

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0337

LOG Titel: 6. Formen freier Oberflächen. Tropfen

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

gewichtsdruck des Dampfes über einer ebenen Wasseroberfläche noch nicht der Gleichgewichtsdruck über den Oberflächen der Tröpfchen erreicht ist.

Ist in dieser Weise einmal die Druckdiskontinuität des Kapillardrucks eingeführt, so würde das Bestehen der Trennungsflächenenergie nach dem Ausdrücke (3) ihrer Ableitung vollständig mit der weiteren Annahme zu erschöpfen sein, dass ausserdem an jedem Randelement der Trennungsfläche in ihr, normal gegen den Rand nach innen gerichtet, eine konstante Zugspannung $= T_{AB}$, auf die Längeneinheit der Randlinie berechnet, herrscht.

Indem nun die Formel (3) sich auch auf jeden beliebigen Ausschnitt aus der Trennungsfläche anwenden lässt, würden die Kapillardrucke längs der Fläche und diese Zugspannungen an ihrem Rande für die virtuelle Arbeit gleichbedeutend mit der Annahme sein, dass *überall innerhalb der Trennungsfläche eine konstante Spannung $= T_{AB}$ herrscht*. Aber sprechen wir in solcher Allgemeinheit von einer Spannung innerhalb der ganzen Fläche, so heisst dieses im Grunde nichts anderes als: Es besteht für die Trennungsfläche eine potentielle Energie $= T_{AB} F_{AB}$, wovon wir eben ausgegangen sind.

Auf diese Analogie einer Flüssigkeitsoberfläche mit einer elastischen Haut gründete *Thomas Young*¹²⁾ eine vollständige Theorie der Kapillarphänomene, die allerdings durch Vermeidung mathematischer Symbole an Durchsichtigkeit einbüsste. Den Begriff der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit hat *Segner*¹³⁾ eingeführt.

6. Formen freier Oberflächen. Tropfen. Die Differentialgleichung einer freien Oberfläche kommt in Versuchen namentlich unter zweierlei speziellen Umständen in Betracht; nämlich es handelt sich meist entweder um Rotationsflächen um eine vertikale Axe oder aber um Zylinderflächen mit horizontalen Erzeugenden, wobei letztere Flächen auch noch als eine Approximation der ersteren bei grossem Querschnitt dienen.

Im Falle einer *Rotationsfläche um die z-Axe* sei für die Meridiankurve r der Abstand von der Axe, φ der Neigungswinkel der Tangente gegen die horizontale r -Axe (Fig. 7), also $\operatorname{tg} \varphi = dz/dr$, so ist die

12) *Th. Young*, Essay on the cohesion of fluids, Phil. Trans. Roy. Soc. London 1805. — Für die Würdigung der Leistung von *Young* vgl. Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. 30 (1890), p. 285, 456 = Scientific papers 3, p. 397.

13) *Segner*, Comment. soc. reg. Gotting. 1 (1751), p. 301. — *Plateau* (Statique des liquides, chap. V) gibt eine bis 1869 geführte historische Übersicht über die Arbeiten zur Theorie der Oberflächenspannung. Mannigfache Belege zu dieser Theorie hat namentlich *Van der Mensbrughe* beigebracht.

Krümmung der Kurve $-\frac{1}{R_1} = -\frac{d\varphi}{(\cos\varphi)^{-1}dr}$ und die reziproke Länge der Normale $-\frac{1}{R_2} = \frac{\sin\varphi}{r}$, die Gleichung (6) geht also in

$$(11) \quad T_{AB} \frac{d(r \sin \varphi)}{r dr} = \lambda_{AB} + g(\varrho_A - \varrho_B)z$$

über.

