

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0318

**LOG Titel:** 23. Anwendung der Kugelfunktionen

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

**23. Anwendung der Kugelfunktionen.** Zur Klarlegung der *Maxwell'schen* Schlussweise mögen folgende Ausführungen dienen. Um Betrachtungen über das Verhalten von Gefässwänden zu umgehen, denken wir uns in einem unbegrenzten Raume ein einfaches Gas, auf welches keine äusseren Kräfte wirken. Die Geschwindigkeitsverteilung unter den Molekülen desselben soll nicht die dem Wärmegleichgewichte entsprechende sein, aber sie soll zu Anfang der Zeit und daher auch für alle folgenden Zeitpunkte an allen Stellen des Gases vollkommen gleich sein. Die in Nr. 12 eingeführte Funktion ( $f$ ) soll also unabhängig von  $x, y, z$ , aber für  $t = 0$  eine beliebig gegebene Funktion von  $\xi, \eta, \zeta$  sein. Dann erfährt der Mittelwert  $\bar{Q}$  der übrigens ebenfalls beliebig gegebenen oben mit  $Q$  bezeichneten Funktion durch die sichtbare Bewegung des Gases keine Veränderung, und es bleibt von den vier besprochenen Veränderungen, welche  $\bar{Q}$  während einer unendlich kleinen Zeit  $\delta t$  erfährt, nur die infolge der Zusammenstösse der Moleküle, die mit  $\delta\bar{Q}$  bezeichnet werden soll. *Maxwell* berechnet in den ersteren der zitierten Abhandlungen nur die Veränderungen, welche einige wenige ganz einfache Funktionen von  $\xi, \eta, \zeta$  in diesem Falle erfahren. In der zitierten letzten Abhandlung über diesen Gegenstand aber behandelt er dieses Problem allgemein und gelangt zu folgenden Resultaten, welche natürlich nur für das von ihm angenommene Wirkungsgesetz der Moleküle giltig sind.

1) Wenn  $Q$  irgend eine ganze Kugelfunktion von  $\xi, \eta, \zeta$  ist, so ist  $\delta\bar{Q}/\delta t$  immer gleich dem negativen Produkte von  $\bar{Q} - \bar{Q}_0$  und einem Koeffizienten, der für alle Kugelfunktionen gleicher Ordnung denselben Wert hat und den *Maxwell* den Modulus der Relaxationszeit für die betreffende Kugelfunktion nennt.  $\bar{Q}_0$  ist dabei der dem Wärmegleichgewichte entsprechende Wert von  $\bar{Q}$ . Dasselbe gilt, wenn  $Q$  ein Produkt ist, dessen sämtliche Faktoren Kugelfunktionen sind, und auch wenn dazu noch ein Faktor tritt, der gleich einer ganzen Potenz von  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$  ist.

2) Wenn  $Q$  eine andere ganze Funktion ist, so wird der Ausdruck für  $\delta\bar{Q}/\delta t$  komplizierter und man findet ihn am einfachsten, indem man  $Q$  in eine Summe von Gliedern zerlegt, von denen jedes keinen andern Faktor als Kugelfunktionen oder eine Potenz von  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$  enthält.

3) Der numerische Wert des Moduls der Relaxationszeit kann durch mechanische Quadraturen mittels der besprochenen elliptischen Integrale bestimmt werden, welche den Verlauf der Zentralbewegung beim Zusammenstosse zweier Moleküle bestimmen, und es ist die einzige in der ganzen Theorie vorkommende Grösse, welche von dieser Zentralbewegung abhängt.

Er ist stets enorm gross, so dass  $\bar{Q}$  durch die Zusammenstösse jedes Mal ausserordentlich rasch dem Werte  $\bar{Q}_0$  nahe gebracht wird. Wenn daher in einem Gase sichtbare Bewegungen, Wärmeleitung oder Diffusion stattfinden und sich die sichtbare Geschwindigkeit, die Temperatur oder das Mischungsverhältnis der Gase nicht enorm rapid von Punkt zu Punkt ändert, so wird stets der Mittelwert einer beliebigen Grösse  $Q$  nur wenig von  $\bar{Q}_0$  entfernt sein, da er durch die Zusammenstösse fortwährend wieder sehr nahe an  $\bar{Q}_0$  gebracht wird. Wenn später von sehr kleinen Gliedern und ihrer Grössenordnung gesprochen wird, so ist dieselbe immer in bezug auf Grössen von der Form  $\bar{Q} - \bar{Q}_0$  zu verstehen.

**24. Hydrodynamische Gleichungen ohne Reibung.** *Maxwell* berechnet ferner die Veränderungen von  $\bar{Q}$  infolge der sichtbaren Bewegung des Gases und infolge der Wirksamkeit äusserer Kräfte und erhält so die allgemeine Gleichung für die Veränderung dieser Grösse. Die Anwendungen ergeben sich durch Spezialisierung der Funktion  $Q$ .

Indem *Maxwell* zuerst für  $Q$  eine Konstante, etwa die Masse  $m$  eines Moleküls setzt, geht die besprochene allgemeine Gleichung über in die Gleichung, welche in der Hydrodynamik unter dem Namen der Kontinuitätsgleichung bekannt ist, und welche noch vollkommen streng ohne alle Vernachlässigung gilt. Mit ihrer Hilfe wird die allgemeine Gleichung etwas vereinfacht.

Hierauf setzt *Maxwell*  $Q$  gleich einer linearen Funktion von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , etwa gleich der in einer der Koordinatenrichtungen geschätzten Bewegungsgrösse  $m\xi$ ,  $m\eta$ ,  $m\zeta$  eines Moleküls. Er erhält in dieser Weise für ein einfaches Gas nur die hydrostatischen Gleichungen, und zwar wieder ohne irgend welche Vernachlässigungen, für ein Gemisch zweier Gase aber die Grundgleichungen der Diffusion. Im letztern Falle jedoch treten Glieder von immer höher und höher werdender Grössenordnung in dem soeben definierten Sinne auf. Bleibt man bei den Gliedern erster Ordnung stehen, so findet man, dass die Anwesenheit des andern Gases bloss den Effekt hat, dass jedes Gas bei seinem Fortwandern einen der relativen Geschwindigkeit gegen das andere Gas proportionalen Widerstand erfährt. Hieraus folgen dann die gewöhnlichen Diffusionsgesetze. Der Diffusionskoeffizient ergibt sich unabhängig vom Mischungsverhältnisse dem Gesamtdrucke verkehrt, dem Quadrate der absoluten Temperatur aber direkt proportional. Doch sind diese Gesetze nach der *Maxwell'schen* Theorie nur annäherungsweise richtig, da bei ihrer Entwicklung die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt wurden.