Es möge $\varrho_A \gtrless \varrho_B$ sein. Setzen wir

$$z_{AB} = -\frac{\lambda_{AB}}{g(\varrho_A - \varrho_B)},$$

so wird durch $z = z_{AB}$ eine bestimmte horizontale Ebene angewiesen, welche *Niveauebene* heissen soll. Verlegen wir $z = 0$ nach der Niveauebene, so folgt die Gleichung (6) in der Gestalt

$$\text{(6a)} \qquad T_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -g(\varrho_A - \varrho_B)z.$$

Danach ist an jeder Stelle der Trennungsfläche aus der mittleren Krümmung nach B hin sofort auf die Lage der Niveauebene zu schliessen. *Ist $\varrho_A > \varrho_B$, so liegen die Stellen der Trennungsfläche, wo diese mittlere Krümmung positiv ist,* d. h. die Fläche nach B hin konvex-konvex oder konvex-konkav mit grösserem Betrage der ersteren Hauptkrümmung ist, *unterhalb der Niveauebene* und zwar um so tiefer darunter, je stärker jene mittlere Krümmung ist; *Stellen, wo diese Krümmung nach B hin negativ ist, liegen oberhalb der Niveauebene,* Stellen, wo sie Null ist, notwendig genau in Höhe dieser Ebene (Fig. 2). Insbesondere kann die Trennungsfläche asymptotisch eben nur in Höhe dieser Ebene sich gestalten, wodurch ihre Bezeichnung als Niveauebene begründet ist.

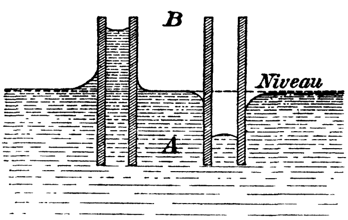

Fig. 2.

4. **Randwinkel.** Zur vollständigen Festlegung von F_{AB} sind ausser der Differentialgleichung (6) weitere Bedingungen für den Rand der Fläche dort, wo A und B an dritte Medien C grenzen, erforderlich.

Grenzen drei Flüssigkeiten A, B, C mit drei Trennungsflächen F_{AB}, F_{AC}, F_{BC}, in denen die Oberflächenspannungen T_{AB}, T_{AC}, T_{BC} herrschen, längs einer Kurve zusammen (Fig. 3), so würde zwar mit jedem virtuellen Bewegungszustand der Randkurve stets auch der entgegengesetzte Bewegungszustand für sie virtuell sein; immerhin wollen wir (weil hernach auch ein Fall von nicht in diesem Sinne umkehrbaren Verrückungen in Betracht kommt), zunächst nur von dem vorausgesetzten Gleichgewichtszustand an (nicht durch ihn hindurch) variieren, und wir denken uns eine von einem Parameter w (≥ 0)

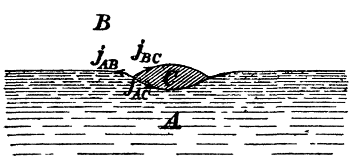

Fig. 3.

abhängende Schar von Lagen dieser Randkurve, mit den nämlichen Endpunkten, falls nicht die Kurve geschlossen ist, und von gewissen damit verbundenen Lagen der drei Trennungsflächen; dabei sollen diese stets gemeinsam an der Randkurve ansetzen, ihre sonstigen Randteile aber fest behalten und zugleich in ihren inneren Partien solche Deformationen erfahren, dass die ganzen Volumina von A, B, C unverändert bleiben. Um zum Ausdruck zu bringen, dass die Gesamtenergie E im Gleichgewichtszustand für $w = 0$ am kleinsten ist, haben wir dann in Anbetracht der erst einseitigen Variation bloß die Ungleichung

$$\frac{dE}{dw} \geqq 0 \quad (w = 0)$$

zu fordern. Da aber für die Trennungsflächen gemäss (6) bereits solche Gleichungen feststehen, dass die hierin als Flächenintegrale auftretenden Terme für sich Null sind, so zieht sich diese Ungleichung gemäss (3) zu

