, v, w wieder ξ_3, η_3, ξ_3 eingeführt, was liefert

$$du dv dw = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^3 d\xi_3 d\eta_3 d\xi_3,$$

womit die Gleichung (16) erwiesen ist. Diese Gleichung ist übrigens nur ein ganz spezieller Fall der viel allgemeineren, welche wir in Nr. 28 kennen lernen werden.

11. Das *H*-Theorem. Es soll nun untersucht werden, unter welchen Annahmen sich beweisen lässt, dass der Zustand des Gases sich dem von *Maxwell* angegebenen Zustand des Wärmegleichgewichtes nähern und in diesem sehr lange verharren muss.

40) *Boltzmann*, Wien. Ber. (2) 58 (1868), p. 517.

41) *Kirchhoff*, Vorles. über mathem. Phys.: Theorie der Wärme, p. 144.

42) *Stankewitsch*, Ann. Phys. Chem. 29 (1886), p. 153.

43) *H. A. Lorentz*, Wien. Ber. (2) 95 (1887), p. 115.