SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0312
LOG Titel: 18. Andere Berechnungen des typischen Falles der Reibung
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Fälle (der einfachsten typischen Fälle). Diese wurde für alle drei in Rede stehenden Vorgänge zuerst von *Maxwell*[74]) durchgeführt, allerdings unter manchen die Rechnung vereinfachenden nicht mathematisch strengen Annahmen. *Maxwell* betrachtet zuerst den typischen Fall der inneren Reibung, welcher durch folgende Bedingungen bestimmt ist: In einem Gase habe jede der xy-Ebene parallele Schicht eine der Abszissenrichtung parallele sichtbare Geschwindigkeit u, welche eine lineare Funktion der z-Koordinate der betreffenden Schicht etwa gleich az ist. Er prüft jedes Molekül darauf, in welcher Schicht es das letzte Mal zum Zusammenstosse gelangte (von welcher Schicht es ausgesandt wurde), und in welcher Schicht es dann wieder zum Zusammenstosse gelangt. Er nimmt an, dass es immer dasjenige in der Abszissenrichtung geschätzte Bewegungsmoment von der ersteren Schicht zur letzteren überträgt, welches ihm zukäme, wenn es die sichtbare Geschwindigkeit u der ersteren Schicht hätte. Indem er die Rechnung so durchführt, als ob bei der Molekularbewegung alle Moleküle ihre mittlere Geschwindigkeit hätten, findet er für das gesamte durch eine der xy-Ebene parallele Ebene vom Flächeninhalte 1 hindurchgetragene Bewegungsmoment, welches durch a dividiert den Reibungskoeffizienten η liefert, denjenigen Wert, der mit unbedeutenden Modifikationen noch heute allgemein angenommen wird (vgl. Gleichung (38)).

Unter analogen Vereinfachungen berechnet *Maxwell* an derselben Stelle auch den Wärmeleitungskoeffizienten eines Gases und die Diffusion zweier Gase, sowohl die direkte als auch die durch eine poröse Scheidewand und eine enge Öffnung.

18. Andere Berechnungen des typischen Falles der Reibung. Derselbe Wert der Reibungskonstante, ebenfalls ohne Berücksichtigung der *Maxwell*'schen Geschwindigkeitsverteilung, wurde noch mehrmals[75]) nach einer der *Maxwell*'schen ähnlichen Methode berechnet, doch wurde, abgesehen von anderen Verschiedenheiten, meist nicht untersucht, in welcher Schicht jedes Molekül wieder zum Zusammenstosse gelangt, sondern es wurden blos alle durch eine bestimmte Fläche gehenden Moleküle auf die Schicht geprüft, von der sie ausgesandt wurden.

In einer späteren Berechnung von *O. E. Meyer*[76]), sowie nachher

---

74) *Maxwell,* Papers 1, p. 391; Phil. mag. (4) 19 (1860), p. 31.

75) *Stefan,* Wien Ber. (2) 65 (1872), p. 363; *Lang,* Wien Ber. (2) 64 (1871), p. 485; Ann. Phys. Chem. 145 (1872), p. 290; *O. E. Meyer,* Ann. Phys. Chem. 125 (1865), p. 589.

76) *O. E. Meyer,* Gastheorie, 1. Aufl., p. 320; 2. Aufl. 2, p. 102.

von *Boltzmann*[77]), *Tait*[78]), *Clausius*[79]) wurde dem Umstande, dass die Moleküle die verschiedensten Geschwindigkeiten haben, durch die Annahme Rechnung getragen, dass in jeder Schicht dieselbe Geschwindigkeitsverteilung herrscht, welche daselbst herrschen würde, wenn sich das ganze Gas mit der sichtbaren Geschwindigkeit dieser Schicht bewegen würde.

