Da in (3) die Parameter der Krümmungskurven wieder eliminiert sind, so ist diese Darstellung nicht an die anfänglich betreffs der Koordinaten u_1, u_2, w gemachte Beschränkung gebunden.

Die Volumina von A und B seien V_A, V_B, ihre Dichten ϱ_A, ϱ_B. Wir merken noch an, dass bei den fraglichen virtuellen Verrückungen die Volumina gemäss

$$(4) \qquad \frac{dV_A}{dw} = \int\limits_{\mathrm{F}_{AB}} \frac{dn}{dw}\, df, \quad \frac{dV_B}{dw} = -\int\limits_{\mathrm{F}_{AB}} \frac{dn}{dw}\, df$$

variieren, ferner die potentielle Energie bezüglich der Schwerkraft für beide Medien zusammen die Ableitung nach w:

$$(5) \qquad g(\varrho_A - \varrho_B)\int z \frac{dn}{dw}\, df$$

erfährt; dabei ist die z-Axe *vertikal nach oben* gedacht.

3. Differentialgleichung für eine freie Oberfläche. Die Trennungsfläche von A gegen B sei frei beweglich (B eine Flüssigkeit wie A oder ein Gas), und neben der Kapillarität komme nur noch die Schwere in Betracht. Stabiles Gleichgewicht des Systems wird durch ein Minimum der potentiellen Energie gegenüber allen virtuellen Verrückungen charakterisiert. Nun liegt aber eine Nebenbedingung in der Konstanz des Gesamtvolumens von A (oder von B, vgl. (4)) vor. Um dieser Nebenbedingung Rechnung zu tragen, ziehen wir die Regeln der Differentialrechnung für ein sogenanntes relatives Extremum heran.

Wir denken uns wieder die Trennungsfläche F_{AB} als das Element $w = 0$ einer beliebigen von einem Parameter w abhängenden Schar von Flächen $z = \psi(x, y, w)$, welche alle den Rand gemein haben mögen. Der Nebenbedingung würde allerdings, während w sich verändert, nicht mehr genügt werden. Denken wir uns aber noch eine beliebige zweite solche Schar von Flächen $z = \psi^*(x, y, w^*)$, welche wieder für $w^* = 0$ von der gegebenen Fläche ausgeht, und erweitern wir diese zwei einparametrigen Scharen irgendwie zu einer Flächenschar mit zwei Parametern $z = \psi(x, y, w, w^*)$, welche für $w^* = 0$ in die erste, für $w = 0$ in die zweite einparametrige Schar übergeht, so wird die Grösse des Volumens V_A bei den Flächen dieser allgemeineren Schar eine Funktion $V_A(w, w^*)$ der zwei Parameter sein, und innerhalb der zweiparametrigen Schar gibt uns diejenige einparametrige Schar, welche durch die Bedingung $V_A(w, w^*) = V_A(0, 0)$ ausgeschieden wird, jetzt eine tatsächliche virtuelle Bewegung der Trennungsfläche. Danach haben wir die Bedingung zu formulieren, dass unter allen Flächen der zweiparametrigen Schar, für welche $V_A(w, w^*) = V_A(0, 0)$ ist, die Fläche $w = 0$, $w^* = 0$ das Minimum der potentiellen Energie

$$E = T_{AB} F_{AB} + g\varrho_A \int\limits_A z\,dv + g\varrho_B \int\limits_B z\,dv$$

liefert; (die Bezeichnung hier ist so zu verstehen, dass dv in dem ersten Integral die Volumenelemente von A, in dem zweiten diejenigen von B durchläuft). Für dieses Extremum mit einer Nebenbedingung liefert nun die Differentialrechnung in bekannter Weise die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial w} + \lambda_{AB} \frac{\partial V_A}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial w^*} + \lambda_{AB} \frac{\partial V_A}{\partial w^*} = 0 \quad (w = 0, w^* = 0)$$

mit einer geeigneten Konstante λ_{AB}. Die zweite Gleichung dient uns jetzt nur dazu, um zu erkennen, dass der Wert von λ_{AB} in keiner Weise von der beliebig angenommenen ersten Schar $z = \psi(x, y, w)$ abhängt, also für die Trennungsfläche F_{AB} an sich eine bestimmte Bedeutung hat; und bei ausdrücklicher Hinzunahme dieser Tatsache vertritt die erste Gleichung bereits das System der beiden. Danach muss (vgl. (3), (4), (5)) mit einer geeigneten Konstante λ_{AB}, die sich schliesslich aus dem Werte von V_A bestimmen wird, die Bedingung

