

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0332

**LOG Titel:** I. Kapillarität als Flächenenergie.

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

sind. Alsdann ist ein überwiegender Anteil dieser Energie dem Volumen der Flüssigkeit proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor, negativ genommen, einen *Druck im Raume* angibt, den man die *Kohäsion* der Flüssigkeit nennt.

Es soll hier die erstere Auffassung der Kapillarität vorangestellt werden, welche dieser Energieform die Trennungsflächen als ausschliesslichen Sitz zuweist. Diese Auffassung erscheint hernach als ein mathematisch einfacher Grenzfall der anderen tieferen Auffassung, welche die ganzen Massen als Spielraum von Kohäsionskräften annimmt.

## I. Kapillarität als Flächenenergie.

**2. Oberflächenenergie und deren Variation.** Eine Trennungsfläche zwischen einer Flüssigkeit  $A$  und einem zweiten Medium  $B$  ist verknüpft mit einer potentiellen Energie  $T_{AB} F_{AB}$ , wobei  $F_{AB}$  den Flächeninhalt der Fläche und  $T_{AB}$  eine von den beiderseits angrenzenden Medien abhängende Konstante ist. Dabei sind  $A$  und  $B$  homogen gedacht und sollen Änderungen von Temperatur und Dichte zunächst nicht in Betracht kommen.  $T_{AB}$  hat die Dimensionen  $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$  und heisst *Oberflächenspannung* von  $A$  gegen  $B$ . Unter der Oberflächenspannung schlechthin versteht man für eine Flüssigkeit diejenige gegen ihren gesättigten Dampf, wovon die einer Trennungsfläche gegen Luft<sup>1)</sup> vielfach keine Verschiedenheit zeigt. Für Wasser gegen Luft ist

$$T = 74 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2} = 0,075 \frac{\text{gr Gewicht}}{\text{cm}},$$

für Quecksilber gegen Luft  $T = 0,55$  gr Gewicht/cm, für Quecksilber gegen Wasser  $T = 0,42$  gr Gewicht/cm.

Die Folgerungen aus dem Bestehen des Terms  $T_{AB} F_{AB}$  in der Energie liessen sich am kürzesten darlegen auf Grund der Bemerkung, dass genau derselbe Ausdruck der Energie Platz greifen würde für eine unendlich dünne elastische Haut, welche die Trennungsfläche bedeckt, wenn in ihr überall eine konstante Spannung  $= T_{AB}$  herrscht, d. h. jede in ihr angebrachte Schnittlinie an beiden Ufern einen von dem anderen fort gerichteten Zug  $T_{AB}$  auf die Längeneinheit erfährt. Diesen Vergleich von vorn herein einzuführen, hiesse aber, die Schwierigkeit, welche für die Theorie der Kapillarität in der Notwendigkeit der Annahme von Druckdiskontinuitäten trans-

---

1) Von einer Oberflächenspannung gegen eine gasförmige Phase kann, streng genommen, nur bei Flüssigkeiten die Rede sein, welche mit der gasförmigen Phase in chemischem Gleichgewicht koexistieren.

versal zu einer Trennungsfläche liegt, nicht beseitigen, sondern nur sie einem anderen Kapitel der Mechanik zuschieben. Um hinsichtlich der Voraussetzungen der Theorie Klarheit zu gewinnen, ist es deshalb notwendig, im wesentlichen den Gang von *Gauss* einzuhalten und den Einfluss des Terms  $TF$  der Energie auf Grund eines allgemeinen Prinzips der Mechanik zu verfolgen, wie des Prinzips, dass Gleichgewicht durch ein Minimum der potentiellen Energie oder, bei Berücksichtigung auch thermodynamischer Umstände, durch ein Minimum der Energie bei konstanter Entropie charakterisiert wird.

Hiernach muss vor allem die virtuelle Veränderlichkeit von  $TF$  betrachtet werden. *Gauss* hat, indem er bei diesem Anlasse überhaupt die Prinzipien für die Variation von Doppelintegralen mit veränderlichen Grenzen schuf, eine fundamentale Transformation für die Variation von  $TF$  entwickelt. Man kann sich allerdings, worauf auch *Gauss* beiläufig hinweist, das Resultat dieser Transformation durch infinitesimale Betrachtungen leicht plausibel machen, indem man eine beliebige unendlich kleine Verrückung einer Fläche in eine erste Verrückung, wobei jeder Punkt normal zur Fläche fortschreitet, und eine zweite Verrückung, wobei jeder Punkt tangential zur Fläche fortschreitet, zerlegt. Doch erscheint es angemessen, hier auch das eigentliche analytische Prinzip jener Umwandlung, welches in einer gewissen partiellen Integration besteht, anzugeben. In Anbetracht des Umstandes jedoch, dass die Variationsrechnung, namentlich in Hinsicht auf Probleme mit Nebenbedingungen, wie sie hier schliesslich vorliegen werden, noch keine allgemein anerkannte Darstellung besitzt, auf die sonst einfach zu verweisen wäre, mag es zur Durchsichtigkeit beitragen, wenn wir nur auf bekanntere Hilfsmittel der Integralrechnung rekurrieren.

Die Trennungsfläche  $F_{AB}$ , die wir uns berandet denken wollen, durchlaufe bei einer virtuellen Bewegung, während welcher der Parameter  $w$  von  $w = 0$  an wächst, eine Schar von Flächen  $F(w)$ . Wir konstruieren auf jeder Fläche die zwei zueinander orthogonalen Scharen von Krümmungslinien und sodann zwei Flächenscharen  $u_2 = \text{const.}$ ,  $u_1 = \text{const.}$ , welche aus den  $F(w)$  gerade diese Krümmungslinien herauschneiden. Wir stellen uns der Einfachheit halber die Flächen  $F(w)$  sämtlich als auseinanderliegend und derart vor, dass in dem von ihnen erfüllten Gebiete jedem Punkte sich hiernach Werte  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  eindeutig zuordnen. Die Richtungen von einem Punkte  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  aus, in denen nur  $u_1$ , nur  $u_2$ , nur  $w$  und zwar zunehmend variiert, sollen in Argumenten trigonometrischer Funktionen kurz durch  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  angedeutet werden, und  $n$  bedeute die nach  $B$

hin gerichtete Normale auf  $F(w)$ ; die  $u_1, u_2, n$ -Richtung sollen stets ein

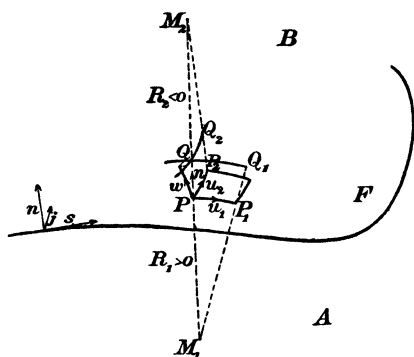


Fig. 1.

Rechtsschraubensystem wie die Koordinatenachsen  $x, y, z$  bilden (Fig. 1).

Die Berandung von  $F(w)$  wird durch eine Gleichung  $u_2 = \chi(u_1, w)$  dargestellt sein, und da wir irgend eine Funktion von  $u_1$  und  $w$  als einen neuen Parameter an Stelle von  $u_1$  einführen können, so dürfen wir diese Gleichung als  $w$  nicht enthaltend:  $u_2 = \chi(u_1)$  annehmen. Das Quadrat des Linienelements in dem von den  $F(w)$  erfüllten Gebiete wird sich

$$(1) \quad \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= L_1^2 (du_1 - l_1 dw)^2 + L_2^2 (du_2 - l_2 dw)^2 + N^2 dw^2 \end{aligned}$$

schreiben lassen, wobei  $L_1 > 0, L_2 > 0$  und  $\frac{N}{\cos(wn)} = L > 0$  sei, also  $N$  mit dem Vorzeichen von  $\cos(wn)$  gerechnet werde. Nun ist

$$F = \iint L_1 L_2 du_1 du_2, \\ (2) \quad \frac{dF}{dw} = \iint \left( L_1 \frac{dL_2}{dw} + L_2 \frac{dL_1}{dw} \right) du_1 du_2,$$

wo das Doppelintegral sich über das Innere von  $u_2 = \chi(u_1)$  erstreckt.

Der Ausdruck hier gestattet auf Grund der charakteristischen Eigenschaft der Krümmungskurven, dass die Normalen längs ihnen eine abwickelbare Fläche bilden, eine wichtige Umformung durch Produktintegration<sup>2)</sup>. Zu einem Punkte  $P(u_1, u_2, w)$  liegt auf der benachbarten Fläche  $F(w + dw)$  in der kleinstmöglichen Distanz  $Ndw = dn$ , also auf der Normalen von  $F(w)$  der Punkt  $Q(u_1 + l_1 dw, u_2 + l_2 dw, w + dw)$ . Entsprechend liege normal über  $P_1(u_1 + du_1, u_2, w)$  auf  $F(w + dw)$  der Punkt  $Q_1$ ; es sei  $M_1$  der Krümmungsmittelpunkt der Krümmungslinie  $PP_1$  auf  $F(w)$ , also der Treffpunkt der Geraden  $PQ$  und  $P_1Q_1$ ,  $R_1$  der Krümmungsradius  $M_1P$  und zwar positiv, falls  $M_1P$  die Richtung  $n$  nach  $B$  hin hat, anderenfalls negativ. Man hat  $PP_1 = L_1 du_1$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $M_1PP_1, M_1QQ_1$  und im Hinblick auf (1) folgt

2) Die zunächst folgende infinitesimale Betrachtung dient nur dazu, diese Eigenschaft der Krümmungslinien schnell in eine Formel umzusetzen.

$$\frac{PQ}{M_1P} = \frac{Q Q_1 - P P_1}{P P_1}, \quad \frac{dn}{R_1} = \frac{1}{L_1} \left( \frac{\partial L_1}{\partial n} dn + L_1 \frac{\partial l_1}{\partial u_1} dw \right),$$

d. i. nach Fortlassung des Faktors  $dw$

$$\frac{N}{R_1} = \frac{1}{L_1} \left( \frac{\partial L_1}{\partial u_1} l_1 + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} l_2 + \frac{\partial L_1}{\partial w} + L_1 \frac{\partial l_1}{\partial u_1} \right).$$

Eine entsprechende Relation gilt für den zweiten Hauptkrümmungsradius  $R_2$  in  $P$  und durch Addition beider entsteht

$$N \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) L_1 L_2 = L_1 \frac{\partial L_2}{\partial w} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial w} + \frac{\partial L_1 L_2 l_1}{\partial u_1} + \frac{\partial L_1 L_2 l_2}{\partial u_2}.$$

Macht man hiervon in (2) Gebrauch und führt partielle Integrationen nach  $u_1$  und  $u_2$  aus, so ergibt sich

$$\frac{dF}{dw} = \int_{(f)} N \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df - \int_{(s)} L_1 L_2 \left( l_1 \frac{du_2}{ds} - l_2 \frac{du_1}{ds} \right) ds,$$

darin bedeutet allgemein  $df$  das Flächenelement,  $ds$  das Randlinienelement von  $F(w)$  in positivem Umlauf um die Normale  $n$ . Bezeichnet man mit  $j$  die Richtung, die normal auf  $ds$  ins Innere der Fläche  $F(w)$  hineinführt (s. Fig. 1), so ist

$$L_1 \frac{du_1}{ds} = \cos(u_2 j), \quad L_2 \frac{du_2}{ds} = -\cos(u_1 j),$$

$$-L_1 l_1 = L \cos(u_1 w), \quad -L_2 l_2 = L \cos(u_2 w);$$

schreibt man noch  $L \cos(wj)dw = dj$ , so entsteht daher aus der letzten Gleichung die folgende Darstellung der ersten Ableitung der Kapillarenergie  $TF$  nach dem Variationsparameter  $w$ :

$$(3) \quad T \frac{dF}{dw} = T \int_{(f)} \frac{dn}{dw} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df - T \int_{(s)} \frac{dj}{dw} ds,$$

die insbesondere für  $w = 0$  anzuwenden sein wird. Darin bedeuten dann die  $dn = Ndw$  für die Punkte der Trennungsfläche die zur Fläche normalen und die  $dj = L \cos(wj)dw$  für die Punkte ihres Randes die in die Fläche fallenden, zum Rande normalen Komponenten der einem Zuwachs  $dw$  entsprechenden Verrückungen; hierauf fussend kann man sich die Transformation (3), wie schon oben angedeutet, unmittelbar geometrisch plausibel machen<sup>2a)</sup>.  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  soll, wie die Vorzeichen von  $R_1$  und  $R_2$  oben festgelegt sind, die *mittlere Krümmung* der Stelle  $df$  nach  $B$  hin heissen.

2a) Wir haben im Übrigen die gebräuchlichen Zeichen  $\delta F$ ,  $\delta w$  u. s. w. der ersten Variationen vermieden, um evident zu machen, dass es sich schließlich nur um Differentialquotienten im gewöhnlichen Sinne handelt.

Da in (3) die Parameter der Krümmungskurven wieder eliminiert sind, so ist diese Darstellung nicht an die anfänglich betreffs der Koordinaten  $u_1, u_2, w$  gemachte Beschränkung gebunden.

Die Volumina von  $A$  und  $B$  seien  $V_A, V_B$ , ihre Dichten  $\varrho_A, \varrho_B$ . Wir merken noch an, dass bei den fraglichen virtuellen Verrückungen die Volumina gemäss

$$(4) \quad \frac{dV_A}{dw} = \int_{F_{AB}} \frac{dn}{dw} df, \quad \frac{dV_B}{dw} = - \int_{F_{AB}} \frac{dn}{dw} df$$

variieren, ferner die potentielle Energie bezüglich der Schwerkraft für beide Medien zusammen die Ableitung nach  $w$ :

$$(5) \quad g(\varrho_A - \varrho_B) \int z \frac{dn}{dw} df$$

erfährt; dabei ist die  $z$ -Axe *vertikal nach oben* gedacht.

