Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0333
LOG Titel: 2. Oberflächenenergie und deren Variation
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

Contact

sind. Alsdann ist ein überwiegender Anteil dieser Energie dem Volumen der Flüssigkeit proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor, negativ genommen, einen *Druck im Raume* angibt, den man die *Kohäsion* der Flüssigkeit nennt.

Es soll hier die erstere Auffassung der Kapillarität vorangestellt werden, welche dieser Energieform die Trennungsflächen als ausschliesslichen Sitz zuweist. Diese Auffassung erscheint hernach als ein mathematisch einfacher Grenzfall der anderen tieferen Auffassung, welche die ganzen Massen als Spielraum von Kohäsionskräften annimmt.

I. Kapillarität als Flächenenergie.

2. Oberflächenenergie und deren Variation. Eine Trennungsfläche zwischen einer Flüssigkeit A und einem zweiten Medium B ist verknüpft mit einer potentiellen Energie $T_{AB} F_{AB}$, wobei F_{AB} den Flächeninhalt der Fläche und T_{AB} eine von den beiderseits angrenzenden Medien abhängende Konstante ist. Dabei sind A und B homogen gedacht und sollen Änderungen von Temperatur und Dichte zunächst nicht in Betracht kommen. T_{AB} hat die Dimensionen $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$ und heisst *Oberflächenspannung* von A gegen B. Unter der Oberflächenspannung schlechthin versteht man für eine Flüssigkeit diejenige gegen ihren gesättigten Dampf, wovon die einer Trennungsfläche gegen Luft[1]) vielfach keine Verschiedenheit zeigt. Für Wasser gegen Luft ist

$$T = 74 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2} = 0{,}075 \frac{\text{gr Gewicht}}{\text{cm}},$$

für Quecksilber gegen Luft $T = 0{,}55$ gr Gewicht/cm, für Quecksilber gegen Wasser $T = 0{,}42$ gr Gewicht/cm.

Die Folgerungen aus dem Bestehen des Terms $T_{AB} F_{AB}$ in der Energie liessen sich am kürzesten darlegen auf Grund der Bemerkung, dass genau derselbe Ausdruck der Energie Platz greifen würde für eine unendlich dünne elastische Haut, welche die Trennungsfläche bedeckt, wenn in ihr überall eine konstante Spannung $= T_{AB}$ herrscht, d. h. jede in ihr angebrachte Schnittlinie an beiden Ufern einen von dem anderen fort gerichteten Zug T_{AB} auf die Längeneinheit erfährt. Diesen Vergleich von vorn herein einzuführen, hiesse aber, die Schwierigkeit, welche für die Theorie der Kapillarität in der Notwendigkeit der Annahme von Druckdiskontinuitäten trans-

1) Von einer Oberflächenspannung gegen eine gasförmige Phase kann, streng genommen, nur bei Flüssigkeiten die Rede sein, welche mit der gasförmigen Phase in chemischem Gleichgewicht koexistieren.

versal zu einer Trennungsfläche liegt, nicht beseitigen, sondern nur sie einem anderen Kapitel der Mechanik zuschieben. Um hinsichtlich der Voraussetzungen der Theorie Klarheit zu gewinnen, ist es deshalb notwendig, im wesentlichen den Gang von *Gauss* einzuhalten und den Einfluss des Terms TF der Energie auf Grund eines allgemeinen Prinzips der Mechanik zu verfolgen, wie des Prinzips, dass Gleichgewicht durch ein Minimum der potentiellen Energie oder, bei Berücksichtigung auch thermodynamischer Umstände, durch ein Minimum der Energie bei konstanter Entropie charakterisiert wird.

