

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0323

LOG Titel: 27. Liouvilles Satz

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

rotieren. Er fand, dass dann die mittlere lebendige Kraft der Rotationsbewegung immer gleich der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes, also in Formel (20) $h = 1$ ist. Da ferner wegen der Starrheit der Moleküle die Innenkräfte keine Arbeit leisten, so ist $i = 0$, daher $\kappa = 1\frac{1}{3}$, was für die in der Natur am häufigsten vorkommenden Gase nicht mit der Erfahrung stimmt.

*Boltzmann*¹²³⁾ betrachtet die Moleküle als Aggregate materieller Punkte, welche durch Centralkräfte zusammengehalten werden, erhielt jedoch anfangs ebenfalls Resultate, welche nicht mit der Erfahrung übereinstimmten. Erst später wurde die betreffende Theorie von ihm selbst¹²⁴⁾ und *Maxwell*¹²⁵⁾ erweitert. Letzterer betrachtete die Moleküle allgemein als mechanische Systeme, deren Zustand durch beliebige verallgemeinerte (*Lagrange'sche*) Koordinaten bestimmt ist. In dieser allgemeinen Form zeigt die Theorie manche bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung, wengleich noch keineswegs alle Erscheinungen dieses Gebietes aufgeklärt sind.

27. Liouville's Satz. Die Grundlage dieser Theorie ist ein allgemeiner Satz über die mittlere lebendige Kraft der Bestandteile eines mechanischen Systems, welcher in inniger Beziehung zu einem Theoreme steht, das *Jacobi*¹²⁶⁾ beim Beweise des Theorems vom letzten Multiplikator entwickelt, welcher aber selbst wieder *Liouville* citiert.

Sei die Lage aller Teile eines beliebigen mechanischen Systemes durch n generalisierte Koordinaten p_1, p_2, \dots, p_n gegeben. Die dazu gehörigen Momente seien q_1, q_2, \dots, q_n . Wenn die Werte dieser Variablen zu Anfang der Zeit, also für $t = 0$ zwischen den Grenzen

$$(22) \quad P_1 \text{ und } P_1 + dP_1, \quad P_2 \text{ und } P_2 + dP_2, \dots, \quad Q_n \text{ und } Q_n + dQ_n$$

liegen, so sollen sie zu einer beliebigen spätern Zeit zwischen den Grenzen

$$(23) \quad p_1 \text{ und } p_1 + dp_1, \quad p_2 \text{ und } p_2 + dp_2, \dots, \quad q_n \text{ und } q_n + dq_n$$

liegen. Dann ist immer

$$(24) \quad dp_1 dp_2 \dots dq_n = dP_1 dP_2 \dots dQ_n,$$

123) *Boltzmann*, Wien. Ber. 53 (1866), p. 209, 866; 63 (1871), p. 419.

124) *Boltzmann*, ebenda, 74 (1876), p. 553.

125) *Maxwell*, Cambr. Trans. 12 (1879), p. 547; Papers 2, p. 713; Beibl. 5, p. 403.

126) *Jacobi*, Vorles. über Dynamik, p. 93. Berlin 1866 und 1884.

oder es ist, wenn man p_1, p_2, \dots, q_n als Funktionen von t, P und Q ausdrückt, und in diesen Funktionen t als Konstante ansieht,

$$(25) \quad \sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial P_1}, \frac{\partial p_2}{\partial P_2}, \dots \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} = 1.$$

Dies ist der angeführte *Liouville'sche* Satz. Derselbe wurde zuerst aus den Bewegungsgleichungen der Mechanik, von *Maxwell* jedoch l. c. in sehr eleganter Weise aus den *Hamilton'schen* partiellen Differentialgleichungen hergeleitet.

Aus dem *Liouville'schen* Satze ergeben sich die folgenden Konsequenzen. Es seien unendlich viele gleich beschaffene Systeme gegeben, deren Bewegung von den verschiedensten Anfangswerten der Koordinaten und Momente ausgeht. Zu Anfang der Zeit sei die Anzahl der Systeme, für welche die Werte der Koordinaten und Momente zwischen den Grenzen (23) liegt, gleich

$$f(p_1 p_2 \dots p_n q_1 \dots q_n) dp_1 dp_2 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n.$$

Wenn dann f eine Funktion ist, welche während der Bewegung des Systems ihren Wert nicht verändert (eine Invariante), so bleibt die Zahl der Systeme, für welche die Werte der Koordinaten und Momente zwischen den Grenzen (23) liegen, zu allen folgenden Zeiten unveränderlich, die Geschwindigkeitsverteilung ist stationär. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn f gleich der Energie eines Systems gesetzt wird. Mechanische Betrachtungen, welche von diesen Formeln ausgehen, bezeichnet *Gibbs* als statistische, weil sie nicht die Betrachtung einzelner Systeme, sondern ganzer Scharen von Systemen, die von den verschiedensten Anfangszuständen ausgehen können, zum Gegenstande haben¹²⁷).