**3. Differentialgleichung für eine freie Oberfläche.** Die Trennungsfläche von  $A$  gegen  $B$  sei frei beweglich ( $B$  eine Flüssigkeit wie  $A$  oder ein Gas), und neben der Kapillarität komme nur noch die Schwere in Betracht. Stabiles Gleichgewicht des Systems wird durch ein Minimum der potentiellen Energie gegenüber allen virtuellen Verrückungen charakterisiert. Nun liegt aber eine Nebenbedingung in der Konstanz des Gesamtvolumens von  $A$  (oder von  $B$ , vgl. (4)) vor. Um dieser Nebenbedingung Rechnung zu tragen, ziehen wir die Regeln der Differentialrechnung für ein sogenanntes relatives Extremum heran.

Wir denken uns wieder die Trennungsfläche  $F_{AB}$  als das Element  $w = 0$  einer beliebigen von einem Parameter  $w$  abhängenden Schar von Flächen  $z = \psi(x, y, w)$ , welche alle den Rand gemein haben mögen. Der Nebenbedingung würde allerdings, während  $w$  sich verändert, nicht mehr genügt werden. Denken wir uns aber noch eine beliebige zweite solche Schar von Flächen  $z = \psi^*(x, y, w^*)$ , welche wieder für  $w^* = 0$  von der gegebenen Fläche ausgeht, und erweitern wir diese zwei einparametrischen Scharen irgendwie zu einer Flächenschar mit zwei Parametern  $z = \psi(x, y, w, w^*)$ , welche für  $w^* = 0$  in die erste, für  $w = 0$  in die zweite einparametrische Schar übergeht, so wird die Grösse des Volumens  $V_A$  bei den Flächen dieser allgemeineren Schar eine Funktion  $V_A(w, w^*)$  der zwei Parameter sein, und innerhalb der zweiparametrischen Schar gibt uns diejenige einparametrische Schar, welche durch die Bedingung  $V_A(w, w^*) = V_A(0, 0)$  ausgeschieden wird, jetzt eine tatsächliche virtuelle Bewegung der Trennungsfläche. Danach haben wir die Bedingung zu formulieren,

dass unter allen Flächen der zweiparametrischen Schar, für welche  $V_A(w, w^*) = V_A(0, 0)$  ist, die Fläche  $w = 0, w^* = 0$  das Minimum der potentiellen Energie

$$E = T_{AB} F_{AB} + g \varrho_A \int_A z dv + g \varrho_B \int_B z dv$$

liefert; (die Bezeichnung hier ist so zu verstehen, dass  $dv$  in dem ersten Integral die Volumenelemente von  $A$ , in dem zweiten diejenigen von  $B$  durchläuft). Für dieses Extremum mit einer Nebenbedingung liefert nun die Differentialrechnung in bekannter Weise die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial w} + \lambda_{AB} \frac{\partial V_A}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial w^*} + \lambda_{AB} \frac{\partial V_A}{\partial w^*} = 0 \quad (w = 0, w^* = 0)$$

mit einer geeigneten Konstante  $\lambda_{AB}$ . Die zweite Gleichung dient uns jetzt nur dazu, um zu erkennen, dass der Wert von  $\lambda_{AB}$  in keiner Weise von der beliebig angenommenen ersten Schar  $z = \psi(x, y, w)$  abhängt, also für die Trennungsfläche  $F_{AB}$  an sich eine bestimmte Bedeutung hat; und bei ausdrücklicher Hinzunahme dieser Tatsache vertritt die erste Gleichung bereits das System der beiden. Danach muss (vgl. (3), (4), (5)) mit einer geeigneten Konstante  $\lambda_{AB}$ , die sich schliesslich aus dem Werte von  $V_A$  bestimmen wird, die Bedingung

$$\int_{F_{AB}} N \left( T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + g(\varrho_A - \varrho_B)z + \lambda_{AB} \right) df = 0$$

gelten. Dabei unterliegt vermöge der willkürlichen Wahl der Schar  $F(w)$  die Funktion  $N = \frac{dn}{dw}$  auf der Fläche  $F_{AB}$  einzig der Beschränkung, dass sie durchweg stetig ist und am Rande gleich Null genommen wird. Für  $N$  in diesem Umfange kann das vorstehende Integral nur dann beständig gleich Null ausfallen, wenn der Faktor von  $N$  an jeder Stelle innerhalb  $F_{AB}$  verschwindet, d. h. die Gestalt der freien Oberfläche muss der Differentialgleichung

$$(6) \quad T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + g(\varrho_A - \varrho_B)z + \lambda_{AB} = 0$$

genügen<sup>3)</sup>.

Es kann  $F_{AB}$  auch aus mehreren getrennten Stücken bestehen und  $\lambda_{AB}$  hat für die verschiedenen Stücke denselben Wert.

Ein Minimum von  $E$  ist hier jedenfalls nur möglich, wenn  $T_{AB} \geq 0$  ist, da sonst durch ein Hin- und Herfalten der Trennungsfläche an ihrem Orte sich  $E$  beliebig verringern liesse.

3) Laplace, Supplément au livre X de la Méc. céleste, no. 4.

Es möge  $\varrho_A \geq \varrho_B$  sein. Setzen wir

$$z_{AB} = -\frac{\lambda_{AB}}{g(\varrho_A - \varrho_B)},$$

so wird durch  $z = z_{AB}$  eine bestimmte horizontale Ebene angewiesen, welche *Niveauebene* heissen soll. Verlegen wir  $z = 0$  nach der Niveauebene, so folgt die Gleichung (6) in der Gestalt

$$(6a) \quad T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -g(\varrho_A - \varrho_B)z.$$

Danach ist an jeder Stelle der Trennungsfläche aus der mittleren Krümmung nach *B* hin sofort auf die Lage der Niveauebene zu schliessen. Ist  $\varrho_A > \varrho_B$ , so liegen die Stellen der Trennungsfläche, wo diese mittlere Krümmung positiv ist, d. h. die Fläche nach *B* hin

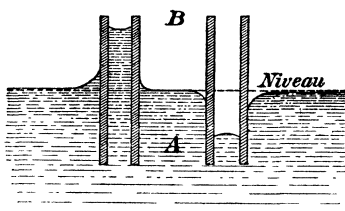


Fig. 2.

konvex-konvex oder konvex-konkav mit grösserem Betrage der ersteren Hauptkrümmung ist, unterhalb der Niveauebene und zwar um so tiefer darunter, je stärker jene mittlere Krümmung ist; Stellen, wo diese Krümmung nach *B* hin negativ ist, liegen oberhalb der Niveauebene, Stellen, wo sie Null ist, notwendig genau in Höhe dieser Ebene (Fig. 2).

Insbesondere kann die Trennungsfläche asymptotisch eben nur in Höhe dieser Ebene sich gestalten, wodurch ihre Bezeichnung als Niveauebene begründet ist.

**4. Randwinkel.** Zur vollständigen Festlegung von  $F_{AB}$  sind ausser der Differentialgleichung (6) weitere Bedingungen für den Rand der Fläche dort, wo *A* und *B* an dritte Medien *C* grenzen, erforderlich.

Grenzen drei Flüssigkeiten *A*, *B*, *C* mit drei Trennungsflächen  $F_{AB}$ ,  $F_{AC}$ ,  $F_{BC}$ , in denen die Oberflächenspannungen  $T_{AB}$ ,  $T_{AC}$ ,  $T_{BC}$

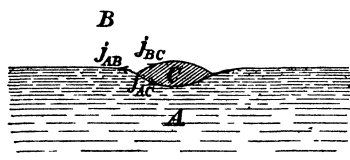


Fig. 3.

herrschen, längs einer Kurve zusammen (Fig. 3), so würde zwar mit jedem virtuellen Bewegungszustand der Randkurve stets auch der entgegengesetzte Bewegungszustand für sie virtuell sein; immerhin wollen wir (weil hernach auch ein Fall von nicht in diesem Sinne

umkehrbaren Verrückungen in Betracht kommt), zunächst nur von dem vorausgesetzten Gleichgewichtszustand an (nicht durch ihn hindurch) variieren, und wir denken uns eine von einem Parameter  $w (\geq 0)$



abhängende Schar von Lagen dieser Randkurve, mit den nämlichen Endpunkten, falls nicht die Kurve geschlossen ist, und von gewissen damit verbundenen Lagen der drei Trennungsflächen; dabei sollen diese stets gemeinsam an der Randkurve ansetzen, ihre sonstigen Randteile aber fest behalten und zugleich in ihren inneren Partien solche Deformationen erfahren, dass die ganzen Volumina von  $A, B, C$  unverändert bleiben. Um zum Ausdruck zu bringen, dass die Gesamtenergie  $E$  im Gleichgewichtszustand für  $w = 0$  am kleinsten ist, haben wir dann in Anbetracht der erst einseitigen Variation bloß die Ungleichung

$$\frac{dE}{dw} \geq 0 \quad (w = 0)$$

zu fordern. Da aber für die Trennungsflächen gemäss (6) bereits solche Gleichungen feststehen, dass die hierin als Flächenintegrale auftretenden Terme für sich Null sind, so zieht sich diese Ungleichung gemäss (3) zu

$$-\int L(T_{AB} \cos(wj_{AB}) + T_{AC} \cos(wj_{AC}) + T_{BC} \cos(wj_{BC})) ds \geq 0$$

zusammen, wobei das Integral über die gegebene Lage der Randkurve zu erstrecken ist und an jedem Elemente  $ds$  unter  $w$  die Richtung, unter  $Ldw$  die Grösse der dem Zuwachs  $dw$  entsprechenden Verückung des Randpunktes, unter  $j_{AB}, j_{AC}, j_{BC}$  die auf  $ds$  ins Innere der Flächen hin errichteten Normalen zu verstehen sind. Da die Funktion  $L$  hier beliebig gewählt werden kann, nur dass sie stetig und stets  $\geq 0$  ist und an den Endpunkten der Randkurve verschwindet, so folgt hieraus

$$(7) \quad -T_{AB} \cos(wj_{AB}) - T_{AC} \cos(wj_{AC}) - T_{BC} \cos(wj_{BC}) \geq 0$$

längs der ganzen Randkurve, und zwar noch für beliebige Richtungen  $w$ . Nun können wir aber mit jeder Richtung  $w$  die entgegengesetzte kombinieren, und ist daher das Zeichen  $\geq$  hier durch  $=$  zu ersetzen. Hiernach müssen sich drei Vektoren von den Längen  $T_{AB}, T_{AC}, T_{BC}$  und den zu  $j_{AB}, j_{AC}, j_{BC}$  parallelen Richtungen zu einem geschlossenen Dreiecke aneinanderfügen<sup>4)</sup>. Der Winkel  $(j_{AB}j_{AC}) = \omega_A$  z. B. ist dann der von den zwei ersten Seiten in diesem Dreieck gebildete Aussenwinkel und hat hiernach längs der ganzen Randkurve einen konstanten aus den drei Spannungen folgenden Wert. Dieser Winkel  $\omega_A$  heisst der *Randwinkel* von  $A$  gegen  $B$  und  $C$ .

Ein erstes Erfordernis für das angenommene Gleichgewicht ist

---

4) Diese Bedingung ist von *F. Neumann* aufgestellt und zuerst in der Dissertation von *Paul du Bois-Reymond* (Berlin 1859) veröffentlicht worden.

nun, dass aus den drei Längen  $T_{AB}$ ,  $T_{AC}$ ,  $T_{BC}$  überhaupt ein Dreieck zu bilden ist, d. h. dass von jenen drei Spannungen keine grösser als die Summe der beiden anderen ist. Ist jedoch etwa  $T_{AB} > T_{AC} + T_{BC}$ , so wird vielmehr  $C$  sich zwischen  $A$  und  $B$  ausziehen, eventuell zu einer dünnen Schicht mit zwei einander derart nahe liegenden Trennungsflächen gegen  $A$  und  $B$ , dass dadurch Umstände resultieren, die erst auf Grund der Annahme einer räumlichen Verteilung der Kapillarenergie genauer zu verfolgen sein werden.

Die Relation  $T_{AB} > T_{AC} + T_{BC}$  für drei Medien dient als hinreichende Erklärung der mannigfachsten Kapillärphänomene<sup>5)</sup>.

Nach den Beobachtungen von *Marangoni*<sup>6)</sup> ist in allen Fällen für zwei Flüssigkeiten die gegenseitige Oberflächenspannung kleiner als die Differenz ihrer Oberflächenspannungen gegen Luft<sup>1)</sup>, hierbei also niemals jenes Dreieck von Spannungen realisierbar. Der Fall von Quecksilber und Wasser, den *Marangoni* als eine Ausnahme ansah, fügt sich dieser allgemeinen Regel<sup>6a)</sup>. Wenn Wasser auf Quecksilber in einem Tropfen steht, so haften der Quecksilberoberfläche fremde Bestandteile an, die ihre Spannung herabsetzen<sup>7)</sup>.

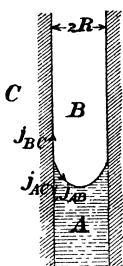


Fig. 4.

Stellt  $C$  einen festen Körper vor, so kann die Trefflinie von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nur auf der Oberfläche dieses frei verschoben werden, und erhalten wir die Relation (7) in dem entsprechenden beschränkteren Umfange, nämlich, wenn  $C$  keine Diskontinuität der Tangentialebene an der Randkurve hat (Fig. 4), einmal so, dass  $w$  mit  $j_{AC}$ , das andere Mal so, dass  $w$  mit  $j_{BC}$  zusammenfällt, und wir erschliessen damit

$$(8) \quad \cos \omega_A = \frac{T_{BC} - T_{AC}}{T_{AB}},$$

5) Eine bis zur Gegenwart reichende Übersicht der Beobachtungsmethoden und -ergebnisse zur Kapillarität bringt der Artikel von *F. Pockels* im Handbuch der Physik, herausg. von *A. Winkelmann*, Bd. 1 (Breslau 1907).