Hiernach muss vor allem die virtuelle Veränderlichkeit von TF betrachtet werden. *Gauss* hat, indem er bei diesem Anlasse überhaupt die Prinzipien für die Variation von Doppelintegralen mit veränderlichen Grenzen schuf, eine fundamentale Transformation für die Variation von TF entwickelt. Man kann sich allerdings, worauf auch *Gauss* beiläufig hinweist, das Resultat dieser Transformation durch infinitesimale Betrachtungen leicht plausibel machen, indem man eine beliebige unendlich kleine Verrückung einer Fläche in eine erste Verrückung, wobei jeder Punkt normal zur Fläche fortschreitet, und eine zweite Verrückung, wobei jeder Punkt tangential zur Fläche fortschreitet, zerlegt. Doch erscheint es angemessen, hier auch das eigentliche analytische Prinzip jener Umwandlung, welches in einer gewissen partiellen Integration besteht, anzugeben. In Anbetracht des Umstandes jedoch, dass die Variationsrechnung, namentlich in Hinsicht auf Probleme mit Nebenbedingungen, wie sie hier schliesslich vorliegen werden, noch keine allgemein anerkannte Darstellung besitzt, auf die sonst einfach zu verweisen wäre, mag es zur Durchsichtigkeit beitragen, wenn wir nur auf bekanntere Hilfsmittel der Integralrechnung rekurrieren.

Die Trennungsfläche F_{AB}, die wir uns berandet denken wollen, durchlaufe bei einer virtuellen Bewegung, während welcher der Parameter w von $w = 0$ an wächst, eine Schar von Flächen $F(w)$. Wir konstruieren auf jeder Fläche die zwei zueinander orthogonalen Scharen von Krümmungslinien und sodann zwei Flächenscharen $u_2 = \text{const.}$, $u_1 = \text{const.}$, welche aus den $F(w)$ gerade diese Krümmungslinien herausschneiden. Wir stellen uns der Einfachheit halber die Flächen $F(w)$ sämtlich als auseinanderliegend und derart vor, dass in dem von ihnen erfüllten Gebiete jedem Punkte sich hiernach Werte u_1, u_2, w eindeutig zuordnen. Die Richtungen von einem Punkte u_1, u_2, w aus, in denen nur u_1, nur u_2, nur w und zwar zunehmend variiert, sollen in Argumenten trigonometrischer Funktionen kurz durch u_1, u_2, w angedeutet werden, und n bedeute die *nach B* *hin gerichtete* Normale auf $\mathrm{F}(w)$; die u_1, u_2, n-Richtung sollen stets ein Rechtsschraubensystem wie die Koordinatenaxen x, y, z bilden (Fig. 1).

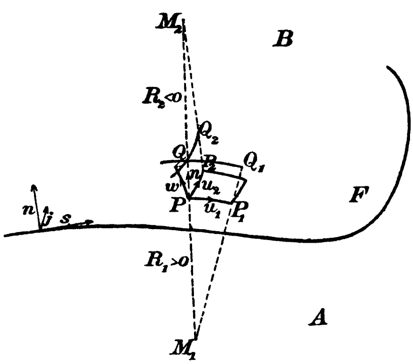

Fig. 1.

Die Berandung von $\mathrm{F}(w)$ wird durch eine Gleichung $u_2 = \chi(u_1, w)$ dargestellt sein, und da wir irgend eine Funktion von u_1 und w als einen neuen Parameter an Stelle von u_1 einführen können, so dürfen wir diese Gleichung als w nicht enthaltend: $u_2 = \chi(u_1)$ annehmen. Das Quadrat des Linienelements in dem von den $\mathrm{F}(w)$ erfüllten Gebiete wird sich

$$(1) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= L_1{}^2(du_1 - l_1 dw)^2 + L_2{}^2(du_2 - l_2 dw)^2 + N^2 dw^2 \end{aligned}$$

schreiben lassen, wobei $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ und $\frac{N}{\cos(wn)} = L > 0$ sei, also N mit dem Vorzeichen von $\cos(wn)$ gerechnet werde. Nun ist

$$F = \iint L_1 L_2 du_1 du_2,$$

$$(2) \qquad \frac{dF}{dw} = \iint \left(L_1 \frac{dL_2}{dw} + L_2 \frac{dL_1}{dw}\right) du_1 du_2,$$

wo das Doppelintegral sich über das Innere von $u_2 = \chi(u_1)$ erstreckt.