Weitere Konsequenzen erhält man, wenn man zudem statt der Momente q_1, q_2, \dots, q_n solche lineare Funktionen r_1, r_2, \dots, r_n derselben (Momentoide nach *Boltzmann*) einführt, dass sich die kinetische Energie des Systems auf $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2$ reduziert. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass die lineare Substitution so gewählt ist, dass die Koeffizienten der r^2 , welche gemeiniglich als von 1 verschieden angenommen werden, sämtlich gleich 1 werden. Dann folgt, dass der Mittelwert sämtlicher r^2 gleich ausfällt, der der gesamten kinetischen Energie also n mal so gross, als der jedes einzelnen r^2 ist. Dieser Satz muss auch für beliebige warme Körper gelten, wenn man annimmt, dass die betreffenden für dieselben berechneten Mittelwerte

127) *Gibbs*, Elementary principles in statistical mechanics (1902); *Bumstead*, Phil. Mag. (6) 7 (1904), p. 8; *van der Waals jun.*, Rede 1903; Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 508.

nicht von der speziellen Beschaffenheit ihres jeweiligen Anfangszustandes und von der speziellen Natur der Einwirkung abhängen, die sie etwa von andern Körpern erfahren. Vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass man sich die warmen Körper unter dem Bilde mechanischer Systeme denkt, deren Molekularzustand durch generalisierte Koordinaten charakterisiert werden kann.

28. Berechnung des Verhältnisses der Wärmekapazitäten aus dem Liouville'schen Satze. Speziell in der Theorie der Gase mit zusammengesetzten Molekülen kann mittels des angeführten *Liouville'schen* Satzes zunächst eine Gleichung entwickelt werden, welche der in Nr. 9 für einatomige Gase entwickelten Gleichung (16) vollkommen analog ist, so dass sich also der in Nr. 11 entwickelte Determinantensatz als spezieller Fall des *Liouville'schen* Theorems erweist. Die Gas-moleküle werden dabei als beliebige mechanische Systeme betrachtet, deren Zustand und Lage im Raume durch n verallgemeinerte Koordinaten p_1, p_2, \dots, p_n charakterisiert werden kann. n heisst die Zahl der Freiheitsgrade. Die verallgemeinerten Koordinaten können immer so gewählt werden, dass die Koordinaten des Schwerpunkts eines Moleküls als 3 derselben figurieren. Die Summe der Quadrate der diesen drei Koordinaten entsprechenden Momentoide ist dann immer gleich der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des betreffenden Moleküles.

Als Schlussresultat ergibt sich, dass auch für Gase mit zusammengesetzten Molekülen der Mittelwert \bar{r}^2 des Quadrats jedes Momentoids gleich ausfallen muss. Da nun die mittlere lebendige Kraft der progressiven Bewegung gleich $3\bar{r}^2$, die gesamte mittlere kinetische Energie $n\bar{r}^2$ ist, so folgt $i = \frac{n}{3} - 1$ und daher

$$\alpha = 1 + \frac{2}{n + 3h}.$$

Wenn die Moleküle als starre ausgedehnte Körper betrachtet werden, so ist $h = 0$. Sind dieselben vollkommene Kugeln, so ist $n = 3$. Es folgt also der schon von *Clausius* für Gase mit einatomigen Molekülen gefundene Wert $\alpha = 1\frac{2}{3}$. Sind die Moleküle starre Rotationskörper, deren Gestalt von der Kugelgestalt verschieden ist, so hat man $n = 5$, daher $\alpha = 1,4$. Sind es aber anders gestaltete starre Körper, so wird $n = 6$, $\alpha = 1\frac{1}{3}$. Gerade diese Werte von α ergibt auch das Experiment für eine Reihe von Gasen, welche einen chemisch einfachen Bau haben. In diesen Fällen stimmt also ein so einfaches mechanisches Bild für die Beschaffenheit der Moleküle bereits gut mit der Erfahrung. In den übrigen Fällen, vielleicht