

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0338

**LOG Titel:** 7. Steighöhen

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Dass für rotationsförmige hängende Tropfen die Verhältnisse analog liegen dürften, geht aus einem Experiment von Lord *Kelvin*<sup>27)</sup> hervor, wonach eine um einen horizontalen Metallring gespannte dünne Kautschukhaut, die durch Hinaufgiessen von Wasser in eine tropfenähnliche Form gedehnt wird, in einem gewissen Stadium der Füllung ruckweise eine Lage instabilen Gleichgewichts passiert.

Nach dem Abreißen eines Tropfens zieht sich der ausgezogene zurückschnellende Hals in einen oder mehrere kleinere Tropfen zusammen. Der Vorgang wird der Beobachtung zugänglicher, wenn die Tropfenbildung in einer nur wenig leichteren Flüssigkeit erfolgt, ist jedoch einer mathematischen Behandlung noch nicht unterzogen<sup>28)</sup>.

**7. Steighöhen.** Die in einem Gefässe *C* senkrecht unterhalb der Trennungsfläche  $F_{AB}$ , von der Niveaubene  $z = z_{AB}$  an gerechnet, stehende Masse von *A* überwiegt die dadurch verdrängte Masse von *B* um

$$(14) \quad g(\rho_A - \rho_B) \int_{F_{AB}} (z - z_{AB}) \cos(nz) df = - T_{AB} \int_{F_{AB}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cos(nz) df \\ = - T_{AB} \int \cos(j_{AB}z) ds,$$

wo letzteres Integral sich über den Rand von  $F_{AB}$  erstreckt. Die erste Umformung folgt aus (6), die zweite durch Anwendung der Formel (3) auf eine Parallelverschiebung der Fläche in der *z*-Richtung, wobei ihr Flächeninhalt sich nicht ändert. Steht die Gefässwand am Rande von  $F_{AB}$  überall vertikal, so ist hier  $(j_{AB}z) = \pi - \omega_A$ , unter  $\omega_A$  den Randwinkel von *A* verstanden, und wird daher der letzte Ausdruck in (14)  $= T_{AB} \cos \omega_A U$ , wo *U* den Umfang der Randkurve bedeutet, insbesondere demnach positiv, Null oder negativ, je nachdem der Winkel  $\omega_A$  spitz, ein rechter oder stumpf ist.

Stellt *C* eine vertikale Kapillarröhre mit kreisförmigem Querschnitte vom Radius *R* vor, so tritt in der Röhre ein Aufsteigen

27) *W. Thomson*, Popular lectures and addresses 1, London 1889, p. 38. — Daraus sind die Tropfenformen in Fig. 8 oben entnommen.

28) *G. Hagen*, Ann. Phys. Chem. 67 (1846), p. 1, 152; 77 (1849), p. 449. — *C. V. Boys*, Seifenblasen. Vorl. über Capill. Deutsche Übers. von G. Meyer, Leipzig 1893, p. 33, 65. — Die Beziehungen zwischen dem Durchmesser einer Röhre und dem Gewicht daraus abfallender Tropfen behandeln Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. 48 (1899), p. 321 (Sc. papers 4, p. 415), *Th. Lohnstein*, Ann. Phys. Chem. 20 (1906), p. 237, p. 606. — *A. M. Worthington* and *R. S. Cole*, Impact with a liquid surface, London Phil. Trans. 189 (1897), p. 137.

oder eine Depression von Flüssigkeit ein (wir denken uns hier  $\varrho_A > \varrho_B$  und  $B$  oberhalb  $A$  gelegen), je nachdem der Randwinkel von  $A$  spitz oder stumpf ist, im speziellen also ein Ansteigen, wenn  $A$  die Röhre benetzt. Die mittlere Steighöhe über der Querschnittsfläche der Röhre ist nach (14)

$$h_m = \frac{2 T_{AB} \cos \omega_A}{g(\varrho_A - \varrho_B) R} = 2 \frac{T_{BC} - T_{AC}}{g(\varrho_A - \varrho_B) R},$$

also *umgekehrt proportional dem Radius der Röhre*<sup>29)</sup>. Der Meniskus lässt sich in erster Annäherung als eine Kugelfläche ansehen. Approximiert man ihn genauer als ein Rotationsellipsoid um die Röhrenaxe<sup>30)</sup>, welches mit ihm im Randwinkel, in dem Krümmungsradius auf der Axe und im angehobenen Gewicht übereinstimmt, so folgt z. B., wenn  $A$  die Röhre benetzt, als Steighöhe auf der Axe

$$h = \frac{h_m}{1 + \frac{1}{3} \frac{R}{h_m}}.$$

Werden in einer Kapillarröhre mehrere die Wand nicht benetzende Flüssigkeiten  $A, B, B, B, \dots$  übereinander geschichtet, so ist das gesamte angehobene Gewicht das nämliche, als wenn sich über  $A$  nur  $B$  befände. Ein Einwand, den *Young* aus Beobachtungen gegen diese Schlussfolgerung und damit überhaupt gegen die Theorie von *Laplace* erheben zu müssen glaubte, wurde durch *Poisson*<sup>31)</sup> entkräftet.