$$-\int L(T_{AB} \cos(wj_{AB}) + T_{AC} \cos(wj_{AC}) + T_{BC} \cos(wj_{BC}))ds \geqq 0$$

zusammen, wobei das Integral über die gegebene Lage der Randkurve zu erstrecken ist und an jedem Elemente ds unter w die Richtung, unter Ldw die Grösse der dem Zuwachs dw entsprechenden Verrückung des Randpunktes, unter j_{AB}, j_{AC}, j_{BC} die auf ds ins Innere der Flächen hin errichteten Normalen zu verstehen sind. Da die Funktion L hier beliebig gewählt werden kann, nur dass sie stetig und stets $\geqq 0$ ist und an den Endpunkten der Randkurve verschwindet, so folgt hieraus

$$(7) \qquad -T_{AB} \cos(wj_{AB}) - T_{AC} \cos(wj_{AC}) - T_{BC} \cos(wj_{BC}) \geqq 0$$

längs der ganzen Randkurve, und zwar noch für beliebige Richtungen w. Nun können wir aber mit jeder Richtung w die entgegengesetzte kombinieren, und ist daher das Zeichen $\geqq$ hier durch $=$ zu ersetzen. Hiernach müssen sich drei Vektoren von den Längen T_{AB}, T_{AC}, T_{BC} und den zu j_{AB}, j_{AC}, j_{BC} parallelen Richtungen zu einem geschlossenen Dreiecke aneinanderfügen[4]). Der Winkel $(j_{AB} j_{AC}) = \omega_A$ z. B. ist dann der von den zwei ersten Seiten in diesem Dreieck gebildete Aussenwinkel und hat hiernach längs der ganzen Randkurve einen konstanten aus den drei Spannungen folgenden Wert. Dieser Winkel ω_A heisst der *Randwinkel* von A gegen B und C.

Ein erstes Erfordernis für das angenommene Gleichgewicht ist

4) Diese Bedingung ist von *F. Neumann* aufgestellt und zuerst in der Dissertation von *Paul du Bois-Reymond* (Berlin 1859) veröffentlicht worden.

nun, dass aus den drei Längen T_{AB}, T_{AC}, T_{BC} überhaupt ein Dreieck zu bilden ist, d. h. dass von jenen drei Spannungen keine grösser als die Summe der beiden anderen ist. Ist jedoch etwa $T_{AB} > T_{AC} + T_{BC}$, so wird vielmehr C sich zwischen A und B ausziehen, eventuell zu einer dünnen Schicht mit zwei einander derart nahe liegenden Trennungsflächen gegen A und B, dass dadurch Umstände resultieren, die erst auf Grund der Annahme einer räumlichen Verteilung der Kapillarenergie genauer zu verfolgen sein werden.

Die Relation $T_{AB} > T_{AC} + T_{BC}$ für drei Medien dient als hinreichende Erklärung der mannigfachsten Kapillarphänomene[5].

Nach den Beobachtungen von *Marangoni*[6] ist in allen Fällen für zwei Flüssigkeiten die gegenseitige Oberflächenspannung kleiner als die Differenz ihrer Oberflächenspannungen gegen Luft[1], hierbei also niemals jenes Dreieck von Spannungen realisierbar. Der Fall von Quecksilber und Wasser, den *Marangoni* als eine Ausnahme ansah, fügt sich dieser allgemeinen Regel[6a]. Wenn Wasser auf Quecksilber in einem Tropfen steht, so haften der Quecksilberoberfläche fremde Bestandteile an, die ihre Spannung herabsetzen[7].

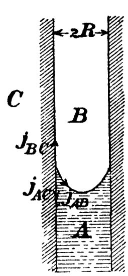

Fig. 4.