Mit einem ziemlich geringen Aufwande von Rechnung ergiebt sich das in den zitierten Abhandlungen gefundene Resultat nach der folgenden Methode[80]). Wir verstehen unter Q irgend eine Eigenschaft der Moleküle, deren Mittelwert $\overline{Q}$ für jedes Volumelement einer der xy-Ebene parallelen Schicht gleich sein und eine lineare Funktion von z etwa az sein soll. Wir betrachten in der xy-Ebene ein Stück vom Flächeninhalte Eins. Die Anzahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit durch dasselbe so hindurchgehen, dass ihre Geschwindigkeit zwischen den Grenzen c und $c + dc$ liegt und mit der positiven z-Axe einen Winkel bildet, der zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, ist

$$dv = \frac{c}{2}\,\varphi(c)\,dc \sin\vartheta\, d\vartheta\,.$$

Dabei ist $\varphi(c)\,dc$ die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeit zwischen den oben definierten Grenzen liegt. Vorausgesetzt wird, dass bei Berechnung von dv die für den Ruhezustand geltende Geschwindigkeitsverteilung an die Stelle der wirklichen gesetzt werden darf (vgl. Nr. **19**). Nach einer in Nr. **17** gemachten Bemerkung ist der mittlere Weg, den jedes der dv Moleküle von seinem letzten Zusammenstosse bis zum Durchgange durch die xy-Ebene zurückgelegt hat, gleich der durch Formel (34) gegebenen Grösse λ_c. Dieser Zusammenstoss erfolgte daher durchschnittlich in einer Schicht mit der z-Koordinate $\lambda_c \cos\vartheta$, und wenn wir annehmen, dass jedes Molekül den dort herrschenden Wert von G durch die xy-Ebene trägt, so tragen die dv Moleküle durch diese Ebene den Gesamtbetrag

$$a\lambda_c \cos\vartheta\, dv$$

dieser Grösse hindurch. Wenn wir alle Geschwindigkeiten gleichsetzen, so ist für $\varphi(c)\,dc$ die Gesamtzahl n der Moleküle in der Volumeneinheit zu setzen. Integriert man nach ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und beachtet, dass ein gleicher entgegengesetzt bezeichneter Betrag in der

77) *Boltzmann,* Wien Ber. (2) 84 (1881), p. 45.
78) *Tait,* Edinb. Trans. 33 (1867), p. 260.
79) *Clausius,* Gastheorie, p. 100.
80) *Boltzmann,* Gastheorie 1, p. 74.

entgegengesetzten Richtung hindurchgetragen wird, so ergiebt sich für die Gesamtmenge der Eigenschaft Q, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit getragen wird, der Wert:

$$\Gamma = \tfrac{1}{3} a c \lambda n. \tag{36}$$

Berücksichtigt man dagegen das Vorkommen aller möglichen Geschwindigkeiten, so hat man auch noch nach c zu integrieren und erhält

$$\Gamma_1 = \tfrac{1}{3} a \int_0^\infty c \lambda_c \varphi(c)\, dc. \tag{37}$$

Setzt man für Q das in der Abszissenrichtung geschätzte Bewegungsmoment mu und für die mittlere Geschwindigkeitskomponente u in dieser Richtung az, so wird $\frac{\Gamma}{a}$ gleich der Reibungskonstante η und es folgt, wenn die Geschwindigkeiten aller Moleküle gleichgesetzt werden:

$$\eta = \tfrac{1}{3} c \lambda \varrho. \tag{38}$$

Wenn wir das *Maxwell*'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz annehmen wollen, so haben wir in Formel (37) für $\varphi(c)$ den Wert (25) zu substituieren und erhalten

$$\eta = k \bar{c} \lambda \varrho, \tag{39}$$

wobei

$$k = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{4x^3}{\psi(x)} e^{-x^2}\, dx. \tag{40}$$

$\psi(x)$ ist die in Nr. 17 durch Gleichung (31) definierte Funktion. Das in k vorkommende bestimmte Integral wurde von *Boltzmann*[81]) und *Tait*[82]) durch mechanische Quadraturen berechnet. Es ergiebt sich

$$k = 0{,}350271,$$

sodass die Werte (38) und (39) von η nur wenig verschieden sind. *O. E. Meyer* hat in der ersten Auflage seiner Gastheorie die Rechnung in etwas anderer Weise durchgeführt und ein etwas anders gebautes bestimmtes Integral erhalten; das von ihm in der zweiten Auflage, sowie von den anderen zitierten Autoren gefundene Integral aber ist mit dem in Gleichung (40) gegebenen identisch.

