

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0336

LOG Titel: 5. Kapillardruck. Oberflächenspannung

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Bedingungen für das Zusammentreffen von vier Flüssigkeiten in einem Punkte sind nunmehr ohne weiteres ersichtlich. Die Möglichkeit der Bildung einer neuen Trennungsfläche an einer Linie, längs der mehr als drei Flüssigkeiten zusammentreffen, erörterte Gibbs¹⁰⁾.

5. Kapillardruck. Oberflächenspannung. Wollen wir den Begriff des Drucks in einer Flüssigkeit auch bei Erscheinungen der Kapillarität verwenden, so wird die Vorstellung notwendig, dass dieser Druck an einer Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten im Allgemeinen sich diskontinuierlich ändert. Die Diskontinuitäten sind mit den Schwerpunkts- und Flächensätzen der Mechanik in Übereinstimmung zu bringen. Will man die Diskontinuitäten weiter begründen, ohne jedoch Hypothesen über Molekularkräfte einzuführen, so kann man von dem Ansatz ausgehen, dass in einer Flüssigkeit an jeder Stelle eine räumliche Energiedichte besteht, welche von der Massendichte daselbst und auch noch von den örtlichen Differentialquotienten der Massendichte abhängt. Man hat sodann einen Grenzübergang in der Weise zu vollziehen, dass die Differentialquotienten der Massendichte im Allgemeinen gleich Null gesetzt werden und nur an gewissen Flächen derart unendlich werden, dass dort die Massendichte einen konstanten Sprung erfährt. Der Begriff des Druckes entsteht dabei als der negativ genommene Differentialquotient der Energie einer Masse nach ihrem Volumen (Gl. (42) in Nr. 18).

Der Kürze wegen begnügen wir uns hier mit folgenden mehr axiomatischen Festsetzungen: Innerhalb einer einzelnen Flüssigkeit A variiert der Druck stetig mit der Dichte, ist aber nur bis auf eine additive Konstante zu bestimmen; bei gewisser Verfügung über diese Konstante wollen wir von ihm als *kinetischem Druck* sprechen. Nun seien zwei verschiedene, der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten A und B durch eine horizontale Ebene $z = 0$ getrennt und eine jede derart beschaffen, dass in ihr Dichte und Temperatur überall nur von der Vertikalhöhe z abhängen. Alsdann erleidet der kinetische Druck beim Übergang von A nach B eine Diskontinuität, die wir als *Kohäsionssprung* bezeichnen wollen. Die bezügliche Abnahme des kinetischen Drucks von A nach B können wir in die Form $K_A - K_B$ setzen, so dass K_A nur von A , K_B nur von B abhängt.

Die Differenz $P_A - K_A = p_A$ soll dann der *hydrodynamische Druck* in A heißen; dieser Druck würde nun an *horizontalen Trennungsflächen keinerlei Diskontinuität* erfahren. In einer ruhenden Flüssigkeit A , in welcher die Dichte nahezu als konstant anzusehen

10) Gibbs, Equilibrium of heterogeneous substances, p. 453.

ist, variiert der Druck p_A derart, dass er abhängig von der Vertikalhöhe z allgemein den Ausdruck $p_0 - \rho_A g z$ hat, wo p_0 eine Konstante ist.

Nun mögen zwei ruhende Flüssigkeiten A und B von verschiedener Dichte eine beliebige, der Differentialgleichung (6) entsprechende Trennungsfläche F_{AB} haben; wir bestimmen die Niveauebene dazu, wählen sie als Ebene $z = 0$ und denken uns andererseits in einem sehr weiten Gefässe ebenfalls A und B und beide durch eine horizontale Ebene und zwar genau in Höhe jener Niveauebene getrennt, und verbinden endlich die A beiderseits und die B beiderseits je durch eine kommunizierende Röhre (Fig. 6), so wird das Gleichgewicht nach der Gleichung (6a) bestehen bleiben. Ist nun p_0 der in jener horizontalen Trennungsfläche in A und B gleiche hydrostatische Druck, so ist dieser Druck in A in einer Höhe z gleich $p_A = p_0 - \rho_A g z$ und in B in einer Höhe z gleich $p_B = p_0 - \rho_B g z$. An einer beliebigen Stelle der Trennungsfläche F_{AB} findet daher gemäss (6a) eine Druckdiskontinuität

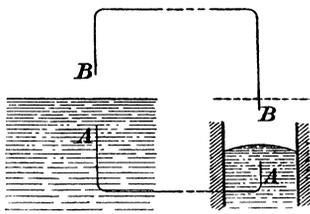


Fig. 6.

$$(10) \quad p_A - p_B = -g(\rho_A - \rho_B)z = T_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

statt. Diese Differenz heisst der *Kapillardruck* an der Stelle in A .