Zumeist handelt es sich um eine solche partikuläre Lösung dieser Gleichung, welche die Axe trifft und sie dann notwendig senkrecht durchsetzt, damit die Fläche sich an der Stelle regulär verhält. Diese Lösung hängt nur noch von einer Konstante ab, da $dz/dr = 0$ für $r = 0$ gefordert wird. Verlegt man den Koordinatenanfang in jenen Treffpunkt mit der Kurve, so bedeutet $2T_{AB}/\lambda_{AB}$ den Krümmungsradius daselbst und bei Wahl dieser Grösse als Längeneinheit hängt die Form der Kurve nur noch von *einem* Parameter ab, der die Relation zwischen dem vorgeschriebenen Werte des Randwinkels von *A* am Ende der Meridiankurve und dem Volumen von *A* vermitteln muss.

*Laplace*¹⁴⁾ und in der Folge *Lord Kelvin*¹⁵⁾ haben die Meridiankurve der kapillaren Rotationsfläche aus kleinen Kreisbögen mit stetig sich aneinanderreihenden Tangenten unter Berechnung der Krümmung am Anfange jedes Bogens gemäss der Gleichung (11) angenähert aufgebaut. *C. V. Boys*¹⁶⁾ hat diese Methode besonders handlich gemacht, indem er die Kreisbögen durch eine feste Marke an einem (durchsichtig hergestellten) Lineal beschreibt, auf dem das Drehungszentrum sukzessive verändert wird, wodurch die Stetigkeit in den Tangenten der sukzessiven Kreisbögen gesichert wird. Zudem sind die Teilstriche des Lineals durch ihre reziproken Entfernungen von der festen Marke bezeichnet, an der selbst dann ∞ steht. *Bashforth*¹⁷⁾ lieferte ausgedehntes Tabellenmaterial zu jener partikulären Lösung von (11). *C. Runge*¹⁸⁾ nahm die Gleichung als Beispiel bei Darlegung einer numerischen Integrationsmethode für die Differentialgleichungen zweiter

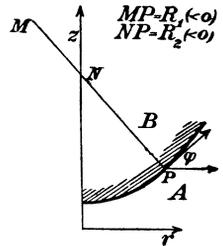


Fig. 7.

14) *Laplace*, *Connaissance des Temps*, 1812.

15) *W. Thomson*, *Capillary attraction*, *Proc. Roy. Inst.* 11 (1886), aufgen. in *Popular lectures and addresses* 1, London 1889. Der Aufsatz enthält verschiedene Diagramme zur Illustrierung des Verfahrens. — *J. C. Schalkwijk*, *Leiden Communic.* No. 67 (1901).

16) *C. V. Boys*, *Phil. Mag.* (5) 36 (1893), p. 75.

17) *Bashforth* and *Adams*, *An attempt to test the theories of capillary action*, Cambridge 1883.

18) *C. Runge*, *Math. Ann.* 46 (1895), p. 167.

Ordnung. Eine im Bereiche $0 \leq \varphi < \pi/2$ konvergente Entwicklung von z nach Potenzen von r für die Lösung von (11) behandelten *K. Lasswitz*¹⁹⁾, *Th. Lohnstein*²⁰⁾. Allerhand Annäherungsformeln, bez. des Krümmungsradius für $r=0$, des Maximalwertes von r u. s. w. findet man bei *Poisson*²¹⁾, *Fr. Neumann*²²⁾, *A. König*²³⁾, *H. Siedentopf*²⁴⁾.

Die Formen eines Quecksilbertropfens auf einer horizontalen Unterlage, einer gegen eine Horizontalebene stossenden Luftblase, eines an einer Horizontalebene hängenden Wassertropfens sind Rotationsflächen, bestimmt durch die Differentialgleichung (11), durch die Forderung, die Axe zu treffen, durch den Randwinkel am Endpunkt der Meridiankurve und durch das vorliegende Volumen.