6) *Marangoni*, Sull' espansione delle gocce di liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido, Pavia 1865; Ann. Phys. Chem. 143 (1871), p. 348. Dieselbe Tatsache fanden *van der Mensbrugghe*, Mém. cour. de l'Acad. de Belg. 34 (1869); ferner *Lüdtge*, Ann. Phys. Chem. 137 (1869), p. 362.

6a) *Quincke*, Ann. Phys. Chem. 139 (1870), p. 66. *Lord Rayleigh*, Sc. papers 3, p. 562.

7) Das Ausbreiten eines Tropfens einer Flüssigkeit auf einer anderen Flüssigkeit geschieht jedesmal in charakteristischen Formen, die mit den Substanzen sehr mannigfaltig variieren, den *Tomlinsonschen* Kohäsionsfiguren; vgl. darüber *O. Lehmann*, Molekularphysik 1 (Leipzig 1888), p. 260; *Paul du Bois-Reymond*, Ann. Phys. Chem. 139 (1870), p. 262.

wo  $\omega_A$  wieder den Randwinkel ( $j_{AB}j_{AC}$ ) von  $A$  gegen  $B$  und  $C$  bezeichnet<sup>8)</sup>.

Diese Relation würde unmöglich sein, wenn der Quotient rechts dem Betrage nach  $> 1$  (oder  $< -1$ ) ausfällt. Im Falle  $T_{BC} > T_{AC} + T_{AB}$  (es brauchten hier  $T_{AC}$ ,  $T_{BC}$  nicht  $\geq 0$  zu sein) kommt dann Gleichgewicht dadurch zu Stande, dass sich die Flüssigkeit  $A$  am festen Körper  $C$  in einer selbst mikroskopisch nicht messbaren dünnen Schicht entlang zieht,  $C$  benetzt, wodurch an der zu bemerkenden Randlinie  $B$  beiderseits an  $A$  grenzt und daher eben nach dieser Formel (8), worin nun  $A$  statt  $C$  und  $T_{AA} = 0$  zu nehmen ist, sich der Randwinkel von  $A$  gleich Null herausstellt.

Hat die Wand des festen Körpers  $C$  an der Randkurve gerade eine Schneide, (ein Fall, wie er sich bei der Adhäsion einer Flüssigkeit an einem festen Körper leicht darbietet (Fig. 5)), so kommen zweierlei nicht entgegengesetzte Verschiebungen der Randkurve auf  $C$  in Betracht. Das Ergebnis ist dasselbe, als wenn man sich die Schneide als Grenze abgerundeter Formen denkt; man kommt zur Ungleichung (7) einmal so, dass darin  $w$  durch  $j_{AC}$ , aber  $j_{BC}$  durch die zu  $j_{AC}$  entgegengesetzte Richtung, das andere Mal so, dass darin  $w$  durch  $j_{BC}$ , aber  $j_{AC}$  durch die zu  $j_{BC}$  entgegengesetzte Richtung vertreten wird; man erhält demnach

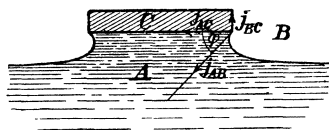


Fig. 5.

$$- T_{AB} \cos (j_{AC}j_{AB}) - T_{AC} + T_{BC} \geq 0,$$

$$- T_{AB} \cos (j_{BC}j_{AB}) + T_{AC} - T_{BC} \geq 0,$$

d. h.

$$(9) \quad (j_{AC}j_{AB}) \geq \omega_A, \quad (j_{AB}j_{BC}) \geq \pi - \omega_A,$$

wo  $\omega_A$  den durch (8) bestimmten Winkel  $\geq 0$  und  $\leq \pi$  bedeutet. Aus beiden Relationen zusammen folgt

$$(j_{AC}j_{BC}) \geq \pi.$$

Danach kann im Zustande des Gleichgewichts die Grenzlinie der freien Oberfläche niemals längs eines endlichen Stücks auf einer konkaven Schneide des festen Körpers liegen<sup>9)</sup>.

8) Quincke (Ann. Phys. Chem. 137 (1869), p. 42) fand, dass längs einer auf Glas keilförmig aufgetragenen dünnen Silberschicht Wasser oder Quecksilber einen konstanten Randwinkel erst dort ergibt, wo die Dicke der Silberlamelle mindestens  $50 \times 10^{-7}$  cm beträgt.

9) Gauss, Principia generalia theoriae figurae fluidorum, art. 30.

Die Bedingungen für das Zusammentreffen von vier Flüssigkeiten in einem Punkte sind nunmehr ohne weiteres ersichtlich. Die Möglichkeit der Bildung einer neuen Trennungsfläche an einer Linie, längs der mehr als drei Flüssigkeiten zusammentreffen, erörterte Gibbs<sup>10)</sup>.

**5. Kapillardruck. Oberflächenspannung.** Wollen wir den Begriff des Drucks in einer Flüssigkeit auch bei Erscheinungen der Kapillarität verwenden, so wird die Vorstellung notwendig, dass dieser Druck an einer Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten im Allgemeinen sich diskontinuierlich ändert. Die Diskontinuitäten sind mit den Schwerpunkts- und Flächensätzen der Mechanik in Übereinstimmung zu bringen. Will man die Diskontinuitäten weiter begründen, ohne jedoch Hypothesen über Molekularkräfte einzuführen, so kann man von dem Ansatz ausgehen, dass in einer Flüssigkeit an jeder Stelle eine räumliche Energiedichte besteht, welche von der Massendichte daselbst und auch noch von den örtlichen Differentialquotienten der Massendichte abhängt. Man hat sodann einen Grenzübergang in der Weise zu vollziehen, dass die Differentialquotienten der Massendichte im Allgemeinen gleich Null gesetzt werden und nur an gewissen Flächen derart unendlich werden, dass dort die Massendichte einen konstanten Sprung erfährt. Der Begriff des Druckes entsteht dabei als der negativ genommene Differentialquotient der Energie einer Masse nach ihrem Volumen (Gl. (42) in Nr. 18).

Der Kürze wegen begnügen wir uns hier mit folgenden mehr axiomatischen Festsetzungen: Innerhalb einer einzelnen Flüssigkeit  $A$  variiert der Druck stetig mit der Dichte, ist aber nur bis auf eine additive Konstante zu bestimmen; bei gewisser Verfügung über diese Konstante wollen wir von ihm als *kinetischem Druck* sprechen. Nun seien zwei verschiedene, der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten  $A$  und  $B$  durch eine horizontale Ebene  $z = 0$  getrennt und eine jede derart beschaffen, dass in ihr Dichte und Temperatur überall nur von der Vertikalhöhe  $z$  abhängen. Alsdann erleidet der kinetische Druck beim Übergang von  $A$  nach  $B$  eine Diskontinuität, die wir als *Kohäsionssprung* bezeichnen wollen. Die bezügliche Abnahme des kinetischen Drucks von  $A$  nach  $B$  können wir in die Form  $K_A - K_B$  setzen, so dass  $K_A$  nur von  $A$ ,  $K_B$  nur von  $B$  abhängt.

Die Differenz  $P_A - K_A = p_A$  soll dann der *hydrodynamische Druck* in  $A$  heißen; dieser Druck würde nun an horizontalen Trennungsflächen keinerlei Diskontinuität erfahren. In einer ruhenden Flüssigkeit  $A$ , in welcher die Dichte nahezu als konstant anzusehen

10) Gibbs, Equilibrium of heterogeneous substances, p. 453.

ist, variiert der Druck  $p_A$  derart, dass er abhängig von der Vertikalhöhe  $z$  allgemein den Ausdruck  $p_0 - \varrho_A g z$  hat, wo  $p_0$  eine Konstante ist.

Nun mögen zwei ruhende Flüssigkeiten  $A$  und  $B$  von verschiedener Dichte eine beliebige, der Differentialgleichung (6) entsprechende Trennungsfläche  $F_{AB}$  haben; wir bestimmen die Niveauebene dazu, wählen sie als Ebene  $z = 0$  und denken uns andererseits in einem sehr weiten Gefässe ebenfalls  $A$  und  $B$  und beide durch eine horizontale Ebene und zwar genau in Höhe jener Niveauebene getrennt, und verbinden endlich die  $A$  beiderseits und die  $B$  beiderseits je durch eine kommunizierende Röhre (Fig. 6), so wird das Gleichgewicht nach der Gleichung (6a) bestehen bleiben. Ist nun  $p_0$  der in jener horizontalen Trennungsfläche in  $A$  und  $B$  gleiche hydrostatische Druck, so ist dieser Druck in  $A$  in einer Höhe  $z$  gleich  $p_A = p_0 - \varrho_A g z$  und in  $B$  in einer Höhe  $z$  gleich  $p_B = p_0 - \varrho_B g z$ . An einer beliebigen Stelle der Trennungsfläche  $F_{AB}$  findet daher gemäss (6a) eine Druckdiskontinuität

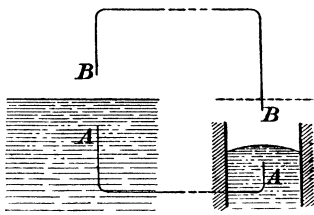


Fig. 6.

$$(10) \quad p_A - p_B = -g(\varrho_A - \varrho_B)z = T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

statt. Diese Differenz heisst der *Kapillardruck* an der Stelle in  $A$ .

Stellt  $B$  den gesättigten Dampf der Flüssigkeit  $A$  vor, so ist  $p_0$  der Sättigungsdruck über einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche, und würde dagegen  $p_B$  den Druck des im Gleichgewicht mit der Flüssigkeit befindlichen Dampfes über einer solchen Stelle der Flüssigkeit, welche nach dem Dampfe hin die mittlere Krümmung  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  zeigt, angeben; danach überwiegt der letztere Sättigungsdruck  $p_B$  um

$$\frac{\varrho_B}{\varrho_A - \varrho_B} T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

den Druck  $p_0^{11}$ ). Es folgt daraus z. B. ein vermehrtes Verdampfungsbestreben kleinster Wassertropfchen in der Luft, weil mit dem Gleich-

11) W. Thomson, Edinburgh Proc. Roy. Soc. 7 (1870), p. 63. — In einer Kapillarröhre vom Radius 0,00012 cm, in welcher Wasser 1300 cm steigt, würde der Gleichgewichtsdruck des Wasserdampfes um etwa  $\frac{1}{1000}$  kleiner als der Wert dafür über der Niveauebene sein. Mit den durch die Relation (10) gegebenen Umständen hängt auch der Siedeverzug luftfreier Flüssigkeiten, ferner die Schwierigkeit der Bildung der ersten Bläschen bei der Elektrolyse zusammen.

gewichtsdruck des Dampfes über einer ebenen Wasseroberfläche noch nicht der Gleichgewichtsdruck über den Oberflächen der Tröpfchen erreicht ist.

Ist in dieser Weise einmal die Druckdiskontinuität des Kapillardrucks eingeführt, so würde das Bestehen der Trennungsflächenenergie nach dem Ausdrucke (3) ihrer Ableitung vollständig mit der weiteren Annahme zu erschöpfen sein, dass ausserdem an jedem Randelement der Trennungsfläche in ihr, normal gegen den Rand nach innen gerichtet, eine konstante Zugspannung  $= T_{AB}$ , auf die Längeneinheit der Randlinie berechnet, herrscht.

Indem nun die Formel (3) sich auch auf jeden beliebigen Ausschnitt aus der Trennungsfläche anwenden lässt, würden die Kapillardrucke längs der Fläche und diese Zugspannungen an ihrem Rande für die virtuelle Arbeit gleichbedeutend mit der Annahme sein, dass *überall innerhalb der Trennungsfläche eine konstante Spannung  $= T_{AB}$  herrscht*. Aber sprechen wir in solcher Allgemeinheit von einer Spannung innerhalb der ganzen Fläche, so heisst dieses im Grunde nichts anderes als: Es besteht für die Trennungsfläche eine potentielle Energie  $= T_{AB} F_{AB}$ , wovon wir eben ausgegangen sind.

Auf diese Analogie einer Flüssigkeitsoberfläche mit einer elastischen Haut gründete *Thomas Young*<sup>12)</sup> eine vollständige Theorie der Kapillarphänomene, die allerdings durch Vermeidung mathematischer Symbole an Durchsichtigkeit einbüsste. Den Begriff der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit hat *Segner*<sup>13)</sup> eingeführt.

**6. Formen freier Oberflächen. Tropfen.** Die Differentialgleichung einer freien Oberfläche kommt in Versuchen namentlich unter zweierlei speziellen Umständen in Betracht; nämlich es handelt sich meist entweder um Rotationsflächen um eine vertikale Axe oder aber um Zylinderflächen mit horizontalen Erzeugenden, wobei letztere Flächen auch noch als eine Approximation der ersteren bei grossem Querschnitt dienen.

Im Falle einer *Rotationsfläche um die z-Axe* sei für die Meridiankurve  $r$  der Abstand von der Axe,  $\varphi$  der Neigungswinkel der Tangente gegen die horizontale  $r$ -Axe (Fig. 7), also  $\operatorname{tg} \varphi = dz/dr$ , so ist die

12) *Th. Young*, Essay on the cohesion of fluids, Phil. Trans. Roy. Soc. London 1805. — Für die Würdigung der Leistung von *Young* vgl. Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. 30 (1890), p. 285, 456 = Scientific papers 3, p. 397.

13) *Segner*, Comment. soc. reg. Gotting. 1 (1751), p. 301. — *Plateau* (Statique des liquides, chap. V) gibt eine bis 1869 geführte historische Übersicht über die Arbeiten zur Theorie der Oberflächenspannung. Mannigfache Belege zu dieser Theorie hat namentlich *Van der Mensbrugghe* beigebracht.

Krümmung der Kurve  $-\frac{1}{R_1} = -\frac{d\varphi}{(\cos\varphi)^{-1}dr}$  und die reziproke Länge der Normale  $-\frac{1}{R_2} = \frac{\sin\varphi}{r}$ , die Gleichung (6) geht also in

$$(11) \quad T_{AB} \frac{d(r \sin \varphi)}{r dr} = \lambda_{AB} + g(\varphi_A - \varphi_B)z$$

über.