Stellt B den gesättigten Dampf der Flüssigkeit A vor, so ist p_0 der Sättigungsdruck über einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche, und würde dagegen p_B den Druck des im Gleichgewicht mit der Flüssigkeit befindlichen Dampfes über einer solchen Stelle der Flüssigkeit, welche nach dem Dampfe hin die mittlere Krümmung $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ zeigt, angeben; danach überwiegt der letztere Sättigungsdruck p_B um

$$\frac{\rho_B}{\rho_A - \rho_B} T_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

den Druck p_0^{11}). Es folgt daraus z. B. ein vermehrtes Verdampfungsbestreben kleinster Wassertropfchen in der Luft, weil mit dem Gleich-

11) *W. Thomson*, Edinburgh Proc. Roy. Soc. 7 (1870), p. 63. — In einer Kapillarröhre vom Radius 0,00012 cm, in welcher Wasser 1300 cm steigt, würde der Gleichgewichtsdruck des Wasserdampfes um etwa $\frac{1}{1000}$ kleiner als der Wert dafür über der Niveauebene sein. Mit den durch die Relation (10) gegebenen Umständen hängt auch der Siedeverzug luftfreier Flüssigkeiten, ferner die Schwierigkeit der Bildung der ersten Bläschen bei der Elektrolyse zusammen.

gewichtsdruck des Dampfes über einer ebenen Wasseroberfläche noch nicht der Gleichgewichtsdruck über den Oberflächen der Tröpfchen erreicht ist.

Ist in dieser Weise einmal die Druckdiskontinuität des Kapillardrucks eingeführt, so würde das Bestehen der Trennungsflächenenergie nach dem Ausdrücke (3) ihrer Ableitung vollständig mit der weiteren Annahme zu erschöpfen sein, dass ausserdem an jedem Randelement der Trennungsfläche in ihr, normal gegen den Rand nach innen gerichtet, eine konstante Zugspannung $= T_{AB}$, auf die Längeneinheit der Randlinie berechnet, herrscht.

Indem nun die Formel (3) sich auch auf jeden beliebigen Ausschnitt aus der Trennungsfläche anwenden lässt, würden die Kapillardrucke längs der Fläche und diese Zugspannungen an ihrem Rande für die virtuelle Arbeit gleichbedeutend mit der Annahme sein, dass *überall innerhalb der Trennungsfläche eine konstante Spannung $= T_{AB}$ herrscht*. Aber sprechen wir in solcher Allgemeinheit von einer Spannung innerhalb der ganzen Fläche, so heisst dieses im Grunde nichts anderes als: Es besteht für die Trennungsfläche eine potentielle Energie $= T_{AB} F_{AB}$, wovon wir eben ausgegangen sind.

Auf diese Analogie einer Flüssigkeitsoberfläche mit einer elastischen Haut gründete *Thomas Young*¹²⁾ eine vollständige Theorie der Kapillarphänomene, die allerdings durch Vermeidung mathematischer Symbole an Durchsichtigkeit einbüsste. Den Begriff der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit hat *Segner*¹³⁾ eingeführt.

6. Formen freier Oberflächen. Tropfen. Die Differentialgleichung einer freien Oberfläche kommt in Versuchen namentlich unter zweierlei speziellen Umständen in Betracht; nämlich es handelt sich meist entweder um Rotationsflächen um eine vertikale Axe oder aber um Zylinderflächen mit horizontalen Erzeugenden, wobei letztere Flächen auch noch als eine Approximation der ersteren bei grossem Querschnitt dienen.

Im Falle einer *Rotationsfläche um die z-Axe* sei für die Meridiankurve r der Abstand von der Axe, φ der Neigungswinkel der Tangente gegen die horizontale r -Axe (Fig. 7), also $\operatorname{tg} \varphi = dz/dr$, so ist die

12) *Th. Young*, Essay on the cohesion of fluids, Phil. Trans. Roy. Soc. London 1805. — Für die Würdigung der Leistung von *Young* vgl. Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. 30 (1890), p. 285, 456 = Scientific papers 3, p. 397.

13) *Segner*, Comment. soc. reg. Gotting. 1 (1751), p. 301. — *Plateau* (Statique des liquides, chap. V) gibt eine bis 1869 geführte historische Übersicht über die Arbeiten zur Theorie der Oberflächenspannung. Mannigfache Belege zu dieser Theorie hat namentlich *Van der Mensbrughe* beigebracht.