Stellt C einen festen Körper vor, so kann die Trefflinie von A, B, C nur auf der Oberfläche dieses frei verschoben werden, und erhalten wir die Relation (7) in dem entsprechenden beschränkteren Umfange, nämlich, wenn C keine Diskontinuität der Tangentialebene an der Randkurve hat (Fig. 4), einmal so, dass w mit j_{AC}, das andere Mal so, dass w mit j_{BC} zusammenfällt, und wir erschliessen damit

$$\cos \omega_A = \frac{T_{BC} - T_{AC}}{T_{AB}}, \tag{8}$$

---

5) Eine bis zur Gegenwart reichende Übersicht der Beobachtungsmethoden und -ergebnisse zur Kapillarität bringt der Artikel von *F. Pockels* im Handbuch der Physik, herausg. von *A. Winckelmann,* Bd. 1 (Breslau 1907).

6) *Marangoni*, Sull' espansione delle goccie di liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido, Pavia 1865; Ann. Phys. Chem. 143 (1871), p. 348. Dieselbe Tatsache fanden *van der Mensbrugghe,* Mém. cour. de l'Acad. de Belg. 34 (1869); ferner *Lüdtge,* Ann. Phys. Chem. 137 (1869), p. 362.

6a) *Quincke*, Ann. Phys. Chem. 139 (1870), p. 66. Lord *Rayleigh*, Sc. papers 3, p. 562.

7) Das Ausbreiten eines Tropfens einer Flüssigkeit auf einer anderen Flüssigkeit geschieht jedesmal in charakteristischen Formen, die mit den Substanzen sehr mannigfaltig variieren, den *Tomlinson*schen Kohäsionsfiguren; vgl. darüber *O. Lehmann*, Molekularphysik 1 (Leipzig 1888), p. 260; *Paul du Bois-Reymond,* Ann. Phys. Chem. 139 (1870), p. 262.

wo ω_A wieder den Randwinkel $(j_{AB}j_{AC})$ von A gegen B und C bezeichnet[8]).

Diese Relation würde unmöglich sein, wenn der Quotient rechts dem Betrage nach >1 (oder <-1) ausfällt. Im Falle $T_{BC}>T_{AC}+T_{AB}$ (es brauchten hier T_{AC}, T_{BC} nicht $\geqq 0$ zu sein) kommt dann Gleichgewicht dadurch zu Stande, dass sich die Flüssigkeit A am festen Körper C in einer selbst mikroskopisch nicht messbaren dünnen Schicht entlang zieht, C *benetzt*, wodurch an der zu bemerkenden Randlinie B beiderseits an A grenzt und daher eben nach dieser Formel (8), worin nun A statt C und $T_{AA}=0$ zu nehmen ist, sich der Randwinkel von A gleich Null herausstellt.

Hat die Wand des festen Körpers C an der Randkurve gerade eine Schneide, (ein Fall, wie er sich bei der Adhäsion einer Flüssigkeit an einem festen Körper leicht darbietet (Fig. 5)), so kommen zweierlei nicht entgegengesetzte Verschiebungen der Randkurve auf C in Betracht. Das Ergebnis ist dasselbe, als wenn man sich die Schneide als Grenze abgerundeter Formen denkt; man kommt zur Ungleichung (7) einmal so, dass darin w durch j_{AC}, aber j_{BC} durch die zu j_{AC} entgegengesetzte Richtung, das andere Mal so, dass darin w durch j_{BC}, aber j_{AC} durch die zu j_{BC} entgegengesetzte Richtung vertreten wird; man erhält demnach

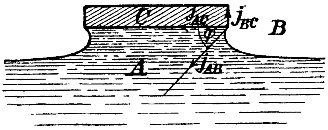

Fig. 5.

$$-T_{AB}\cos(j_{AC}j_{AB})-T_{AC}+T_{BC}\geqq 0,$$
$$-T_{AB}\cos(j_{BC}j_{AB})+T_{AC}-T_{BC}\geqq 0,$$

d. h.