Zumeist handelt es sich um eine solche partikuläre Lösung dieser Gleichung, welche die Axe trifft und sie dann notwendig senkrecht durchsetzt, damit die Fläche sich an der Stelle regulär verhält. Diese Lösung hängt nur noch von einer Konstante ab, da  $dz/dr = 0$  für  $r = 0$  gefordert wird. Verlegt man den Koordinatenanfang in jenen Treffpunkt mit der Kurve, so bedeutet  $2T_{AB}/\lambda_{AB}$  den Krümmungsradius daselbst und bei Wahl dieser Grösse als Längeneinheit hängt die Form der Kurve nur noch von *einem* Parameter ab, der die Relation zwischen dem vorgeschriebenen Werte des Randwinkels von  $A$  am Ende der Meridiankurve und dem Volumen von  $A$  vermitteln muss.

Laplace<sup>14)</sup> und in der Folge Lord Kelvin<sup>15)</sup> haben die Meridiankurve der kapillaren Rotationsfläche aus kleinen Kreisbögen mit stetig sich aneinanderreihenden Tangenten unter Berechnung der Krümmung am Anfange jedes Bogens gemäss der Gleichung (11) angenähert aufgebaut. C. V. Boys<sup>16)</sup> hat diese Methode besonders handlich gemacht, indem er die Kreisbögen durch eine feste Marke an einem (durchsichtig hergestellten) Lineal beschreibt, auf dem das Drehungszentrum sukzessive verändert wird, wodurch die Stetigkeit in den Tangenten der sukzessiven Kreisbögen gesichert wird. Zudem sind die Teilstriche des Lineals durch ihre reziproken Entfernungen von der festen Marke bezeichnet, an der selbst dann  $\infty$  steht. Bashforth<sup>17)</sup> lieferte ausgedehntes Tabellenmaterial zu jener partikulären Lösung von (11). C. Runge<sup>18)</sup> nahm die Gleichung als Beispiel bei Darlegung einer numerischen Integrationsmethode für die Differentialgleichungen zweiter

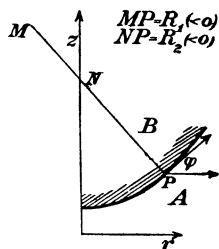


Fig. 7.

14) Laplace, *Connaissance des Temps*, 1812.

15) W. Thomson, *Capillary attraction*, Proc. Roy. Inst. 11 (1886), aufgen. in *Popular lectures and addresses* 1, London 1889. Der Aufsatz enthält verschiedene Diagramme zur Illustration des Verfahrens. — J. C. Schalkwijk, *Leiden Communic.* No. 67 (1901).

16) C. V. Boys, *Phil. Mag.* (5) 36 (1893), p. 75.

17) Bashforth and Adams, *An attempt to test the theories of capillary action*, Cambridge 1883.

18) C. Runge, *Math. Ann.* 46 (1895), p. 167.

Ordnung. Eine im Bereiche  $0 \leq \varphi < \pi/2$  konvergente Entwicklung von  $z$  nach Potenzen von  $r$  für die Lösung von (11) behandelten *K. Lasswitz*<sup>19)</sup>, *Th. Lohnstein*<sup>20)</sup>. Allerhand Annäherungsformeln, bez. des Krümmungsradius für  $r=0$ , des Maximalwertes von  $r$  u. s. w. findet man bei *Poisson*<sup>21)</sup>, *Fr. Neumann*<sup>22)</sup>, *A. König*<sup>23)</sup>, *H. Siedentopf*<sup>24)</sup>.

Die Formen eines Quecksilbertropfens auf einer horizontalen Unterlage, einer gegen eine Horizontalebene stossenden Luftblase, eines an einer Horizontalebene hängenden Wassertropfens sind Rotationsflächen, bestimmt durch die Differentialgleichung (11), durch die Forderung, die Axe zu treffen, durch den Randwinkel am Endpunkt der Meridiankurve und durch das vorliegende Volumen.

Hängt die Lösung der Gleichung (6) von  $y$  nicht ab, ist sie also eine Zylinderfläche mit horizontalen Erzeugenden parallel der  $y$ -Axe, so wird die Gleichung ihres vertikalen Querschnitts mit der  $xz$ -Ebene, wenn  $\varphi$  den Winkel der Tangente gegen die  $x$ -Axe,  $ds$  das Bogenelement bedeutet:

$$(12) \quad T_{AB} \frac{d \sin \varphi}{dx} = T_{AB} \frac{d \varphi}{ds} = \lambda_{AB} + g(\varphi_A - \varphi_B)z.$$

Es ist das die Gleichung der Gleichgewichtsform, die ein elastischer gleichförmiger unendlich dünner und ohne äussere Kräfte geradliniger Stab annimmt, wenn an den Enden zwei in die Richtung der positiven und negativen  $x$ -Axe fallende entgegengesetzt gleiche Kräfte und dazu die geeigneten Kräftepaare angreifen<sup>25)</sup>. Die Differentiation von (12) nach  $s$  ergibt

$$T_{AB} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = g(\varphi_A - \varphi_B) \sin \varphi,$$

und ist danach,  $\varphi_A > \varphi_B$  angenommen, die Abhängigkeit des Winkels  $\pi - \varphi$  von  $s$  dieselbe wie des Ausschlags eines gewöhnlichen mathematischen Pendels mit der Länge  $\frac{T_{AB}}{\varphi_A - \varphi_B}$  von der Zeit. Wird  $z=0$  nach der Niveauebene gelegt, also  $\lambda_{AB}=0$  angenommen, so erhält man aus (12) durch Multiplikation mit  $\operatorname{tg} \varphi dx = dz$  und Integration, entsprechend dem Integral der lebendigen Kraft in der Pendel-

19) *K. Lasswitz*, Inaug.-Diss. Breslau 1873.

20) *Th. Lohnstein*, Inaug.-Diss. Berlin 1891.

21) *Poisson*, Nouv. théor. de l'act. capill., Paris 1831.

22) *Fr. Neumann*, Vorl. über Capill. 1894.

23) *A. König*, Ann. Phys. Chem. 16 (1882), p. 10.

24) *H. Siedentopf*, Ann. Phys. Chem. 61 (1897), p. 235.

25) Vgl. z. B. *A. E. H. Love*, A treatise on the mathematical theory of elasticity 2 (Cambridge 1893), Arts. 227—229.



bewegung:

$$(13) \quad T_{AB}(c - \cos \varphi) = g(\varrho_A - \varrho_B) \frac{z^2}{2}.$$

Darin ist die Integrationskonstante  $c = 1$ , wenn die Fläche sich asymptotisch an die Niveaubene heranzieht, und  $c > 1$ , wenn sie sonst eine horizontale Tangente hat; andererseits ist, wenn die Fläche einen Wendepunkt ( $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ ) besitzt, notwendig  $c < 1$ .

Die Form eines an einer Horizontalebene hängenden zylindrischen Tropfens, wie er durch Austreten einer Flüssigkeit aus einem langen Spalt entstehen könnte, hat *Fr. Neumann*<sup>26)</sup> behandelt. Um über die Stabilität der Form zu entscheiden, haben wir das *Jacobische Kriterium* für ein Extremum in einem Variationsproblem heranzuholen. Benutzt  $A$  die Ebene und wird der Einfachheit halber  $2T_{AB} : g(\varrho_A - \varrho_B)$  als Flächeneinheit eingeführt, so kommt hier das Variationsproblem darauf hinaus, in einem Intervalle  $-x_0 \leq x \leq x_0$ , dessen Länge  $2x_0$  ebenfalls noch gesucht wird, eine an den Enden verschwindende stetige Funktion  $z(x)$  derart zu bestimmen, dass

$$\int_{-x_0}^{x_0} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} - 1 - z^2 \right) dx$$

zu einem *Minimum* wird, während  $\int_{-x_0}^{x_0} z dx = J$  gegeben ist. In einer

gewissen Tiefe  $\frac{1}{2}z_0$  unter der Horizontalebene zeigt das tellerförmige Profil des Tropfens durch einen Wendepunkt die Niveaubene an und verläuft sodann gemäss (13) bis zum tiefsten Punkte als spiegelbildliche Fortsetzung am Wendepunkt, so dass  $z_0$  die ganze Tiefe des Tropfens wird. Ist  $2\theta$  die Neigung der Wendetangente gegen die Horizontale und  $\kappa = \sin \theta$ , so findet man auf Grund von (13):

$$z_0 = 2\sqrt{2}\kappa, \quad x_0 = \sqrt{2}(2E - K), \quad J = x_0 z_0,$$

wo  $K$  und  $E$  die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul  $\kappa$  sind. Der Ausdruck  $J = x_0 z_0$  hat ein Maximum ungefähr bei  $\theta = 35^\circ 32'$  mit  $J = 2,606$ . Nur wenn das Volumen des Tropfens auf die Längeneinheit des Spalts,  $J$ , unterhalb dieser Grösse liegt, gibt es überhaupt Tropfenformen, welche den Gleichungen des Problems entsprechen, und zwar dann eine breitere und weniger tiefe Form, wobei  $\theta < 35^\circ 32'$  ist, und eine schmalere tiefer herunterhängende, für welche diese stärkste Neigung gegen die Horizontale  $> 35^\circ 32'$  ist. Nur die erstere Form ist stabil.

26) *Fr. Neumann*, Vorl. über Capill., p. 117.

Dass für rotationsförmige hängende Tropfen die Verhältnisse analog liegen dürften, geht aus einem Experiment von Lord *Kelvin*<sup>27)</sup> hervor, wonach eine um einen horizontalen Metallring gespannte dünne Kautschukhaut, die durch Hinaufgiessen von Wasser in eine tropfenähnliche Form gedehnt wird, in einem gewissen Stadium der Füllung ruckweise eine Lage instabilen Gleichgewichts passiert.

Nach dem Abreißen eines Tropfens zieht sich der ausgezogene zurückschnellende Hals in einen oder mehrere kleinere Tropfen zusammen. Der Vorgang wird der Beobachtung zugänglicher, wenn die Tropfenbildung in einer nur wenig leichteren Flüssigkeit erfolgt, ist jedoch einer mathematischen Behandlung noch nicht unterzogen<sup>28)</sup>.

**7. Steighöhen.** Die in einem Gefässe  $C$  senkrecht unterhalb der Trennungsfläche  $F_{AB}$ , von der Niveaubene  $z = z_{AB}$  an gerechnet, stehende Masse von  $A$  überwiegt die dadurch verdrängte Masse von  $B$  um

$$\begin{aligned} g(\varrho_A - \varrho_B) \int_{F_{AB}} (z - z_{AB}) \cos(nz) df &= - T_{AB} \int_{F_{AB}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cos(nz) df \\ (14) \qquad \qquad \qquad &= - T_{AB} \int \cos(j_{AB} z) ds, \end{aligned}$$

wo letzteres Integral sich über den Rand von  $F_{AB}$  erstreckt. Die erste Umformung folgt aus (6), die zweite durch Anwendung der Formel (3) auf eine Parallelverschiebung der Fläche in der  $z$ -Richtung, wobei ihr Flächeninhalt sich nicht ändert. Steht die Gefässwand am Rande von  $F_{AB}$  überall vertikal, so ist hier  $(j_{AB} z) = \pi - \omega_A$ , unter  $\omega_A$  den Randwinkel von  $A$  verstanden, und wird daher der letzte Ausdruck in (14)  $= T_{AB} \cos \omega_A U$ , wo  $U$  den Umfang der Randkurve bedeutet, insbesondere demnach positiv, Null oder negativ, je nachdem der Winkel  $\omega_A$  spitz, ein rechter oder stumpf ist.

Stellt  $C$  eine vertikale Kapillarröhre mit kreisförmigem Querschnitte vom Radius  $R$  vor, so tritt in der Röhre ein Aufsteigen

27) *W. Thomson*, Popular lectures and addresses 1, London 1889, p. 38. — Daraus sind die Tropfenformen in Fig. 8 oben entnommen.

28) *G. Hagen*, Ann. Phys. Chem. 67 (1846), p. 1, 152; 77 (1849), p. 449. — *C. V. Boys*, Seifenblasen. Vorl. über Capill. Deutsche Übers. von G. Meyer, Leipzig 1893, p. 33, 65. — Die Beziehungen zwischen dem Durchmesser einer Röhre und dem Gewicht daraus abfallender Tropfen behandeln Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. 48 (1899), p. 321 (Sc. papers 4, p. 415), *Th. Lohnstein*, Ann. Phys. Chem. 20 (1906), p. 237, p. 606. — *A. M. Worthington* and *R. S. Cole*, Impact with a liquid surface, London Phil. Trans. 189 (1897), p. 137.

oder eine Depression von Flüssigkeit ein (wir denken uns hier  $\varrho_A > \varrho_B$  und  $B$  oberhalb  $A$  gelegen), je nachdem der Randwinkel von  $A$  spitz oder stumpf ist, im speziellen also ein Ansteigen, wenn  $A$  die Röhre benetzt. Die mittlere Steighöhe über der Querschnittsfläche der Röhre ist nach (14)

$$h_m = \frac{2 T_{AB} \cos \omega_A}{g (\varrho_A - \varrho_B) R} = 2 \frac{T_{BC} - T_{AC}}{g (\varrho_A - \varrho_B) R},$$

also *umgekehrt proportional dem Radius der Röhre*<sup>29)</sup>. Der Meniskus lässt sich in erster Annäherung als eine Kugelfläche ansehen. Approximiert man ihn genauer als ein Rotationsellipsoid um die Röhrenaxe<sup>30)</sup>, welches mit ihm im Randwinkel, in dem Krümmungsradius auf der Axe und im angehobenen Gewicht übereinstimmt, so folgt z. B., wenn  $A$  die Röhre benetzt, als Steighöhe auf der Axe

$$h = \frac{h_m}{1 + \frac{1}{3} \frac{R}{h_m}}.$$

Werden in einer Kapillarröhre mehrere die Wand nicht benetzende Flüssigkeiten  $A, B, B^*, \dots$  übereinander geschichtet, so ist das gesamte angehobene Gewicht das nämliche, als wenn sich über  $A$  nur  $B$  befände. Ein Einwand, den *Young* aus Beobachtungen gegen diese Schlussfolgerung und damit überhaupt gegen die Theorie von *Laplace* erheben zu müssen glaubte, wurde durch *Poisson*<sup>31)</sup> entkräftet.