Hängt die Lösung der Gleichung (6) von y nicht ab, ist sie also eine *Zylinderfläche mit horizontalen Erzeugenden parallel der y-Axe*, so wird die Gleichung ihres vertikalen Querschnitts mit der xz -Ebene, wenn φ den Winkel der Tangente gegen die x -Axe, ds das Bogenelement bedeutet:

$$(12) \quad T_{AB} \frac{d \sin \varphi}{dx} = T_{AB} \frac{d \varphi}{ds} = \lambda_{AB} + g(\varrho_A - \varrho_B)z.$$

Es ist das die Gleichung der Gleichgewichtsform, die ein elastischer gleichförmiger unendlich dünner und ohne äussere Kräfte geradliniger Stab annimmt, wenn an den Enden zwei in die Richtung der positiven und negativen x -Axe fallende entgegengesetzt gleiche Kräfte und dazu die geeigneten Kräftepaare angreifen²⁵⁾. Die Differentiation von (12) nach s ergibt

$$T_{AB} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = g(\varrho_A - \varrho_B) \sin \varphi,$$

und ist danach, $\varrho_A > \varrho_B$ angenommen, die Abhängigkeit des Winkels $\pi - \varphi$ von s dieselbe wie des Ausschlags eines gewöhnlichen mathematischen Pendels mit der Länge $\frac{T_{AB}}{\varrho_A - \varrho_B}$ von der Zeit. Wird $z=0$ nach der Niveaubene gelegt, also $\lambda_{AB} = 0$ angenommen, so erhält man aus (12) durch Multiplikation mit $\operatorname{tg} \varphi dx = dz$ und Integration, entsprechend dem Integral der lebendigen Kraft in der Pendel-

19) *K. Lasswitz*, Inaug.-Diss. Breslau 1873.

20) *Th. Lohnstein*, Inaug.-Diss. Berlin 1891.

21) *Poisson*, Nouv. théor. de l'act. capill., Paris 1831.

22) *Fr. Neumann*, Vorl. über Capill. 1894.

23) *A. König*, Ann. Phys. Chem. 16 (1882), p. 10.

24) *H. Siedentopf*, Ann. Phys. Chem. 61 (1897), p. 235.

25) Vgl. z. B. *A. E. H. Love*, A treatise on the mathematical theory of elasticity 2 (Cambridge 1893), Arts. 227—229.

bewegung:

$$(13) \quad T_{AB}(c - \cos \varphi) = g(\varrho_A - \varrho_B) \frac{z^2}{2}.$$

Darin ist die Integrationskonstante $c = 1$, wenn die Fläche sich asymptotisch an die Niveaubene heranzieht, und $c > 1$, wenn sie sonst eine horizontale Tangente hat; andererseits ist, wenn die Fläche einen Wendepunkt ($\frac{d\varphi}{ds} = 0$) besitzt, notwendig $c < 1$.

Die Form eines an einer Horizontalebene hängenden zylindrischen Tropfens, wie er durch Austreten einer Flüssigkeit aus einem langen Spalt entstehen könnte, hat *Fr. Neumann*²⁶⁾ behandelt. Um über die Stabilität der Form zu entscheiden, haben wir das *Jacobische Kriterium* für ein Extremum in einem Variationsproblem heranzuholen. Benutzt A die Ebene und wird der Einfachheit halber $2T_{AB} : g(\varrho_A - \varrho_B)$ als Flächeneinheit eingeführt, so kommt hier das Variationsproblem darauf hinaus, in einem Intervalle $-x_0 \leq x \leq x_0$, dessen Länge $2x_0$ ebenfalls noch gesucht wird, eine an den Enden verschwindende stetige Funktion $z(x)$ derart zu bestimmen, dass

$$\int_{-x_0}^{x_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} - 1 - z^2 \right) dx$$

zu einem *Minimum* wird, während $\int_{-x_0}^{x_0} z dx = J$ gegeben ist. In einer

gewissen Tiefe $\frac{1}{2}z_0$ unter der Horizontalebene zeigt das tellerförmige Profil des Tropfens durch einen Wendepunkt die Niveaubene an und verläuft sodann gemäss (13) bis zum tiefsten Punkte als spiegelbildliche Fortsetzung am Wendepunkt, so dass z_0 die ganze Tiefe des Tropfens wird. Ist 2θ die Neigung der Wendetangente gegen die Horizontale und $\kappa = \sin \theta$, so findet man auf Grund von (13):