(9) $$(j_{AC}j_{AB})\geqq\omega_A,\quad (j_{AB}j_{BC})\geqq\pi-\omega_A,$$

wo ω_A den durch (8) bestimmten Winkel $\geqq 0$ und $\leqq\pi$ bedeutet. Aus beiden Relationen zusammen folgt

$$(j_{AC}j_{BC})\geqq\pi.$$

Danach kann im Zustande des Gleichgewichts die Grenzlinie der freien Oberfläche niemals längs eines endlichen Stücks auf einer konkaven Schneide des festen Körpers liegen[9]).

8) *Quincke* (Ann. Phys. Chem. 137 (1869), p. 42) fand, dass längs einer auf Glas keilförmig aufgetragenen dünnen Silberschicht Wasser oder Quecksilber einen konstanten Randwinkel erst dort ergibt, wo die Dicke der Silberlamelle mindestens 50×10^{-7} cm beträgt.

9) *Gauss*, Principia generalia theoriae figurae fluidorum, art. 30.

Die Bedingungen für das Zusammentreffen von vier Flüssigkeiten in einem Punkte sind nunmehr ohne weiteres ersichtlich. Die Möglichkeit der Bildung einer neuen Trennungsfläche an einer Linie, längs der mehr als drei Flüssigkeiten zusammentreffen, erörterte *Gibbs*[10]).

5. Kapillardruck. Oberflächenspannung. Wollen wir den Begriff des Drucks in einer Flüssigkeit auch bei Erscheinungen der Kapillarität verwenden, so wird die Vorstellung notwendig, dass dieser Druck an einer Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten im Allgemeinen sich diskontinuierlich ändert. Die Diskontinuitäten sind mit den Schwerpunkts- und Flächensätzen der Mechanik in Übereinstimmung zu bringen. Will man die Diskontinuitäten weiter begründen, ohne jedoch Hypothesen über Molekularkräfte einzuführen, so kann man von dem Ansatze ausgehen, dass in einer Flüssigkeit an jeder Stelle eine räumliche Energiedichte besteht, welche von der Massendichte daselbst und auch noch von den örtlichen Differentialquotienten der Massendichte abhängt. Man hat sodann einen Grenzübergang in der Weise zu vollziehen, dass die Differentialquotienten der Massendichte im Allgemeinen gleich Null gesetzt werden und nur an gewissen Flächen derart unendlich werden, dass dort die Massendichte einen konstanten Sprung erfährt. Der Begriff des Druckes entsteht dabei als der negativ genommene Differentialquotient der Energie einer Masse nach ihrem Volumen (Gl. (42) in Nr. **18**).

Der Kürze wegen begnügen wir uns hier mit folgenden mehr axiomatischen Festsetzungen: Innerhalb einer einzelnen Flüssigkeit A variiert der Druck stetig mit der Dichte, ist aber nur bis auf eine additive Konstante zu bestimmen; bei gewisser Verfügung über diese Konstante wollen wir von ihm als *kinetischem Druck* sprechen. Nun seien zwei verschiedene, der Schwere unterworfene Flüssigkeiten A und B durch eine horizontale Ebene $z = 0$ getrennt und eine jede derart beschaffen, dass in ihr Dichte und Temperatur überall nur von der Vertikalhöhe z abhängen. Alsdann erleidet der kinetische Druck beim Übergang von A nach B eine Diskontinuität, die wir als *Kohäsionssprung* bezeichnen wollen. Die bezügliche Abnahme des kinetischen Drucks von A nach B können wir in die Form $K_A - K_B$ setzen, so dass K_A nur von A, K_B nur von B abhängt.

Die Differenz $P_A - K_A = p_A$ soll dann der *hydrodynamische Druck* in A heissen; dieser Druck würde nun *an horizontalen Trennungsflächen keinerlei Diskontinuität* erfahren. In einer ruhenden Flüssigkeit A, in welcher die Dichte nahezu als konstant anzusehen

10) *Gibbs*, Equilibrium of heterogeneous substances, p. 453.