Zwischen zwei parallelen vertikalen Platten ist zufolge (14) die mittlere Steighöhe halb so gross als in einer Kapillarröhre von einem

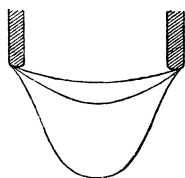


Fig. 8.

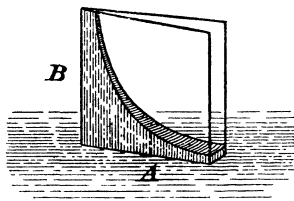


Fig. 9.

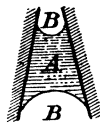


Fig. 10.

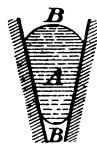


Fig. 11.

Durchmesser gleich dem Abstand der Platten. Stehen die zwei vertikalen Platten mit geringer Keilöffnung gegeneinander, so steigt

29) Die Proportionalität der Steighöhe in einer Kapillarröhre mit dem Reziproken des Durchmessers scheint zuerst von *Borelli* (*De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, Reggio 1670) ausgeführt zu sein; der Satz wird von manchen Autoren *Jurin* (*Phil. Trans.* 30 (1718)) zugeschrieben.

30) *Mathieu*, *Capillarité*, Paris 1883, p. 49.

31) *Poisson*, *Nouv. théor. de l'act. capill.*, p. 141.

die Flüssigkeit an ihnen zu einer gleichseitigen Hyperbel empor (Fig. 9). In einer konischen Röhre kann unter Umständen ein Tropfen im Gleichgewicht sein bei spitzem Randwinkel, wenn die Röhre sich nach oben verjüngt (Fig. 10), oder bei stumpfem Randwinkel, wenn sie sich nach unten verjüngt (Fig. 11).

**8. Kapillarauftrieb. Adhäsion.** Der Körper  $C$  sei nur mit den Flüssigkeiten  $A$  und  $B$  in Berührung. Um den von  $C$  zur Erhaltung des Gleichgewichts gegen  $A$  und  $B$  zu leistenden Gegendruck in der Komponente  $-P_w$  nach einer beliebigen Richtung  $w$  zu ermitteln, lassen wir  $C$  in dieser Richtung parallel mit sich verschiebbar sein. Wir nehmen sodann eine von einem Parameter  $w$  abhängende Schar von Verrückungen des Systems vor, wobei  $C$  in jener Richtung um die Längen  $w$  fortschreitet, die Partien  $F_{AC}$ ,  $F_{BC}$ , also auch ihre gemeinsame Randlinie unverändert mitgehen, alle Grenzflächen in denen  $A$  und  $B$  an andere Medien als  $C$  anstossen, festbleiben, endlich  $F_{AB}$  noch sich derart deformiert, dass die Volumina  $V_A$  und  $V_B$  ungeändert bleiben. Wir können alsdann für die gesamte ins Spiel kommende Energie  $E$ , einschliesslich des Terms  $wP_w$  für den Gegendruck  $-P_w$ , die Relation  $\frac{dE}{dw} = 0$  ansetzen. Nun sind die Flächeninhalte von  $F_{AC}$ ,  $F_{BC}$  unverändert, längs  $F_{AB}$  besteht die Differentialgleichung (6), zur Vereinfachung legen wir  $z = 0$  in die Niveaubene von  $A$ ,  $B$ , haben also  $\lambda_{AB} = 0$ . Im Hinblick auf (3) und (5) erhalten wir daher:

$$(15) \quad P_w - \int_{F_{AC}} g(\varrho_A - \varrho_C) z \cos(wn) df - \int_{F_{BC}} g(\varrho_B - \varrho_C) z \cos(wn) df \\ - T_{AB} \int \cos(wj_{AB}) ds = 0,$$

wo sich das erste Integral auf  $F_{AC}$ , das zweite auf  $F_{BC}$ , das dritte auf ihren gemeinsamen Rand bezieht und  $n$  die äussere Normale von  $C$  bezeichnet.

Der auf  $C$  ausgeübte vertikale Auftrieb berechnet sich hieraus, indem wir für  $w$  die  $z$ -Richtung nehmen. Hat die Trennungsfläche  $F_{AB}$  keine Begrenzung ausser ihrer Randlinie auf  $C$ , d. h. verläuft sie im Übrigen asymptotisch an die Niveaubene, so zeigt die bei (14) vorgenommene Transformation, dass der letzte Term in (15) alsdann  $= g(\varrho_A - \varrho_B) V_{AB}$  wird, unter  $V_{AB}$  das unterhalb  $F_{AB}$  bis zur Niveaubene reichende Volumen verstanden (soweit  $F_{AB}$  unterhalb der Niveaubene verläuft, ist das dazwischenliegende Volumen in  $V_{AB}$  negativ einzurechnen). Von diesem Volumen entfällt der Anteil  $V$  auf das Medium  $A$  (Fig. 12, daselbst steht  $\mathfrak{F}_{AB}$  anstatt  $F_{AB}$ ). Andererseits werde  $C$  durch Fortführung der Niveaubene in einen

unteren Teil vom Volumen  $V_C^{(A)}$  und einen oberen Teil vom Volumen  $V_C^{(B)}$  zerlegt, so werden der zweite und dritte Term in (16) bez.

$$-g(\varrho_A - \varrho_C)(V_C^{(A)} + V_{AB} - V), \quad -g(\varrho_B - \varrho_C)(V_C^{(B)} - V_{AB} + V)$$

und folgt demnach

$$(16) \quad P_z = g(\varrho_A - \varrho_C)V_C^{(A)} + g(\varrho_B - \varrho_C)V_C^{(B)} - g(\varrho_A - \varrho_B)V.$$

Die ersten zwei Terme bilden den hydrostatischen Auftrieb, falls die Trennungsfäche in die Niveaubene fiele, der dritte Term, der *kapillare Auftrieb* (bezw. negative Abtrieb) ist entgegengesetzt gleich dem infolge der Kapillarität über die Niveaubene gehobenen Flüssigkeitsgewicht. Hiernach kann bei *stumpfen* Randwinkel  $\omega_A$  unter Umständen ein Körper auf einer Flüssigkeit von geringerem spezifischen Gewicht schwimmen.

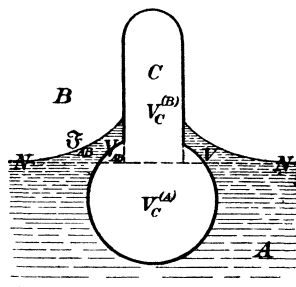


Fig. 12.

Wird eine kreisförmige Scheibe  $C$  auf eine weite horizontale Oberfläche von  $A$  in  $B$  gelegt (Fig. 5) und mit horizontal bleibender Basis, die stets ganz mit  $A$  in Berührung sei, kontinuierlich senkrecht gehoben, so entspricht die am Rande der Scheibe ansetzende freie Rotationsfläche wieder der Gleichung (11); die Meridiankurve verläuft asymptotisch an die Niveaubene, während der Randwinkel  $\varphi$  von  $A$  gegen die horizontale Basis der Scheibe kontinuierlich abnehmend zufolge der ersten Ungleichung (9) nur bis zu dem durch (8) bestimmten Werte  $\omega_A$  heruntergehen kann, wobei dann die Flüssigkeit abreisst. Bei grossem Flächeninhalt  $S$  der Scheibe ergibt sich die maximale Höhe  $z_0$  des Anhebens angenähert aus (13) für  $c = 1$ ,  $\varphi = \omega_A$  und zwar als unabhängig von  $S$  und folgt das dabei über die Niveaubene gehobene maximale Flüssigkeitsgewicht + dem Gewicht der Scheibe aus (16), indem dort  $V_C^{(A)} = -z_0 S$  substituiert und  $V = V_{AB}$  aus (14) mittelst  $(j_{AB}z) = \frac{\pi}{2} + \omega_A$  berechnet wird.

Bei der Adhäsion zweier sehr nahe befindlicher gleicher horizontaler Platten, sie mögen etwa wieder kreisförmig vom Flächeninhalte  $S$  sein, vermöge einer zwischen ihnen befindlichen dünnen und sie *benetzenden* Flüssigkeitsschicht  $A$  vom Volumen  $V_A$  ist für die angenähert durch (12) bestimmte Meridiankurve die Höhe  $z$ , die wir von der oberen Fläche der Schicht rechnen, und damit auch  $d\varphi/ds$  wenig veränderlich und daher die Kurve angenähert ein Halbkreis vom Durchmesser  $V_A/S$  (Fig. 13). Nach (12) befindet sich dann die Niveau-

ebene in einer Höhe  $z = -z_0$ , die umgekehrt proportional diesem Werte ist. Aus (15) entsteht wieder genau die Relation (16), wobei  $V_C^{(A)} = -S z_0$ ,  $V = 0$  einzusetzen ist, und folgt daraus der auf die obere Platte mitsamt ihrem Gewicht ausgeübte Zug nach unten, und zwar als proportional mit  $S^2/V_A$ . Bei kleinem  $V_A$  kann daher eine äusserst grosse Kraft zur Trennung der Platten nötig sein.

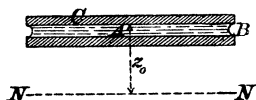


Fig. 13.

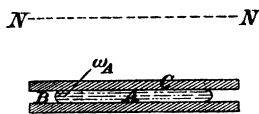


Fig. 14.

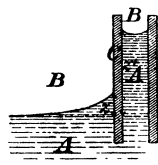


Fig. 15.

Sind dagegen die *Randwinkel* an den Platten *stumpf*, so liegt die Niveauebene über der Schicht, es richtet sich die Grösse der von  $A$  bedeckten Fläche der Platten nach dem Werte von  $V_A$ , und es ist ein entsprechender Druck auf die Platten nötig, um ihre Distanz zu verringern (Fig. 14).

Stellt  $C$  eine auf beiden Seiten gleich beschaffene vertikale, der  $yz$ -Ebene parallele Platte von einer sehr grossen Breite  $L$  vor, die in  $A$  und  $B$  eintaucht, wobei aber der Stand der Trennungsflächen  $F_{AB}$  beiderseits an  $C$  verschieden hoch sein kann (Fig. 15), so berechnet sich aus (15) die Summe der zwei Drucke  $P_x^-$  und  $P_x^+$  in Richtung der  $x$ -Axe, welche die Platte links und rechts, auf der Seite der kleineren bzw. der grösseren  $x$  erfährt; die zwei Randintegrale heben sich auf, die Flächenintegrale bleiben nur für den einerseits von  $A$ , andererseits von  $B$  bedeckten Teil der Platte übrig. Steht  $A$  links bis zur Höhe  $z^-$ , rechts bis zur Höhe  $z^+$  an der Platte, so resultiert als Gesamtdruck

$$P_x = g(\varrho_A - \varrho_B) \frac{(z^+)^2 - (z^-)^2}{2} L = T_{AB}(c^+ - c^-) L,$$

wenn für die Form der Fläche  $F_{AB}$  nach (13) links die Integrationskonstante  $c^-$ , rechts  $c^+$  in Betracht kommt.

Tauchen jetzt zwei Platten  $C^-$  und  $C^+$  von gleicher Breite  $L$  parallel zur  $yz$ -Ebene und sehr nahe zueinander ein und kommt für den Meniskus in der  $xz$ -Ebene zwischen ihnen die Integrationskonstante  $c$  in Betracht, während jenseits von ihnen die Flächen  $F_{AB}$  asymptotisch an die Niveauebene verlaufen mögen, also hier die betreffende Konstante den Wert 1 hat, so werden die Platten mit einer Kraft  $T_{AB}(c - 1)L$  gegeneinander getrieben. Bildet nun  $A$  an beiden Platten spitze oder an beiden Platten stumpfe Winkel, so zeigt der

Meniskus in der  $xz$ -Ebene zwischen den Platten notwendig eine Stelle mit horizontaler Tangente und ist daher nach (13):  $c > 1$ , es findet also eine scheinbare Anziehung der Platten statt und zwar, da  $c - 1$  nach (13) dem Quadrat der Steighöhe an jener Stelle proportional ist, angenähert umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes der Platten. Bildet  $A$  an einer Platte spitze, an der anderen stumpfe Winkel, so entspricht einer gewissen Distanz der Platten ein labiles Gleichgewicht, das bei Annäherung der Platten (durch stärkere Krümmung des Meniskus) zu einer Anziehung, bei Entfernung zu einer Abstossung führt<sup>32)</sup>.

**9. Ausschaltung der Schwerkraft.** Die Wirkung der Schwere auf die Gestalt der Trennungsfläche von  $A$  gegen  $B$  erscheint nach (6) ausgeschaltet, wenn  $\varrho_A = \varrho_B$  ist, die beiden Flüssigkeiten also gleiche Dichte haben. Dieser Umstand, an den schon *Segner*<sup>18)</sup> gedacht hat, wurde von *Plateau*<sup>33)</sup> vielfältig benutzt, um reine Kapillarkwirkungen zu studieren.

