Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0319
LOG Titel: 24. Hydrodynamische Gleichungen ohne Reibung
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

Contact

Er ist stets enorm gross, so dass $\overline{Q}$ durch die Zusammenstösse jedes Mal ausserordentlich rasch dem Werte $\overline{Q}_0$ nahe gebracht wird. Wenn daher in einem Gase sichtbare Bewegungen, Wärmeleitung oder Diffusion stattfinden und sich die sichtbare Geschwindigkeit, die Temperatur oder das Mischungsverhältnis der Gase nicht enorm rapid von Punkt zu Punkt ändert, so wird stets der Mittelwert einer beliebigen Grösse Q nur wenig von $\overline{Q}_0$ entfernt sein, da er durch die Zusammenstösse fortwährend wieder sehr nahe an $\overline{Q}_0$ gebracht wird. Wenn später von sehr kleinen Gliedern und ihrer Grössenordnung gesprochen wird, so ist dieselbe immer in bezug auf Grössen von der Form $\overline{Q} - \overline{Q}_0$ zu verstehen.

24. Hydrodynamische Gleichungen ohne Reibung. *Maxwell* berechnet ferner die Veränderungen von $\overline{Q}$ infolge der sichtbaren Bewegung des Gases und infolge der Wirksamkeit äusserer Kräfte und erhält so die allgemeine Gleichung für die Veränderung dieser Grösse. Die Anwendungen ergeben sich durch Spezialisierung der Funktion Q.

Indem *Maxwell* zuerst für Q eine Konstante, etwa die Masse m eines Moleküls setzt, geht die besprochene allgemeine Gleichung über in die Gleichung, welche in der Hydrodynamik unter dem Namen der Kontinuitätsgleichung bekannt ist, und welche noch vollkommen streng ohne alle Vernachlässigung gilt. Mit ihrer Hilfe wird die allgemeine Gleichung etwas vereinfacht.

Hierauf setzt *Maxwell* Q gleich einer linearen Funktion von ξ, η, ζ, etwa gleich der in einer der Koordinatenrichtungen geschätzten Bewegungsgrösse $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ eines Moleküls. Er erhält in dieser Weise für ein einfaches Gas nur die hydrostatischen Gleichungen, und zwar wieder ohne irgend welche Vernachlässigungen, für ein Gemisch zweier Gase aber die Grundgleichungen der Diffusion. Im letztern Falle jedoch treten Glieder von immer höher und höher werdender Grössenordnung in dem soeben definierten Sinne auf. Bleibt man bei den Gliedern erster Ordnung stehen, so findet man, dass die Anwesenheit des andern Gases bloss den Effekt hat, dass jedes Gas bei seinem Fortwandern einen der relativen Geschwindigkeit gegen das andere Gas proportionalen Widerstand erfährt. Hieraus folgen dann die gewöhnlichen Diffusionsgesetze. Der Diffusionskoeffizient ergiebt sich unabhängig vom Mischungsverhältnisse dem Gesamtdrucke verkehrt, dem Quadrate der absoluten Temperatur aber direkt proportional. Doch sind diese Gesetze nach der *Maxwell*'schen Theorie nur annäherungsweise richtig, da bei ihrer Entwickelung die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt wurden.

Zu den hydrodynamischen Gleichungen gelangt *Maxwell*, indem er für Q quadratische Funktionen von ξ, η, ζ setzt. Um den Grund hiervon einzusehen, muss man bedenken, dass die sichtbare Geschwindigkeit eines Gases an irgend einer Stelle des Raumes nichts anderes ist, als die mittlere Geschwindigkeit der in einem daselbst konstruierten Volumelemente enthaltenen Moleküle. Die Beschleunigung der in einem Volumelemente enthaltenen Gasmasse wird, abgesehen von äusseren Kräften, in der gewöhnlichen Hydromechanik durch die Druckkräfte erzeugt, die von dem umgebenden Gase auf das betreffende Volumelement ausgeübt werden. Nach der Gastheorie aber kommt diese Beschleunigung dadurch zu Stande, dass die in das Volumelement neu eintretenden Moleküle durchschnittlich ein etwas anderes Bewegungsmoment besitzen als die daraus austretenden. Daher setzt die Gastheorie an die Stelle jeder der Druckkräfte $p_{xx}, p_{xy}, \ldots$, welche auf ein zur x-, y- oder z-Axe senkrechtes Flächenelement in einer der Koordinatenrichtungen pro Flächeneinheit wirken, das gesamte in der Zeiteinheit von den Molekülen durch die Flächeneinheit des betreffenden Flächenelements hindurchgetragene, in der betreffenden Koordinatenrichtung geschätzte Bewegungsmoment, wofür man leicht den Wert $\varrho\overline{\xi^2}$, $\varrho\overline{\xi\eta}$, ... findet[106b]), je nachdem die Normale zum Flächenelement und die Richtung, nach welcher das Bewegungsmoment geschätzt wird, beide mit der x-Axe, die eine mit der x-, die andere mit der y-Axe ... zusammenfallen. Unter ϱ ist die Gasdichte zu verstehen. Daraus erklärt es sich, dass man die Bewegungsgleichungen für das Gas, welches jetzt wieder als ein einfaches zu betrachten ist, erhält, indem man in die allgemeine *Maxwell*'sche Gleichung für Q die ganzen Funktionen zweiten Grades $m\xi^2$, $m\xi\eta$, ... setzt. Behält man nur die Glieder der niedrigsten Grössenordnung bei, so ist, wie im ruhenden im Wärmegleichgewichte befindlichen Gase,

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}, \quad p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0,$$

und man erhält die gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen ohne innere Reibung und es tritt jetzt für den im Innern des Gases herrschenden Druck derselbe Ausdruck auf, welcher in den Nrn. 2 und 5 für den Druck des Gases auf die Gefässwand gefunden wurde.

25. Hydrodynamische Gleichungen mit Reibung, Wärmeleitung und Diffusion. Behält man die Glieder von der nächst höheren

106b) $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ sind ja die Bewegungsmomente eines Moleküls, $N\xi$, $N\eta$, $N\zeta$ die Zahl der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit durchgehenden Moleküle, und nm ist $= \varrho$.