$$z_0 = 2\sqrt{2}\kappa, \quad x_0 = \sqrt{2}(2E - K), \quad J = x_0 z_0,$$

wo K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul κ sind. Der Ausdruck $J = x_0 z_0$ hat ein Maximum ungefähr bei $\theta = 35^\circ 32'$ mit $J = 2,606$. Nur wenn das Volumen des Tropfens auf die Längeneinheit des Spalts, J , unterhalb dieser Grösse liegt, gibt es überhaupt Tropfenformen, welche den Gleichungen des Problems entsprechen, und zwar dann eine breitere und weniger tiefe Form, wobei $\theta < 35^\circ 32'$ ist, und eine schmalere tiefer herunterhängende, für welche diese stärkste Neigung gegen die Horizontale $> 35^\circ 32'$ ist. Nur die erstere Form ist stabil.

26) *Fr. Neumann*, Vorl. über Capill., p. 117.

Dass für rotationsförmige hängende Tropfen die Verhältnisse analog liegen dürften, geht aus einem Experiment von Lord *Kelvin*²⁷⁾ hervor, wonach eine um einen horizontalen Metallring gespannte dünne Kautschukhaut, die durch Hinaufgiessen von Wasser in eine tropfenähnliche Form gedehnt wird, in einem gewissen Stadium der Füllung ruckweise eine Lage instabilen Gleichgewichts passiert.

Nach dem Abreißen eines Tropfens zieht sich der ausgezogene zurückschnellende Hals in einen oder mehrere kleinere Tropfen zusammen. Der Vorgang wird der Beobachtung zugänglicher, wenn die Tropfenbildung in einer nur wenig leichteren Flüssigkeit erfolgt, ist jedoch einer mathematischen Behandlung noch nicht unterzogen²⁸⁾.

7. Steighöhen. Die in einem Gefässe *C* senkrecht unterhalb der Trennungsfläche F_{AB} , von der Niveaubene $z = z_{AB}$ an gerechnet, stehende Masse von *A* überwiegt die dadurch verdrängte Masse von *B* um

$$(14) \quad g(\rho_A - \rho_B) \int_{F_{AB}} (z - z_{AB}) \cos(nz) df = - T_{AB} \int_{F_{AB}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cos(nz) df \\ = - T_{AB} \int \cos(j_{AB}z) ds,$$

wo letzteres Integral sich über den Rand von F_{AB} erstreckt. Die erste Umformung folgt aus (6), die zweite durch Anwendung der Formel (3) auf eine Parallelverschiebung der Fläche in der *z*-Richtung, wobei ihr Flächeninhalt sich nicht ändert. Steht die Gefässwand am Rande von F_{AB} überall vertikal, so ist hier $(j_{AB}z) = \pi - \omega_A$, unter ω_A den Randwinkel von *A* verstanden, und wird daher der letzte Ausdruck in (14) $= T_{AB} \cos \omega_A U$, wo *U* den Umfang der Randkurve bedeutet, insbesondere demnach positiv, Null oder negativ, je nachdem der Winkel ω_A spitz, ein rechter oder stumpf ist.

Stellt *C* eine vertikale Kapillarröhre mit kreisförmigem Querschnitte vom Radius *R* vor, so tritt in der Röhre ein Aufsteigen

27) *W. Thomson*, Popular lectures and addresses 1, London 1889, p. 38. — Daraus sind die Tropfenformen in Fig. 8 oben entnommen.

28) *G. Hagen*, Ann. Phys. Chem. 67 (1846), p. 1, 152; 77 (1849), p. 449. — *C. V. Boys*, Seifenblasen. Vorl. über Capill. Deutsche Übers. von G. Meyer, Leipzig 1893, p. 33, 65. — Die Beziehungen zwischen dem Durchmesser einer Röhre und dem Gewicht daraus abfallender Tropfen behandeln Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. 48 (1899), p. 321 (Sc. papers 4, p. 415), *Th. Lohnstein*, Ann. Phys. Chem. 20 (1906), p. 237, p. 606. — *A. M. Worthington* and *R. S. Cole*, Impact with a liquid surface, London Phil. Trans. 189 (1897), p. 137.