Ein Öltropfen, in eine gleich schwere Mischung von Wasser und Alkohol gebracht, nimmt nach (6) im Gleichgewicht die Figur einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung an. Schwebt der Tropfen vollkommen frei, so zeigt er daher notwendig Kugelgestalt, denn die Kugel ist die einzige geschlossene singularitätenfreie Fläche von konstanter mittlerer Krümmung<sup>34)</sup>. Ist die Oberfläche des Tropfens nicht allseitig geschlossen, sondern lehnt sie sich teilweise an eingetauchte Rotationskörper an, so mag sie sich als eine Rotationsfläche um die bezügliche Axe bilden. Sind nun auf einer beliebigen Normale der Meridiankurve dieser Fläche nacheinander (Fig. 16)  $P$  der Punkt der Kurve,  $M$  das Krümmungszentrum,  $N$  der Treffpunkt mit der Axe, also  $PM$ ,  $PN$  die zwei Hauptkrümmungsradien der Rotationsfläche und ist endlich  $Q$  derart gelegen, dass  $PNQM$  vier harmonische Punkte sind, also

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{2}{PQ}$$

ist, so muss nach (6) oder (11) die Länge  $PQ$  konstant ausfallen;

32) *Laplace*, Suppl. à la théor. de l'act. capill. (De l'attraction et de la répulsion apparente des petits corps qui nagent à la surface des fluides). — *Poisson*, Nouv. théor. de l'act. capill., chap. VI. — Allgemeinere Theoreme über Anziehung und Abstossung schwimmender Körper entwickelt *W. Voigt*, Compendium der theor. Phys. 1, Leipzig 1895, p. 239.

33) *Plateau*, Mém. de l'Acad. de Belgique, 1843 bis 1868; Statique expérimentale et théorique des liquides (Gand 1873).

34) Vgl. *Liebmann*, Math. Ann. 53, p. 81.

das Spiegelbild  $Q^*$  von  $Q$  an der Axe liefert daher eine konstante Summe  $PN + NQ^* = PQ$ , während  $PN$  und  $NQ^*$  entgegengesetzt gleiche Neigung gegen die Axe zeigen. Lassen wir nun  $P$  die Meridiankurve beschreiben und konstruieren fortwährend in der dargelegten Weise  $N$ ,  $Q$ ,  $Q^*$ , so wird, weil  $PQ$  konstant ist,  $Q$  eine Parallelkurve zur Meridiankurve beschreiben, daher die Bewegung von  $Q$  stets normal zu  $NP$  und also die spiegelbildlich dazu an der Axe ver-

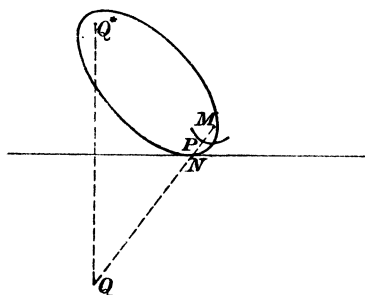


Fig. 16.

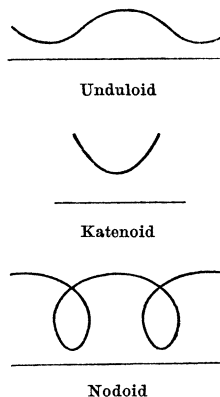


Fig. 17.

laufende Bewegung von  $Q^*$  stets normal auf  $NQ^*$  sein. Daraus ist ersichtlich, dass die Meridiankurve unserer Rotationsfläche durch den Brennpunkt  $P$  eines bestimmten Kegelschnittes erzeugt wird, den man ohne Gleiten auf der Rotationsaxe abrollen lässt, dessen anderer Brennpunkt  $Q^*$  und dessen doppelte große Axe  $PQ$  ist<sup>35)</sup>.

Wird der Tropfen durch zwei mit den Zentren vertikal übereinander liegende horizontale Scheiben oder Ringe gestützt, so können durch Abänderung der Distanz dieser Stützen sowie der zwischen ihnen befindlichen Ölmasse die verschiedenen Formen dieser Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung erzielt werden, das *Unduloid* in den Grenzen Kugel — Zylinder — Katenoid, das *Nodoid* in den Grenzen Katenoid — Kugel, welche bzw. einer rollenden Ellipse oder Hyperbel und den Grenzflächen Strecke, Kreis, Parabel entsprechen (Fig. 17). Dabei werden ausserhalb an den Ringen sich jedesmal noch Kugelkalotten von der nämlichen mittleren Krümmung wie der dazwischen befindliche Tropfen ansetzen. Das Katenoid ist hier eine

35) Ch. Delaunay, J. de math. (1) 6 (1841), p. 309. — Die Litteratur über die Flächen mittlerer Krümmung bis 1869 bespricht ausführlich Plateau (Statique des liquides 1, p. 131).



stabile Gleichgewichtsfigur, nämlich wirklich eine Fläche von kleinstem Flächeninhalt bei gegebener Grösse des zwischen den zwei Basiskreisflächen gehaltenen Volumens, nur so lange die Tangenten in den zwei Endpunkten der sie erzeugenden Meridiankurve ihren Schnittpunkt vor der Rotationsaxe finden<sup>36)</sup>, und die Zylinderfläche ist in demselben Sinne stabil, nur so lange die Höhe des Zylinders nicht den Umfang des Querschnittes erreicht<sup>37)</sup>.

Wird der freischwebende und eine Kugelgestalt bildende Öltropfen mit Hülfe einer in das Öl eingetauchten Scheibe in gleichförmige Rotation um eine Axe — etwa die  $z$ -Axe — gesetzt, so entsprechen wachsenden Werten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Rotation verschiedene Gestalten des Tropfens; er erscheint zuerst ellipsoidisch, vertieft sich oben und unten, endlich löst sich am Äquator ein Ring ab, der an der Rotation teilnimmt<sup>38)</sup>. Denkt man sich, was freilich dem Versuche nur unzureichend entspricht, es rotiere nur der Tropfen  $A$ , nicht die umgebende Flüssigkeit  $B$ , und behandelt die Bewegung von mitrotierenden Koordinatenaxen aus unter Einführung des Potentials der Zentrifugalkräfte —  $\frac{\omega^2}{2} \varrho_A \int_A r^2 dv$ , so erhält man (mit Bezeichnungen wie in (11)) als Gleichung für die Meridiankurve des rotierenden Tropfens:

$$T_{AB} \frac{d(r \sin \varphi)}{r dr} = \lambda_{AB} - \frac{\omega^2}{2} \varrho_A r^2 \quad \left( \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Hieraus bestimmt sich  $z$  als hyperelliptisches Integral in  $r$  vom Geschlecht 2 und kommt man je nach den Werten von  $\omega$  auf sphäroidische oder ringförmige Flächen<sup>39)</sup>. — Einen Vergleich der hier auftretenden Figuren mit den Gestalten gravitierender in stationärer Rotation befindlicher Flüssigkeitsmassen könnte man allenfalls zu Stande bringen, indem man von Fernkräften mit dem Ausdrücke  $-k \frac{e^{-cr}}{r}$  ( $c \geq 0$ ) als Potential für zwei Masseneinheiten in der Distanz  $r$  ausgeht, woraus einerseits Gravitation, andererseits Oberflächenspannung als die zwei Grenzfälle  $c = 0$  und  $c = \infty$  folgen.

**10. Flüssigkeitshäute.** Unter Umständen kann eine Flüssigkeit  $A$  in einem Medium  $B$  längere Zeit hindurch als eine dünne Haut mit zwei einander sehr nahen Trennungsflächen gegen  $B$  bestehen. Die

36) *L. Lindelöf* in *Moigno-Lindelöf*, Calcul des variations, Paris 1861, p. 209, 231. — *Poincaré*, Capillarité, p. 66.

37) *Plateau*, Statique des liquides 2, chap. IX. — *Poincaré*, Capillarité, p. 95.

38) *Plateau*, Mém. de l'acad. de Bruxelles 16 (1843).

39) *Beer*, Einl. in die math. Theorie der Elastizität u. Capillarität, Leipzig 1869.

Dauerhaftigkeit solcher Flüssigkeitshäute beruht nach *Plateau*<sup>40)</sup> auf einer vornehmlich nach den Grenzschichten hin hervortretenden gallertartigen Beschaffenheit (Oberflächenviskosität). Diese wieder erklärt sich durch eine andere Verteilung der stofflichen Bestandteile in den Oberflächenschichten als im Inneren der Haut, wodurch jene Schichten eher die Eigenschaften eines festen Körpers als einer Flüssigkeit haben<sup>41)</sup>. In Häuten von sehr geringer Dicke wird dann ein Fließen des Inneren zwischen den Oberflächenschichten ausserordentlich durch die innere Reibung der Flüssigkeit verzögert<sup>42)</sup> und dadurch eine Variation des gegenseitigen Abstandes der zwei Trennungsflächen sehr erschwert. Sind  $F_{AB}^-$ ,  $F_{AB}^+$  die Flächeninhalte der zwei Seiten der Haut, so ist alsdann zum Gleichgewicht der Haut das Minimum der potentiellen Energie

$$T_{AB}(F_{AB}^- + F_{AB}^+) + g(\varrho_A - \varrho_B) \int_A z dv + g\varrho_B \int_{A+B} z dv$$

ganz allein in Bezug auf solche virtuelle Verrückungen von  $A$  zu fordern, wobei die normalen Abstände der zwei Trennungsflächen un geändert bleiben; denn andere Verrückungen sind als unausführbar anzusehen. Diese Forderung kommt nun, wenn noch die Dicke der Haut als verschwindend zu betrachten ist, im Hinblick auf (3), (4), (5) einfach darauf hinaus, dass für die Haut  $2T_{AB}F_{AB}$  oder also  $F_{AB}$ , darunter die ganze Ausdehnung der Haut verstanden, ein Minimum sein soll. Wird z. B. ein Rahmen, irgendwie aufgebaut aus festen Drähten, beweglichen Fäden, als Stütze dienenden festen Oberflächen, in eine Seifenlösung getaucht, so spannt sich hiernach innerhalb der vorgeschriebenen festen und veränderlichen Grenzen die Seifenlösung in der Form einer *Minimalfläche* (Art. von *Lilienthal*, III D 5, p. 307) aus, und man trifft hier einen der seltenen Fälle an, dass ein rein mathematisches Gebiet aus einer verhältnismässig leichten Experimentierkunst die vielseitigste Anregung zu schöpfen vermocht hat.

Als Differentialgleichung für die Form der Haut erhält man

$$(17) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,$$

während für ihren Rand, soweit er nicht fest vorgeschrieben ist, die Bedingung resultiert, auf die dazu dargebotenen Flächen senkrecht

40) *Plateau*, Statique des liquides 2, chap. VII.

41) *Marangoni*, Nuovo Cimento (2) 5, 6 (1871/72); (3) 3 (1878). — Lord *Rayleigh*, Proc. Roy. Soc. 48 (1890), p. 127 (Sc. papers 3, p. 363).

42) Vgl. die bezüglichen Rechnungen bei *Gibbs*, Equilibrium of heterogeneous substances, p. 475.

aufzutreffen. Dabei können sich infolge der vorgeschriebenen Grenzbedingungen Kreuzungsstellen der Haut in ihrem Verlaufe als notwendig erweisen; in stabilem Gleichgewicht können aber niemals mehr als drei Lamellen längs einer Kurve und zwar dann immer nur unter gleichen Flächenwinkeln, also von  $120^\circ$ , zusammentreffen und höchstens vier, und zwar mit gleichen Raumwinkeln um einen Punkt herum ansetzen<sup>43)</sup>. So bildet sich z. B. in dem Kantengerüst eines regulären Tetraeders eine Seifenhaut, bestehend aus sechs ebenen Lamellen, den sechs Dreiecken vom Schwerpunkt des Tetraeders aus nach den einzelnen Kanten, dagegen entsteht innerhalb des Kantengerüsts eines Würfels jedesmal eine Fläche, die nicht alle Symmetrien des Würfels übernimmt, sondern ein beliebiges Paar seiner Seitenflächen begünstigt (Fig. 18)<sup>44)</sup>.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der Minimalflächen, dass ihre Abbildung durch parallele Normalen auf eine Kugelfläche eine konforme mit Umlegung der Winkel ist. Soll nun die Begrenzung der Minimalfläche ein gegebener geschlossener Streckenzug sein oder allgemeiner, soll sie stückweise in vorgeschriebenen Geraden oder Ebenen verlaufen, so müssen die Geraden Asymptotenkurven auf der Fläche werden und die Ebenen Krümmungskurven aus ihr heraus schneiden, und jene sphärische Abbildung wird ein Kreisbogenpolygon von bekanntem Umriss. Die analytische Bestimmung der fraglichen Minimalfläche erfordert die konforme Abbildung dieses Polygons auf eine Halbebene, diese Abbildungsaufgabe hängt von einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Funktionen als Koeffizienten ab, und schliesslich soll man eine endliche Anzahl von Parametern, die in diese Gleichung eingehen, den Längen und Winkeln des gegebenen Rahmens entsprechend einrichten, worin transzendente Relationen liegen, deren Theorie erst in Spezialfällen zu befriedigendem Abschluss gebracht werden konnte<sup>45)</sup>.

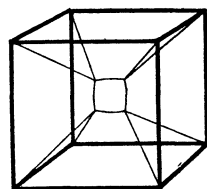


Fig. 18.

*Plateau*<sup>33)</sup> und in der Folge *H. A. Schwarz*<sup>45)</sup> haben eine Menge verschiedenartiger Minimalflächen (z. B. das Katenoid innerhalb zweier senkrecht übereinander gehaltenen Kreisinge, eine Schraubenfläche innerhalb eines Glaszylinders zwischen zwei Erzeugenden) durch

43) *Lamarle*, Mém. de l'acad. de Belg. 35, 36. — *Plateau*, Statique des liquides 1, chap. V.

44) *Plateau*, l. c. p. 318.

45) Vgl. *H. A. Schwarz*, Gesammelte math. Abh. 1, Berlin 1890.

Seifenlamellen realisiert und zugleich die Grenzen ihres extremalen Charakters sowie die Umlagerungen bei eintretender Instabilität theoretisch wie experimentell festgestellt. — Innerhalb eines Drahtes, der in den sechs Kanten eines geraden, regelmässigen, sechsseitigen Prismas und den sie abwechselnd in der einen und der anderen Grundfläche verbindenden Seiten ausgespannt ist, bildet sich, falls die Prismenkanten im Verhältnis zu den Basisseiten hinreichend lang sind, eine Lamelle aus, die auf der Mittellinie des Prismas einer der zwei Grundflächen wesentlich näher liegt und die durch ein leichtes Schütteln in das Gegenbild in Bezug auf die andere Grundfläche überspringt; diese auffallende Erscheinung soll aber ganz allein auf die stets vorhandenen geringen Unvollkommenheiten der Modelle zu schieben sein.