Zwischen zwei parallelen vertikalen Platten ist zufolge (14) die mittlere Steighöhe halb so gross als in einer Kapillarröhre von einem

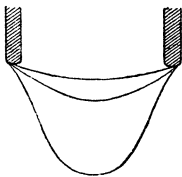


Fig. 8.

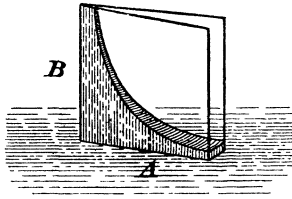


Fig. 9.

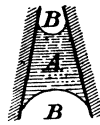


Fig. 10.

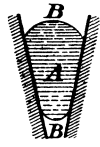


Fig. 11.

Durchmesser gleich dem Abstand der Platten. Stehen die zwei vertikalen Platten mit geringer Keilöffnung gegeneinander, so steigt

29) Die Proportionalität der Steighöhe in einer Kapillarröhre mit dem Reziproken des Durchmessers scheint zuerst von *Borelli* (*De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, Reggio 1670) ausgeführt zu sein; der Satz wird von manchen Autoren *Jurin* (*Phil. Trans.* 30 (1718)) zugeschrieben.

30) *Mathieu*, *Capillarité*, Paris 1883, p. 49.

31) *Poisson*, *Nouv. théor. de l'act. capill.*, p. 141.

die Flüssigkeit an ihnen zu einer gleichseitigen Hyperbel empor (Fig. 9). In einer konischen Röhre kann unter Umständen ein Tropfen im Gleichgewicht sein bei spitzem Randwinkel, wenn die Röhre sich nach oben verjüngt (Fig. 10), oder bei stumpfem Randwinkel, wenn sie sich nach unten verjüngt (Fig. 11).

**8. Kapillarauftrieb. Adhäsion.** Der Körper  $C$  sei nur mit den Flüssigkeiten  $A$  und  $B$  in Berührung. Um den von  $C$  zur Erhaltung des Gleichgewichts gegen  $A$  und  $B$  zu leistenden Gegendruck in der Komponente  $-P_w$  nach einer beliebigen Richtung  $w$  zu ermitteln, lassen wir  $C$  in dieser Richtung parallel mit sich verschiebbar sein. Wir nehmen sodann eine von einem Parameter  $w$  abhängende Schar von Verrückungen des Systems vor, wobei  $C$  in jener Richtung um die Längen  $w$  fortschreitet, die Partien  $F_{AC}$ ,  $F_{BC}$ , also auch ihre gemeinsame Randlinie unverändert mitgehen, alle Grenzflächen in denen  $A$  und  $B$  an andere Medien als  $C$  anstossen, festbleiben, endlich  $F_{AB}$  noch sich derart deformiert, dass die Volumina  $V_A$  und  $V_B$  ungeändert bleiben. Wir können alsdann für die gesamte ins Spiel kommende Energie  $E$ , einschliesslich des Terms  $wP_w$  für den Gegendruck  $-P_w$ , die Relation  $\frac{dE}{dw} = 0$  ansetzen. Nun sind die Flächeninhalte von  $F_{AC}$ ,  $F_{BC}$  unverändert, längs  $F_{AB}$  besteht die Differentialgleichung (6), zur Vereinfachung legen wir  $z = 0$  in die Niveauebene von  $A$ ,  $B$ , haben also  $\lambda_{AB} = 0$ . Im Hinblick auf (3) und (5) erhalten wir daher:

$$(15) \quad P_w - \int_{\mathfrak{F}_{AC}} g(\varrho_A - \varrho_C) z \cos(wn) df - \int_{\mathfrak{F}_{BC}} g(\varrho_B - \varrho_C) z \cos(wn) df \\ - T_{AB} \int \cos(wj_{AB}) ds = 0,$$

wo sich das erste Integral auf  $F_{AC}$ , das zweite auf  $F_{BC}$ , das dritte auf ihren gemeinsamen Rand bezieht und  $n$  die äussere Normale von  $C$  bezeichnet.

Der auf  $C$  ausgeübte vertikale Auftrieb berechnet sich hieraus, indem wir für  $w$  die  $z$ -Richtung nehmen. Hat die Trennungsfläche  $F_{AB}$  keine Begrenzung ausser ihrer Randlinie auf  $C$ , d. h. verläuft sie im Übrigen asymptotisch an die Niveauebene, so zeigt die bei (14) vorgenommene Transformation, dass der letzte Term in (15) alsdann  $= g(\varrho_A - \varrho_B) V_{AB}$  wird, unter  $V_{AB}$  das unterhalb  $F_{AB}$  bis zur Niveauebene reichende Volumen verstanden (soweit  $F_{AB}$  unterhalb der Niveauebene verläuft, ist das dazwischenliegende Volumen in  $V_{AB}$  negativ einzurechnen). Von diesem Volumen entfalle der Anteil  $V$  auf das Medium  $A$  (Fig. 12, daselbst steht  $\mathfrak{F}_{AB}$  anstatt  $F_{AB}$ ). Andererseits werde  $C$  durch Fortführung der Niveauebene in einen