lich vom Wärmegleichgewichte entfernt sind. Während sie sich dann diesem nähern, geschehen für die Bewohner derselben alle Vorgänge irreversibel und es scheint denselben die positive und negative Zeitrichtung unterschieden, während sie es für die Welt als ganzes nicht ist. Die statistische Methode zeigt also, dass Irreversibilität der Vorgänge in einem gegenüber der ganzen Welt kleinen Teile derselben, bei speziellen Anfangsbedingungen auch in der ganzen Welt, mit der Symmetrie der mechanischen Gleichungen gegenüber der positiven und negativen Zeitrichtung sehr wohl verträglich ist. Ausführlich verbreiten sich hierüber *Bertrand* und *Poincaré* in ihren Büchern über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vgl. das Zitat 26).

C. Reibung, Wärmeleitung und Diffusion.

15. Verschiedene Mittelwerte [60]). Aus der Formel (18) folgt sofort für die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit, für welche die Geschwindigkeit zwischen den Grenzen c und $c + dc$ liegt, der Ausdruck

$$\varphi(c)\,dc = 4\pi A e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} c^2 dc. \tag{25}$$

Die Gesamtanzahl aller Moleküle in der Volumeneinheit aber ist

$$n = \int_0^\infty \varphi(c)\,dc = A\sqrt{\frac{\pi^3}{\alpha^3}}. \tag{25a}$$

Der Mittelwert irgend einer Potenz der Geschwindigkeit ist

$$\overline{c^a} = \frac{1}{n}\int_0^\infty c^a \varphi(c)\,dc. \tag{26}$$

Der Mittelwert des Produktes dreier beliebiger Potenzen der Geschwindigkeitskomponenten aber ist

$$\overline{\xi^a \eta^b \zeta^c} = \frac{1}{n}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \xi^a \eta^b \zeta^c f(\xi\eta\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{27}$$

Nach Einsetzung der Werte (18) und (25) für die Funktionen φ und f können die Integrationen ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Es ergiebt sich, dass man nicht hat $\overline{c^2} = (\overline{c})^2$, ebensowenig $\overline{\xi^4} \cdot \overline{\eta^2} = \overline{\xi^2} \cdot \overline{\xi^2 \eta^2}$ u. s. w. Das hier definierte Mittel ist das sogenannte

---

60) Vgl. ausser den Abhandlungen *Maxwell*'s und den Lehrbüchern: *Meyer,* Theoria gasorum, Breslau Dissert. 1866.

statistische, welches man erhält, wenn man für jedes zu einer bestimmten Zeit in der Volumeneinheit vorhandene Molekül den betreffenden Wert z. B. c^a bildet und aus allen diesen Werten das Mittel nimmt. Das *historische* Mittel dagegen ist dadurch definiert, dass man ein einziges Molekül während einer langen Zeit t betrachtet und für dasselbe das Integral

$$\frac{1}{t}\int_0^t c^a dt$$

bildet. Da sich durchschnittlich alle Moleküle gleich verhalten, so haben für den stationären Zustand beide Mittel denselben Wert.

Unter der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit versteht man diejenige ($c = \alpha$), für welche die Funktion $\varphi(c)$ der Gleichung (25) den grössten Wert hat, und es verdient bemerkt zu werden, dass für diese Geschwindigkeit nicht auch der wahrscheinlichste Wert der lebendigen Kraft eintritt. Denn bei Berechnung der ersteren denkt man sich dc, bei Berechnung der letzteren aber dx konstant, wobei $x = \frac{1}{2}mc^2$ die lebendige Kraft des Moleküles ist. Die Anzahl der Moleküle, für welche die lebendige Kraft zwischen x und $x + dx$ liegt, wäre also

$$\frac{4\sqrt{2}\pi}{m\sqrt{m}} A e^{-\frac{2x}{m\alpha^2}} \sqrt{x}\, dx$$

und die wahrscheinlichste lebendige Kraft ist daher diejenige, für welche die Funktion

$$\sqrt{x} e^{-\frac{2x}{m\alpha^2}}$$

ein Maximum wird. Dies tritt für $x = \frac{1}{4}m\alpha^2$, daher $c = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ ein.