Für die Stabilität einer Flüssigkeitshaut in einem festen Rahmen ist die Bedingung die, dass keine unendlich nahe Minimalfläche durch irgend ein auf der Fläche liegendes geschlossenes Kurvensystem möglich ist<sup>46)</sup>. Für den Fall beweglicher Grenzen geben die allgemeinen Kriterien von *Hilbert*<sup>47)</sup> bezüglich des Vorhandenseins eines Extremums Aufschluss über die Stabilität.

Indem man geeignet verfährt, kann man innerhalb eines festen Rahmens auch Seifenlamellen einspannen, in denen vollständig geschlossene Flächen (Blasen) auftreten. (Zum Beispiel kann man innerhalb des Kantengerüsts eines Würfels eine Seifenhaut herstellen, welche aus einer innen schwebenden geschlossenen nach aussen gekrümmten Fläche mit den Symmetrien des Würfels und zwölf, deren Schneiden mit den entsprechenden Würfelkanten verbindenden trapezartigen, ebenen Lamellen besteht (Fig. 19)<sup>48)</sup>.) Dabei enthält jede geschlossene Blase  $B^{(i)}$  ein ganz bestimmtes Luft-

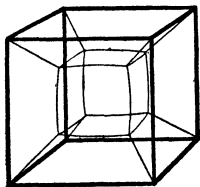


Fig. 19.

quantum bei irgend einem Volumen  $V^{(i)}$  und irgend einem Druck  $p^{(i)}$ , und ist demgemäss zur potentiellen Energie des gesamten Systems jedesmal noch der entsprechende Term  $-p^{(i)}V^{(i)}$  hinzuzufügen. Dadurch folgt dann für eine Seitenfläche der Blase, auf welche auf der anderen Seite ein Druck  $p^{(h)}$  herrscht, in Anbetracht der zwei Trennungsflächen der Lamellen anstatt (17) allgemeiner und im Einklang mit (10):

$$p^{(i)} - p^{(h)} = 2 T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

46) H. A. Schwarz, Acta soc. scient. Fennicae 15 (1885), p. 315 (Ges. math. Abh. 1, p. 223).

47) Hilbert, Gött. Nachr. 1905, p. 159.

48) Plateau, l. c. p. 361.

wo die Krümmungsradien positiv bei nach aussen konvexer Krümmung zu rechnen sind; zur Festlegung der  $p^{(i)}$  dienen der Wert des äusseren Druckes sowie die Beträge der einzelnen eingeschlossenen Luftquanta. Die Randbedingungen beim Zusammentreffen dreier Flächen sind dieselben wie im früheren Falle nicht geschlossener Lamellen. So lassen sich z. B. mit Hülfe zweier fester Ringe wieder alle Formen des Unduloids und Nodoids, geschlossen durch angesetzte Kugelkalotten, erzielen. Eine einzelne freie Seifenblase hat notwendig Kugelgestalt und ist der Überdruck innen umgekehrt proportional ihrem Radius und der Proportionalitätsfaktor das Vierfache der Oberflächenspannung.

**11. Stabilität einer Trennungsfläche.** Für das stabile Gleichgewicht einer Trennungsfläche  $F_{AB}$ , die bereits der früher erörterten Bedingung  $\frac{dE}{dw} = 0$  ( $w = 0$ ) in jeder von einem Parameter  $w$  abhängenden und durch sie hindurch führenden Schar von virtuellen Verrückungen entspricht, ist weiter der definit-positive Charakter der zweiten Ableitung der potentiellen Energie nach dem Variationsparameter  $w$ , d. i. die Ungleichung:

$$(18) \quad \frac{d^2 E}{dw^2} > 0 \quad \text{für } w = 0$$

erforderlich. Nehmen wir an, der Rand von  $F_{AB}$  sei festzuhalten, so dass das Kurvenintegral in (3) fortfällt, so folgt durch Differentiation nach  $w$  aus (3), (4), (5) im Hinblick auf (6):

$$\frac{d^2 E}{dw^2} = \int_{F_{AB}} N \left\{ T_{AB} \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + g(\varrho_A - \varrho_B) \frac{\partial z}{\partial w} \right\} df.$$

Hiervon sei eine spezielle Anwendung gemacht. Die Trennungsfläche falle in die Niveauebene  $z = 0$ . Die Flüssigkeit  $B$  befinde sich oberhalb  $A$  in einem nach unten offenen Gefässe, sei aber schwerer als  $A$ , also  $\varrho_B > \varrho_A$  (Fig. 20). Hier ist für die variierten Flächen



Fig. 20.

$$z \equiv Nw \pmod{w^2}, \quad \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \equiv -\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \pmod{w},$$

(wobei durch das Zeichen  $\equiv$  und den Zusatz  $\pmod{w^2}$  bzw.  $\pmod{w}$  eine Gleichheit bis auf Glieder von der Ordnung  $w^2$  bez.  $w$  angedeutet werden soll), und kommt die Bedingung (18) auf

$$(19) \quad \int_{F_{AB}} N \left\{ -T_{AB} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - g(\varrho_B - \varrho_A) N \right\} df > 0$$

hinaus, während die Konstanz des Volumens  $V_A$  die Gleichung

$$(20) \quad \int_{F_{AB}} N df = 0$$

erfordert und ferner  $N$  am Rande von  $F_{AB}$  durchweg Null sein soll.

In einer mehr elementaren Ausführung sagt *Maxwell*<sup>49)</sup>, der Integrand in (19) müsse durchweg  $\geq 0$  sein, was überhaupt niemals für den ganzen Umfang der hier zuzulassenden Funktionen  $N$  zu erzielen wäre.

Ist die Öffnung des Gefässes ein Kreis vom Radius  $R$  um den Nullpunkt, so trägt man der Bedingung des Verschwindens von  $N(x, y)$  am Rande in allgemeinsten Weise Rechnung durch den Ansatz:

$$N(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\lambda_{mk} r}{R}\right) (a_{mk} \cos m\varphi + b_{mk} \sin m\varphi),$$

worin  $J_m(\lambda)$  die *Bessel'sche* Funktion erster Art von der Ordnung  $m$  und  $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \dots$  ihre der Grösse nach geordneten positiven Nullstellen bedeuten<sup>50)</sup>. Aus (19) entsteht dann

$$\frac{\pi}{2} R^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{m^2 \lambda_{mk}^2}{R^2} T_{AB} - g(\varrho_B - \varrho_A) \right) (J_{m+1}(\lambda_{mk}))^2 (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) > 0,$$

während aus (20) die Gleichung:

$$2\pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_{0k})}{\lambda_{0k}} a_{0k} = 0$$

wird. Nach der Grössenfolge der  $\lambda_{mk}$  kommt die Forderung hier in der Tat auf das von *Maxwell* angegebene Kriterium für Stabilität hinaus, dass

$$R < \lambda_{11} \sqrt{\frac{T_{AB}}{g(\varrho_B - \varrho_A)}}$$

sein soll. Benutzt  $B$  die Gefässwand, so kann die obere Grenze hier  $\frac{\lambda_{11}}{\sqrt{2}} \sqrt{h_m}$  geschrieben werden, wenn  $h_m$  die mittlere Steighöhe in einer Kapillarröhre vom Radius 1 ist (vgl. Nr. 7)<sup>51)</sup>; die Konstante  $\lambda_{11}/\sqrt{2}$  hat den Wert 2,709...

Ist die Öffnung des Gefässes ein Rechteck mit den Seiten  $a, b$  und  $a \geq b$ , so wird für die Stabilität des Gleichgewichtes

49) *J. C. Maxwell*, Scientific papers 2, p. 585.

50) Vgl. Die part. Differentialgl. d. math. Physik, nach *Riemann's* Vorl. neu bearbeitet von *H. Weber*, 2, p. 262; 1, p. 164.

51) Beobachtungen von *Duprez* (Mém. de l'Acad. de Belgique 26 (1851), 28 (1854)) sind in Übereinstimmung mit diesem theoretischen Ergebnisse.

$$t^2 \left( \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) T_{AB} - g(q_B - q_A) > 0$$

erfordert, woraus zugleich für  $a = \infty$  die entsprechende Bedingung in Bezug auf einen langen Spalt ersichtlich ist.

**12. Kapillarschwingungen.** Im Gleichgewichtszustand befinde sich  $A$  ganz unterhalb,  $B$  ganz oberhalb der Niveaubene  $z = 0$ , und ihre *unbegrenzt* gedachte Trennungsfläche führe nunmehr unter Einfluss der Oberflächenspannung und der Schwere flache Schwingungen

$$z \equiv \varepsilon f(x, y, t) \pmod{\varepsilon^2}$$

aus, worin  $\varepsilon$  einen Parameter in gewisser Umgebung von 0 bedeutet. In  $A$  wie in  $B$  mögen Geschwindigkeitspotentiale  $\equiv \varepsilon \varphi_A$  bez.  $\equiv \varepsilon \varphi_B \pmod{\varepsilon^2}$  gelten, welche der *Laplace'schen* Differentialgleichung genügen und deren *negativ* genommene Differentialquotienten nach den Koordinaten die bezüglichlichen Geschwindigkeitskomponenten darstellen. An der Trennungsfläche haben wir einerseits für  $A$ , andererseits für  $B$  erstens die kinematische Forderung einer zur Fläche tangentialen Relativgeschwindigkeit, zweitens für den dort geltenden Druck  $\equiv p_0 + \varepsilon p_A$  bez.  $\equiv p_0 + \varepsilon p_B \pmod{\varepsilon^2}$  das Integral der lebendigen Kraft und bestimmt sich drittens die Druckdifferenz  $\equiv \varepsilon(p_A - p_B) \pmod{\varepsilon^2}$  als Kapillardruck gemäss (10). Für  $\lim \varepsilon = 0$ , d. h. für unendlich flache Wellen werden diese Beziehungen:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_A}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_B}{\partial z}, \quad \frac{p_A}{\varrho_A} = \frac{\partial \varphi_A}{\partial t} - gf, \quad \frac{p_B}{\varrho_B} = \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} - gf, \quad (z = 0),$$

$$p_A - p_B = -T_{AB} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

Soll noch  $A$  für  $\lim z = -\infty$ ,  $B$  für  $\lim z = +\infty$  ruhen, so wird allen hier genannten Bedingungen in einer Weise, die zur additiven Konstruktion ihrer allgemeinen Auflösung hinreicht, durch den partikulären Ansatz:

$$f = \Re(e^{-i\sigma t} F(x, y)), \quad \varphi_A = \Re\left(-\frac{i\sigma}{k} e^{kz-i\sigma t} F\right), \quad \varphi_B = \Re\left(\frac{i\sigma}{k} e^{-kz-i\sigma t} F\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0$$

genügt, worin  $\sigma$ ,  $k$  reelle positive Konstanten sind,  $\Re$  das Zeichen für den reellen Teil der dahinter aufgeführten Grösse ist und wo dann noch aus den letzten Relationen die Beziehung:

$$(21) \quad \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 = \frac{\varrho_A - \varrho_B}{\varrho_A + \varrho_B} \frac{g}{k} + \frac{T_{AB}}{\varrho_A + \varrho_B} k$$

zwischen  $k$  und  $\sigma$  folgt.

Wellen, die von  $y$  nicht abhängen, folgen bei dem Ansatz  $F = Ce^{ik(x-x_0)}$  und damit ist  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  die Länge horizontal-zylindrischer, in einer Richtung fortschreitender oder auch stehender Wellen von der Schwingungszahl  $\frac{\sigma}{2\pi}$ . Diese Beziehung (21) haben Lord Kelvin<sup>52)</sup>, ferner Kolaček<sup>53)</sup> gegeben; sie findet Anwendung auf die Fortpflanzung von Wellen einer unbegrenzten Wasseroberfläche unter der gemeinsamen Wirkung von Schwerkraft und Kapillarität ohne Wind, ferner auf solche erzwungene stehende Kapillarschwingungen, bei denen die Knotenlinien als parallele Geraden gelten können<sup>54)</sup>.

Der Gleichung (21) zufolge hat,  $\varrho_A > \varrho_B$  vorausgesetzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c = \frac{\sigma}{k}$  ein Minimum  $c_m$  bei einer gewissen Wellenlänge  $\lambda_m$ , mit welchen Größen dann (21) sich

$$(21a) \quad \frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)$$

schreibt. (In Fig. 21 ist die hierdurch bestimmte Kurve in  $\lambda$  und  $c$  nebst den Kurven  $c^2/c_m^2 = \frac{1}{2} \lambda/\lambda_m$  und  $c^2/c_m^2 = \frac{1}{2} \lambda_m/\lambda$  dargestellt, um die Wirkungen von Schwerkraft und Kapillarität zu vergleichen.) Mit einem jeden Werte  $c > c_m$  vertragen sich alsdann zweierlei Wellenlängen, eine kürzere  $\lambda_1 < \lambda_m$  und eine längere  $\lambda_2 > \lambda_m$ , wobei die Quotienten  $\frac{\lambda_1}{\lambda_m}$  und  $\frac{\lambda_2}{\lambda_m}$  reziprok sind. Die Wellen mit  $\lambda < \lambda_m$ , bei denen in (21) der Term mit  $T_{AB}$  gegenüber demjenigen mit  $g$  überwiegt, bezeichnet Lord Kelvin als „ripples“. Für Wasserwellen in Luft ist etwa  $\lambda_m = 1,75$  cm,  $c_m = 23,2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ .

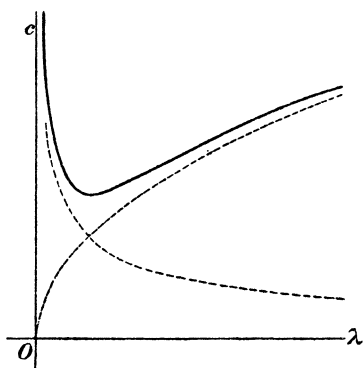


Fig. 21.