Der Ausdruck hier gestattet auf Grund der charakteristischen Eigenschaft der Krümmungskurven, dass die Normalen längs ihnen eine abwickelbare Fläche bilden, eine wichtige Umformung durch Produktintegration[2]). Zu einem Punkte $P(u_1, u_2, w)$ liegt auf der benachbarten Fläche $\mathrm{F}(w + dw)$ in der kleinstmöglichen Distanz $Ndw = dn$, also auf der Normalen von $\mathrm{F}(w)$ der Punkt $Q(u_1 + l_1 dw, u_2 + l_2 dw, w + dw)$. Entsprechend liege normal über $P_1(u_1 + du_1, u_2, w)$ auf $\mathrm{F}(w + dw)$ der Punkt Q_1; es sei M_1 der Krümmungsmittelpunkt der Krümmungslinie PP_1 auf $\mathrm{F}(w)$, also der Treffpunkt der Geraden PQ und $P_1 Q_1$, R_1 der Krümmungsradius $M_1 P$ und zwar positiv, falls $M_1 P$ die Richtung n nach B hin hat, anderenfalls negativ. Man hat $PP_1 = L_1 du_1$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $M_1 P P_1$, $M_1 Q Q_1$ und im Hinblick auf (1) folgt

2) Die zunächst folgende infinitesimale Betrachtung dient nur dazu, diese Eigenschaft der Krümmungslinien schnell in eine Formel umzusetzen.

$$\frac{PQ}{M_1 P} = \frac{QQ_1 - PP_1}{PP_1}, \quad \frac{dn}{R_1} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial n} dn + L_1 \frac{\partial l_1}{\partial u_1} dw\right),$$

d. i. nach Fortlassung des Faktors dw

$$\frac{N}{R_1} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_1} l_1 + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} l_2 + \frac{\partial L_1}{\partial w} + L_1 \frac{\partial l_1}{\partial u_1}\right).$$

Eine entsprechende Relation gilt für den zweiten Hauptkrümmungsradius R_2 in P und durch Addition beider entsteht

$$N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) L_1 L_2 = L_1 \frac{\partial L_2}{\partial w} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial w} + \frac{\partial L_1 L_2 l_1}{\partial u_1} + \frac{\partial L_1 L_2 l_2}{\partial u_2}.$$

Macht man hiervon in (2) Gebrauch und führt partielle Integrationen nach u_1 und u_2 aus, so ergibt sich

$$\frac{dF}{dw} = \int\limits_{(f)} N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df - \int\limits_{(s)} L_1 L_2 \left(l_1 \frac{du_2}{ds} - l_2 \frac{du_1}{ds}\right) ds,$$

darin bedeutet allgemein df das Flächenelement, ds das Randlinienelement von $F(w)$ in positivem Umlauf um die Normale n. Bezeichnet man mit j die Richtung, die normal auf ds ins Innere der Fläche $F(w)$ hineinführt (s. Fig. 1), so ist

$$L_1 \frac{du_1}{ds} = \cos(u_2 j), \quad L_2 \frac{du_2}{ds} = -\cos(u_1 j),$$

$$-L_1 l_1 = L \cos(u_1 w), \quad -L_2 l_2 = L \cos(u_2 w);$$

schreibt man noch $L \cos(wj) dw = dj$, so entsteht daher aus der letzten Gleichung die folgende Darstellung der ersten Ableitung der Kapillarenergie TF nach dem Variationsparameter w:

$$(3) \qquad T\frac{dF}{dw} = T\int\limits_{(f)} \frac{dn}{dw}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df - T\int\limits_{(s)} \frac{dj}{dw} ds,$$

