

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0339

LOG Titel: 8. Kapillarauftrieb. Adhäsion

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

die Flüssigkeit an ihnen zu einer gleichseitigen Hyperbel empor (Fig. 9). In einer konischen Röhre kann unter Umständen ein Tropfen im Gleichgewicht sein bei spitzem Randwinkel, wenn die Röhre sich nach oben verjüngt (Fig. 10), oder bei stumpfem Randwinkel, wenn sie sich nach unten verjüngt (Fig. 11).

8. Kapillarauftrieb. Adhäsion. Der Körper C sei nur mit den Flüssigkeiten A und B in Berührung. Um den von C zur Erhaltung des Gleichgewichts gegen A und B zu leistenden Gegendruck in der Komponente $-P_w$ nach einer beliebigen Richtung w zu ermitteln, lassen wir C in dieser Richtung parallel mit sich verschiebbar sein. Wir nehmen sodann eine von einem Parameter w abhängende Schar von Verrückungen des Systems vor, wobei C in jener Richtung um die Längen w fortschreitet, die Partien F_{AC} , F_{BC} , also auch ihre gemeinsame Randlinie unverändert mitgehen, alle Grenzflächen in denen A und B an andere Medien als C anstossen, festbleiben, endlich F_{AB} noch sich derart deformiert, dass die Volumina V_A und V_B ungeändert bleiben. Wir können alsdann für die gesamte ins Spiel kommende Energie E , einschliesslich des Terms wP_w für den Gegendruck $-P_w$, die Relation $\frac{dE}{dw} = 0$ ansetzen. Nun sind die Flächeninhalte von F_{AC} , F_{BC} unverändert, längs F_{AB} besteht die Differentialgleichung (6), zur Vereinfachung legen wir $z = 0$ in die Niveauebene von A , B , haben also $\lambda_{AB} = 0$. Im Hinblick auf (3) und (5) erhalten wir daher:

$$(15) \quad P_w - \int_{F_{AC}} g(\rho_A - \rho_C) z \cos(wn) df - \int_{F_{BC}} g(\rho_B - \rho_C) z \cos(wn) df \\ - T_{AB} \int \cos(wj_{AB}) ds = 0,$$

wo sich das erste Integral auf F_{AC} , das zweite auf F_{BC} , das dritte auf ihren gemeinsamen Rand bezieht und n die äussere Normale von C bezeichnet.

Der auf C ausgeübte vertikale Auftrieb berechnet sich hieraus, indem wir für w die z -Richtung nehmen. Hat die Trennungsfläche F_{AB} keine Begrenzung ausser ihrer Randlinie auf C , d. h. verläuft sie im Übrigen asymptotisch an die Niveauebene, so zeigt die bei (14) vorgenommene Transformation, dass der letzte Term in (15) alsdann $= g(\rho_A - \rho_B) V_{AB}$ wird, unter V_{AB} das unterhalb F_{AB} bis zur Niveauebene reichende Volumen verstanden (soweit F_{AB} unterhalb der Niveauebene verläuft, ist das dazwischenliegende Volumen in V_{AB} negativ einzurechnen). Von diesem Volumen entfalle der Anteil V auf das Medium A (Fig. 12, daselbst steht \mathfrak{F}_{AB} anstatt F_{AB}). Andererseits werde C durch Fortführung der Niveauebene in einen

unteren Teil vom Volumen $V_C^{(A)}$ und einen oberen Teil vom Volumen $V_C^{(B)}$ zerlegt, so werden der zweite und dritte Term in (16) bez.

$$-g(\varrho_A - \varrho_C)(V_C^{(A)} + V_{AB} - V), \quad -g(\varrho_B - \varrho_C)(V_C^{(B)} - V_{AB} + V)$$

und folgt demnach

$$(16) \quad P_z = g(\varrho_A - \varrho_C)V_C^{(A)} + g(\varrho_B - \varrho_C)V_C^{(B)} - g(\varrho_A - \varrho_B)V.$$

Die ersten zwei Terme bilden den hydrostatischen Auftrieb, falls die Trennungsfäche in die Niveaubene fiele, der dritte Term, der *kapillare Auftrieb* (bezw. negative Abtrieb) ist entgegengesetzt gleich dem infolge der Kapillarität über die Niveaubene gehobenen Flüssigkeitsgewicht. Hier-nach kann bei *stumpferm* Randwinkel ω_A unter Umständen ein Körper auf einer Flüssigkeit von geringerem spezifischen Gewicht schwimmen.