Seien in demselben Gefässe zwei Systeme von Molekülen (Gasarten) vorhanden. Für das erste sei die Geschwindigkeitsverteilung durch die Formel (18), für das zweite durch eine analoge gegeben, in welcher an Stelle der Konstanten α und n (Gl. (25a)) andere, etwa β und n_1 treten. Dann findet *Maxwell*[61]) für die Anzahl der Molekülpaare in der Volumeneinheit, von denen das eine der ersten, das andere der zweiten Gasart angehört und für welche die Differenz der Geschwindigkeitskomponenten in der Abszissenrichtung zwischen u und $u + du$ liegt, den Ausdruck

$$\frac{n n_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\pi}} e^{\frac{u^2}{\alpha^2+\beta^2}} du.$$

61) *Maxwell*, Papers 1, p. 382; Phil. mag. (4) 19 (1860), p. 24.

Daraus ergiebt sich für die mittlere relative Geschwindigkeit zwischen je einem Paare von Molekülen, von denen das eine der einen, das andere der anderen Gasart angehört, der Wert

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{c}_1^{\,2} + \bar{c}_2^{\,2}}, \tag{28}$$

wobei $\bar{c}_1$ die mittlere Geschwindigkeit eines Moleküles der ersten, $\bar{c}_2$ eines Moleküles der zweiten Gasart ist. Wenn beide Moleküle derselben Gasart angehören, so ist die mittlere relative Geschwindigkeit

$$\bar{r} = \bar{c}\sqrt{2}. \tag{29}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem einfachen Gase für ein willkürlich herausgegriffenes Molekül die relative Geschwindigkeit zu einem gegebenen, die Geschwindigkeit c besitzenden Moleküle zwischen r und $r + dr$ liegt, findet *Maxwell*[62]) den Ausdruck

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\,\frac{r}{c}\left(e^{-\frac{(r-c)^2}{\alpha^2}} - e^{-\frac{(r+c)^2}{\alpha^2}}\right)dr.$$

Durch Multiplikation mit r und Integration von $r = 0$ bis $r = \infty$ findet man für den Mittelwert der verschiedenen relativen Geschwindigkeiten, welche ein mit der Geschwindigkeit c im Gase bewegtes Molekül gegen die verschiedenen übrigen Moleküle des Gases hat, den Wert

$$\bar{r}_c = \frac{\alpha}{c\sqrt{\pi}}\,\psi\left(\frac{c}{\alpha}\right), \tag{30}$$

wobei

$$\psi(x) = xe^{-x^2} + \frac{1+2x^2}{x}\int_0^x e^{-y^2}dy \tag{31}$$

ist.

16. Die mittlere Weglänge. Diese für die Gastheorie so wichtige Grösse wurde zuerst von *Clausius*[63]) berechnet. Dieselbe lässt sich aber nur dann in einfacher Weise definieren, wenn man die Gasmoleküle als vollkommen elastische Kugeln betrachtet. Es bewege sich ein Molekül mit der fortwährend gleichen Geschwindigkeit c in einem Raume, in welchem sehr viele Moleküle von möglicherweise anderer Beschaffenheit, welche aber unter sich gleichartig sein sollen, unregelmässig verteilt sind. Letztere sollen alle ruhen, und es sollen von ihnen n auf die Volumeneinheit entfallen. Die Summe der Radien des bewegten und irgend eines der ruhenden Moleküle sei σ, der so-

62) *Maxwell,* Phil. mag. (4) 19, p. 26; Papers 1, p. 384.

63) *Clausius,* Ann. Phys. Chem. 105 (1858), p. 239; Phil. mag. (4) 17 (1859), p. 81; Ges. Abh. 2, p. 260.