die insbesondere für $w = 0$ anzuwenden sein wird. Darin bedeuten dann die $dn = N dw$ für die Punkte der Trennungsfläche die zur Fläche normalen und die $dj = L \cos(wj) dw$ für die Punkte ihres Randes die in die Fläche fallenden, zum Rande normalen Komponenten der einem Zuwachs dw entsprechenden Verrückungen; hierauf fussend kann man sich die Transformation (3), wie schon oben angedeutet, unmittelbar geometrisch plausibel machen[2a]. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ soll, wie die Vorzeichen von R_1 und R_2 oben festgelegt sind, die *mittlere Krümmung* der Stelle df *nach B hin* heissen.

[2a]) Wir haben im Übrigen die gebräuchlichen Zeichen δF, δw u. s. w. der ersten Variationen vermieden, um evident zu machen, dass es sich schließlich nur um Differentialquotienten im gewöhnlichen Sinne handelt.

Da in (3) die Parameter der Krümmungskurven wieder eliminiert sind, so ist diese Darstellung nicht an die anfänglich betreffs der Koordinaten u_1, u_2, w gemachte Beschränkung gebunden.

Die Volumina von A und B seien V_A, V_B, ihre Dichten ϱ_A, ϱ_B. Wir merken noch an, dass bei den fraglichen virtuellen Verrückungen die Volumina gemäss

$$(4) \qquad \frac{dV_A}{dw} = \int\limits_{F_{AB}} \frac{dn}{dw}\, df, \qquad \frac{dV_B}{dw} = -\int\limits_{F_{AB}} \frac{dn}{dw}\, df$$

variieren, ferner die potentielle Energie bezüglich der Schwerkraft für beide Medien zusammen die Ableitung nach w:

$$(5) \qquad g(\varrho_A - \varrho_B) \int z \frac{dn}{dw}\, df$$

erfährt; dabei ist die z-Axe *vertikal nach oben* gedacht.

3. Differentialgleichung für eine freie Oberfläche. Die Trennungsfläche von A gegen B sei frei beweglich (B eine Flüssigkeit wie A oder ein Gas), und neben der Kapillarität komme nur noch die Schwere in Betracht. Stabiles Gleichgewicht des Systems wird durch ein Minimum der potentiellen Energie gegenüber allen virtuellen Verrückungen charakterisiert. Nun liegt aber eine Nebenbedingung in der Konstanz des Gesamtvolumens von A (oder von B, vgl. (4)) vor. Um dieser Nebenbedingung Rechnung zu tragen, ziehen wir die Regeln der Differentialrechnung für ein sogenanntes relatives Extremum heran.

Wir denken uns wieder die Trennungsfläche F_{AB} als das Element $w = 0$ einer beliebigen von einem Parameter w abhängenden Schar von Flächen $z = \psi(x, y, w)$, welche alle den Rand gemein haben mögen. Der Nebenbedingung würde allerdings, während w sich verändert, nicht mehr genügt werden. Denken wir uns aber noch eine beliebige zweite solche Schar von Flächen $z = \psi^*(x, y, w^*)$, welche wieder für $w^* = 0$ von der gegebenen Fläche ausgeht, und erweitern wir diese zwei einparametrigen Scharen irgendwie zu einer Flächenschar mit zwei Parametern $z = \psi(x, y, w, w^*)$, welche für $w^* = 0$ in die erste, für $w = 0$ in die zweite einparametrige Schar übergeht, so wird die Grösse des Volumens V_A bei den Flächen dieser allgemeineren Schar eine Funktion $V_A(w, w^*)$ der zwei Parameter sein, und innerhalb der zweiparametrigen Schar gibt uns diejenige einparametrige Schar, welche durch die Bedingung $V_A(w, w^*) = V_A(0, 0)$ ausgeschieden wird, jetzt eine tatsächliche virtuelle Bewegung der Trennungsfläche. Danach haben wir die Bedingung zu formulieren,