Lord Kelvin erörterte ferner den Einfluss des Windes auf die Geschwindigkeit von Wasserwellen. Hierbei wird die Annahme gemacht, dass die obere Flüssigkeit  $B$  für  $\lim z = \infty$  mit einer gegebenen Geschwindigkeit  $u$  in Richtung der  $x$ -Axe fortschreitet. Bei der

52) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 42 (1871), p. 368; Edinburgh Proc. Roy. Soc. 1870/71, p. 374.

53) Kolaček, Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 425; 6 (1879), p. 616.

54) Vgl. die ausgedehnten Versuchsreihen von L. Grunmach, Wiss. Abh. d. kais. Normalaichungskommission, Berlin 1902, p. 101.



Wellenlänge  $\lambda$  sind alsdann zweierlei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

$$c_u = \frac{e}{1+e} u \pm \sqrt{c^2 - \frac{e}{(1+e)^2} u^2}, \quad \left( e = \frac{e_B}{e_A} \right)$$

möglich, wo  $c$  die durch (21 a) bestimmte Geschwindigkeit für  $u = 0$  ist. Ein imaginärer Wert der Quadratwurzel hier würde bedeuten, dass die unverändert als Ausgangspunkt zu nehmende komplexe Partikulärlösung nunmehr in ihrem reellen Teile Wellen mit beständig zunehmender Amplitude darstellt. Diese Instabilität kommt für sämtliche Wellenlängen nicht in Frage, sowie  $u < \frac{1+e}{e^{\frac{1}{2}}} c_m$  ist.

Denkt man sich wieder  $A$  in horizontal-zyklindrischer, von  $y$  nicht abhängender Bewegung derart, dass das von  $z = 0$  wenig abweichende, im übrigen aber völlig willkürlich angesetzte Wellenprofil von  $A$  gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $c$  in der  $x$ -Richtung fortschreitet und andererseits  $A$  für  $z = -\infty$  ruht, so gewinnt man durch das Integral der lebendigen Kraft an der Oberfläche von  $A$  und andererseits den Kapillardruck eine Integralgleichung (*Fourier'sches Integral*), um das Wellenprofil gerade einer willkürlich angenommenen Verteilung des äusseren Druckes  $p_B$  an der Oberfläche anzupassen. Insbesondere wirkt eine mit einer Geschwindigkeit  $c > c_m$  in der  $x$ -Richtung schwimmende zur  $y$ -Axe parallele Gerade, welche an ihrem Orte den Gesamtbetrag des Druckes auf die Längeneinheit um  $P$  vermehrt, während sonst der Druck  $p_B$  konstant sei, genau wie eine sprungweise Zunahme des Richtungskoeffizienten  $dz/dx$  des Wellenprofils um den Betrag  $2P/T_{AB}$  und ruft in einiger Entfernung vor sich her einfachharmonische Wellen von der Länge  $\lambda_1 (< \lambda_m)$ , hinter sich von der Länge  $\lambda_2 (> \lambda_m)$  hervor. — Eine gegen ihre Fortschreitungsrichtung einen Winkel  $\frac{\pi}{2} - \theta$  bildende Drucklinie wirkt dann, als wenn sie nur senkrecht gegen sich die Geschwindigkeit  $c \cos \theta$  hat, woraus durch eine Integration nach  $\theta$  sich die Wirkung eines gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $c$  schwimmenden, druckvermehrend wirkenden Punktes berechnet und insbesondere sich zeigt, dass ein solcher eine keilförmige Wellenfront (man denke an das Bild von Schiffswellen) mit dem durch  $c \cos \theta = c_m$  bestimmten Öffnungswinkel  $2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$  vor sich herreibt<sup>54</sup>).

Die Berücksichtigung der *inneren Reibung* wird für flache, in einer Richtung fortschreitende Wellen auf einer *reinen* Wasserober-

54) Lord *Rayleigh*, Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1883), p. 69 (Sc. papers 2, p. 258).

fläche derart zu geschehen haben, dass an der Oberfläche die Schubspannung gleich Null angenommen, die Zugspannung dem Kapillardruck entsprechend berechnet wird. Ist  $\mu$  der Reibungskoeffizient und  $\nu = \mu/\rho_A$ , so findet man zu gegebener Wellenlänge  $\lambda$  anstatt der früheren Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$ , wofern  $\vartheta = 2\pi\nu/c\lambda$  klein ausfällt, (für Wasserwellen ist  $\frac{2\pi\nu}{c_m} = 0,0048$  cm), eine modifizierte Wellengeschwindigkeit  $= c(1 - \sqrt{2} \vartheta^{\frac{3}{2}})$ , während zugleich die Amplituden einen Dämpfungsfaktor  $e^{-\frac{8\pi^2\nu}{\lambda^2} t}$ , also eine Relaxationszeit

$$\frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu} (= 0,712 \lambda^2 \text{ sec für Wasser})$$

aufweisen.

Die beruhigende Einwirkung von Öl auf Wasserwellen wird dadurch erklärt<sup>56)57)</sup>, dass zunächst infolge Überwiegens der Oberflächenspannung von Wasser gegen Luft über die Summe der zwei Oberflächenspannungen von Öl gegen Wasser und gegen Luft das Öl sich zu einer äusserst dünnen Haut auf dem Wasser auszieht und für die Oberflächenschicht mit der Beimengung von Öl dann elastische Eigenschaften zu Tage treten; ihre Spannung bleibt nicht länger konstant, sondern wächst, wenn die Dicke durch Streckung weiter zu reduzieren gesucht wird; dadurch wirkt sie gleichsam wie eine biegsame und schwer dehnbare Membran und hindert durch ihren Zug auf das darunter befindliche Wasser die freie Entfaltung und Fortpflanzung der Wellen. Infolgedessen ist, wenn man den Einfluss der inneren Reibung ermitteln will, nicht mehr, wie im Falle einer reinen Wasseroberfläche, mit der Grenzbedingung an der Oberfläche zu rechnen, dass dort die Schubspannung Null ist, sondern eher mit der anderen, dass dort die horizontale Geschwindigkeitskomponente Null sei<sup>58)</sup>. Für diesen anderen extremen Fall ergibt sich eine gegen die vorhin betrachteten Umstände im Verhältnis  $4\sqrt{2}\vartheta:1$  kleinere Relaxationszeit.

Die kleinen Schwingungen einer Trennungsfläche von der Gestalt eines *Kreiszyinders* behandelte Lord *Rayleigh*<sup>59)</sup>, um von da aus die Stabilität der Flüssigkeitsstrahlen beurteilen zu können. Die Schwere

55) Vgl. H. Lamb, Hydrodynamics, 3<sup>rd</sup> ed., Cambridge 1906, p. 563.

56) Reynolds, Brit. Assoc. Rep. 1880 (Sc. papers 1, p. 409).

57) Aitken, Edinburgh Roy. Soc. Proc. 12 (1883), p. 56.

58) H. Lamb, Hydrodynamics, 3<sup>rd</sup> ed., Cambridge 1906, p. 570.

59) Lord Rayleigh, Lond. Proc. Math. Soc. 10 (1878), p. 4; Proc. Roy. Soc. 29 (1879), p. 71 (Sc. papers 1, p. 361, 377; Theory of sound, 2. ed. chapt. XX); in Phil. Mag. 34 (1892), p. 145 (Sc. papers 3, p. 585) wird noch der Einfluss der inneren Reibung der Flüssigkeit in Betracht gezogen.

wird nicht berücksichtigt. Es sei  $A$  innerhalb,  $B$  ausserhalb des Zylinders befindlich,  $R$  der Radius des Zylinders, seine Axe die  $z$ -Axe, und

$$r \equiv R + \varepsilon f(z, \theta, t) \pmod{\varepsilon^2}, \quad (x + iy = re^{i\theta}),$$

im  $\lim \varepsilon = 0$  seine Schwingungsgleichung. Wird der äussere Druck in  $B$  konstant angenommen, was damit gleichwertig ist,  $\varrho_B = 0$  zu nehmen, so kann man für das Geschwindigkeitspotential in  $A$  den partikulären Ansatz

$$\varepsilon \Re(C e^{i(kz - \sigma t + m\theta)} J_m(ikr)) \pmod{\varepsilon^2}$$

machen, wobei  $J_m$  die Bessel'sche Funktion erster Art von der Ordnung  $m$  bedeutet, und man gelangt durch die kinematische Bedingung und andererseits die Druckgleichung an der Oberfläche zu der Relation

$$\sigma^2 = \frac{ikR J'_m(ikR)}{J_m(ikR)} (k^2 R^2 + m^2 - 1) \frac{T_{AB}}{\varrho_A R^3}.$$

Für  $m = 0$  wird  $\sigma^2 < 0$ , falls  $kR < 1$  ist, was den instabilen Charakter von Störungen bedeutet, deren Wellenlänge  $2\pi/k$  den Umfang des Zylinders überschreitet. Die Instabilität wird infolge des Faktors  $e^{|\sigma|t}$  in den Amplituden am grössten, wenn dabei  $|\sigma|$  am grössten ausfällt, was auf  $\frac{2\pi}{k} = 4,51 \times 2R$  hinführt, so dass für Schwellungen und Kontraktionen von dieser Wellenlänge die Tendenz des Strahls  $A$  zum Zerfallen in Tropfen am stärksten ist.

Nach ähnlichen Prinzipien behandelt Lord Rayleigh<sup>60)</sup> den Fall  $\varrho_A = 0$ ,  $\varrho_B > 0$ , wobei sich als die Wellenlänge grösster Instabilität  $\frac{2\pi}{k} = 6,48 \times 2R$  ergibt.

Das erste Ergebnis findet Anwendung auf das Zerfallen eines Wasserstrahls in Luft, das zweite auf das Zerreißen eines durch Wasser geschickten Luftstrahls. Die Schwingungen für  $m = 2, 3, 4$  treten prädominierend hervor, wenn der Strahl aus einer Öffnung von elliptischer, dreieckiger, quadratischer Form austritt.

Die kleinen Schwingungen einer Trennungsfläche von der Gestalt einer Kugel erledigen sich ausgehend von dem gleichzeitigen Ansätze<sup>61) 62)</sup>

$$\varphi_A = \Re\left(\frac{-C}{m} \frac{r^m}{R^m} Y_m(\theta, \psi) e^{-i\sigma t}\right), \quad \varphi_B = \Re\left(\frac{C}{m+1} \frac{R^{m+1}}{r^{m+1}} Y_m(\theta, \psi) e^{-i\sigma t}\right),$$

wobei der kinematischen Bedingung  $\frac{d\varphi_A}{dr} = \frac{d\varphi_B}{dr}$  an der Oberfläche

60) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 34 (1892), p. 177 (Sc. papers 3, p. 594)

61) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 29 (1879), p. 71 (Sc. papers 1, p. 377).

62) Webb, Mess. of math. 9 (1880), p. 177.

Rechnung getragen ist; darin bedeuten  $r, \theta, \psi$  Polarkoordinaten vom Kugelzentrum,  $Y_m(\theta, \psi)$  die Kugelflächenfunktion  $m^{\text{ter}}$  Ordnung,  $R$  den Radius der Kugel. Es stellt sich alsdann

$$\sigma^2 = m(m+1)(m-1)(m+2) \frac{T_{AB}}{((m+1)e_A + me_B)R^3}$$

heraus. Das Ergebnis findet Anwendung auf die Schwingungen eines Wassertropfens in Luft, einer Luftblase in Wasser; in abfallenden Tropfen treten durch ein Nachwirken des Abreissens der Tropfen noch die Schwingungen 3. Ordnung ( $m=3$ ) hervor<sup>63</sup>).

## II. Kapillarität als räumlich verteilte Energie.

**13. Die Hypothese der Kohäsionskräfte.** Die Kapillaritätserscheinungen ergeben sich als notwendige Folgerungen aus einer Hypothese, wonach zwischen zwei materiellen Teilchen gleicher oder verschiedener Substanzen neben der Gravitation noch eine andere, nur von der Distanz abhängende Anziehungskraft in der Verbindungslinie wirksam ist, die man *Kohäsionskraft* nennt und deren Gesetz irgend welcher Art sein mag, nur dass sie mit wachsender Entfernung derart rasch abnimmt, dass sie bereits auf eine äusserst kleine, mikroskopisch nicht wahrnehmbare Distanz ganz ausser Betracht fällt.

Zunächst wurde das Ansteigen von Flüssigkeit in einer kapillaren Röhre allein mit einer von der Röhre auf die Flüssigkeit ausgeübten Anziehung erklärt, die nach der Unabhängigkeit der Erscheinung von der Dicke der Röhre nur von den der Wand nächstgelegenen Partikeln ausgehen konnte<sup>64</sup>). *Clairaut*<sup>65</sup>) erkannte es als notwendig, eine Anziehung der Flüssigkeitsteilchen unter einander mit in Rücksicht zu ziehen. *Laplace*<sup>66</sup>) konnte sodann eine vollständige Theorie der Kapillarität einzig mit der vorhin skizzierten Hypothese über die Kohäsionskräfte aufbauen.

*Laplace* berechnete für eine Flüssigkeitsmasse, deren Teile gemäss jener Hypothese kohärieren, in der Hauptsache das Potential der Kohäsionskräfte für eine Stelle der Oberfläche und fand es als eine lineare Funktion der mittleren Krümmung daselbst. Er betrachtete zunächst das Potential einer Kugel auf eine Stelle der Oberfläche, ging von da zum Potential eines durch zwei unendlich nahe Meridian-

63) *Lenard*, Ann. Phys. Chem. 30 (1887), p. 209.

64) *Hawkesbee*, London Trans. R. Soc. 26, 27 (1709—1713).

65) *Clairaut*, Traité sur la figure de la terre, Paris 1743, chap. X.

66) *Laplace*, Théorie de l'action capillaire.