Schon *Boltzmann* hat l. c. betont, dass auch die Formel (39) für η keineswegs mathematisch exakt ist, da nach Gleichung (21) im

81) *Boltzmann,* Wien Ber. (2) 84 (1881), p. 45.

82) *Tait,* Edinb. Trans. 33 (1867), p. 277.

reibenden Gase eine von der *Maxwell*'schen etwas verschiedene Geschwindigkeitsverteilung herrschen muss und vermöge dieses Umstandes zum Reibungskoeffizienten Glieder hinzukommen, die von keiner geringeren Grössenordnung als die in Formel (39) berücksichtigten sind.

19. Andere Berechnung des typischen Falles der Wärmeleitung. Noch mannigfaltigere Resultate wurden bei Behandlung des typischen Falles der Wärmeleitung erhalten. *Clausius*[83]) hat denselben einer sehr umständlichen Rechnung unterzogen und dabei nachgewiesen, dass die ursprüngliche Formel *Maxwell*'s nicht exakt sein kann, da aus derselben ein Massentransport durch das wärmeleitende Gas folgen würde. Es sind jedoch auch weder die *Clausius*'sche noch die andern in dieser Nummer besprochenen Formeln exakt[84]). Andere Berechnungen des typischen Falles der Wärmeleitung wurden ausgeführt von *Stefan*[85]), *Lang*[86]), *Rühlmann*[87]), *O. E. Meyer*[88]), *Tait*[89]) u. s. w., wobei fast jedesmal ein anderer numerischer Koeffizient erhalten wurde. Die *Maxwell*'sche Geschwindigkeitsverteilung wird dabei von *Meyer* und *Tait* berücksichtigt, doch gilt von der Art und Weise dieser Berücksichtigung das bei der inneren Reibung Gesagte.

Die gleiche Formel für den Wärmeleitungskoeffizienten erhält man in sehr einfacher Weise aus den Gleichungen (36) und (37), wenn man an Stelle von G den gesamten Wärmeinhalt, also die gesamte Energie eines Moleküles einsetzt. Dass möglicherweise die Energie der inneren Bewegung sich in anderer Weise als die der progressiven beteiligt, wurde von *Boltzmann*[90]) diskutiert.

20. Vergleich mit der Erfahrung. Aus Formel (6) kann zunächst die Quadratwurzel $\sqrt{\overline{c^2}}$ aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrate berechnet werden. Sie folgt für alle Gase beiläufig gleich der $1\frac{1}{2}$fachen Schallgeschwindigkeit. Daraus folgt dann mittels des *Maxwell*'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes die mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}$. Aus dem experimentell bestimmbaren Werte des Reibungskoeffizienten lässt sich nach Formel (39) die mittlere Weg-

---

83) *Clausius,* Ann. Phys. Chem. 115 (1862), p. 1 = Ges. Abh. 2, p. 276; Gastheorie, p. 105.

84) *Kirchhoff,* Vorles. über math. Phys.: Theorie der Wärme, p. 210.

85) *Stefan,* Wien Ber. 47^2 (1863), p. 81.

86) *v. Lang,* Wien Ber. 64 (1871), p. 485; 65 (1872), p. 415.

87) *Rühlmann,* Handb. d. mech. Wärmetheorie, p. 198.

88) *O. E. Meyer,* Gastheorie, 1. Aufl., p. 187 u. 188; 2. Aufl. 2, p. 122

89) *Tait,* Edinb. Trans. 33, p. 261.

90) *Boltzmann,* Wien Ber. 72^2 (1875), p. 427.