$$\int\limits_{\mathrm{F}_{AB}} N\left(T_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + g(\varrho_A - \varrho_B)z + \lambda_{AB}\right) df = 0$$

gelten. Dabei unterliegt vermöge der willkürlichen Wahl der Schar $\mathrm{F}(w)$ die Funktion $N = \frac{dn}{dw}$ auf der Fläche F_{AB} einzig der Beschränkung, dass sie durchweg stetig ist und am Rande gleich Null genommen wird. Für N in diesem Umfange kann das vorstehende Integral nur dann beständig gleich Null ausfallen, wenn der Faktor von N an jeder Stelle innerhalb F_{AB} verschwindet, d. h. die Gestalt der freien Oberfläche muss der Differentialgleichung

(6) $$T_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + g(\varrho_A - \varrho_B)z + \lambda_{AB} = 0$$

genügen[3]).

Es kann F_{AB} auch aus mehreren getrennten Stücken bestehen und λ_{AB} hat für die verschiedenen Stücke denselben Wert.

Ein Minimum von E ist hier jedenfalls nur möglich, wenn $T_{AB} \geqq 0$ ist, da sonst durch ein Hin- und Herfalten der Trennungsfläche an ihrem Orte sich E beliebig verringern liesse.

---

3) *Laplace,* Supplément au livre X de la Méc. céleste, no. 4.

Es möge $\varrho_A \gtrless \varrho_B$ sein. Setzen wir

$$z_{AB} = -\frac{\lambda_{AB}}{g(\varrho_A - \varrho_B)},$$

so wird durch $z = z_{AB}$ eine bestimmte horizontale Ebene angewiesen, welche *Niveauebene* heissen soll. Verlegen wir $z = 0$ nach der Niveauebene, so folgt die Gleichung (6) in der Gestalt

$$\text{(6a)} \qquad T_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -g(\varrho_A - \varrho_B)z.$$

Danach ist an jeder Stelle der Trennungsfläche aus der mittleren Krümmung nach B hin sofort auf die Lage der Niveauebene zu schliessen. *Ist $\varrho_A > \varrho_B$, so liegen die Stellen der Trennungsfläche, wo diese mittlere Krümmung positiv ist,* d. h. die Fläche nach B hin konvex-konvex oder konvex-konkav mit grösserem Betrage der ersteren Hauptkrümmung ist, *unterhalb der Niveauebene* und zwar um so tiefer darunter, je stärker jene mittlere Krümmung ist; *Stellen, wo diese Krümmung nach B hin negativ ist, liegen oberhalb der Niveauebene,* Stellen, wo sie Null ist, notwendig genau in Höhe dieser Ebene (Fig. 2).

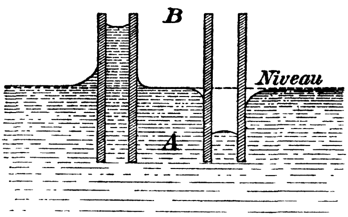

Fig. 2.

Insbesondere kann die Trennungsfläche asymptotisch eben nur in Höhe dieser Ebene sich gestalten, wodurch ihre Bezeichnung als Niveauebene begründet ist.

4. Randwinkel. Zur vollständigen Festlegung von F_{AB} sind ausser der Differentialgleichung (6) weitere Bedingungen für den Rand der Fläche dort, wo A und B an dritte Medien C grenzen, erforderlich.

Grenzen drei Flüssigkeiten A, B, C mit drei Trennungsflächen F_{AB}, F_{AC}, F_{BC}, in denen die Oberflächenspannungen T_{AB}, T_{AC}, T_{BC} herrschen, längs einer Kurve zusammen (Fig. 3), so würde zwar mit jedem virtuellen Bewegungszustand der Randkurve stets auch der entgegengesetzte Bewegungszustand für sie virtuell sein; immerhin wollen wir (weil hernach auch ein Fall von nicht in diesem Sinne umkehrbaren Verrückungen in Betracht kommt), zunächst nur von dem vorausgesetzten Gleichgewichtszustand an (nicht durch ihn hindurch) variieren, und wir denken uns eine von einem Parameter w (≥ 0)

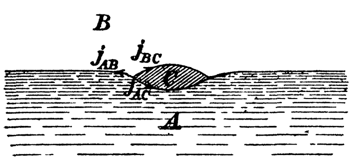

Fig. 3.