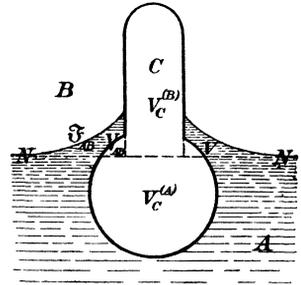


Fig. 12.

Wird eine kreisförmige Scheibe C auf eine weite horizontale Oberfläche von A in B gelegt (Fig. 5) und mit horizontal bleibender Basis, die stets ganz mit A in Berührung sei, kontinuierlich senkrecht gehoben, so entspricht die am Rande der Scheibe ansetzende freie Rotationsfläche wieder der Gleichung (11); die Meridiankurve verläuft asymptotisch an die Niveaubene, während der Randwinkel φ von A gegen die horizontale Basis der Scheibe kontinuierlich abnehmend zufolge der ersten Ungleichung (9) nur bis zu dem durch (8) bestimmten Werte ω_A heruntergehen kann, wobei dann die Flüssigkeit abreisst. Bei grossem Flächeninhalt S der Scheibe ergibt sich die maximale Höhe z_0 des Anhebens angenähert aus (13) für $c = 1$, $\varphi = \omega_A$ und zwar als unabhängig von S und folgt das dabei über die Niveaubene gehobene maximale Flüssigkeitsgewicht + dem Gewicht der Scheibe aus (16), indem dort $V_C^{(A)} = -z_0 S$ substituiert und $V = V_{AB}$ aus (14) mittelst $(j_{AB}z) = \frac{\pi}{2} + \omega_A$ berechnet wird.

Bei der Adhäsion zweier sehr nahe befindlicher gleicher horizontaler Platten, sie mögen etwa wieder kreisförmig vom Flächeninhalte S sein, vermöge einer zwischen ihnen befindlichen dünnen und sie *benetzenden* Flüssigkeitsschicht A vom Volumen V_A ist für die angenähert durch (12) bestimmte Meridiankurve die Höhe z , die wir von der oberen Fläche der Schicht rechnen, und damit auch $d\varphi/ds$ wenig veränderlich und daher die Kurve angenähert ein Halbkreis vom Durchmesser V_A/S (Fig. 13). Nach (12) befindet sich dann die Niveau-

ebene in einer Höhe $z = -z_0$, die umgekehrt proportional diesem Werte ist. Aus (15) entsteht wieder genau die Relation (16), wobei $V_C^{(A)} = -S z_0$, $V = 0$ einzusetzen ist, und folgt daraus der auf die obere Platte mitsamt ihrem Gewicht ausgeübte Zug nach unten, und zwar als proportional mit S^2/V_A . Bei kleinem V_A kann daher eine äusserst grosse Kraft zur Trennung der Platten nötig sein.

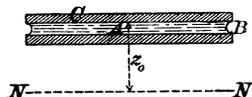


Fig. 13.

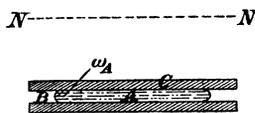


Fig. 14.

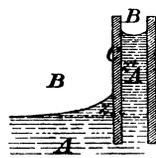


Fig. 15.

Sind dagegen die *Randwinkel* an den Platten *stumpf*, so liegt die Niveaubene über der Schicht, es richtet sich die Grösse der von A bedeckten Fläche der Platten nach dem Werte von V_A , und es ist ein entsprechender Druck auf die Platten nötig, um ihre Distanz zu verringern (Fig. 14).

Stellt C eine auf beiden Seiten gleich beschaffene vertikale, der yz -Ebene parallele Platte von einer sehr grossen Breite L vor, die in A und B eintaucht, wobei aber der Stand der Trennungsflächen F_{AB} beiderseits an C verschieden hoch sein kann (Fig. 15), so berechnet sich aus (15) die Summe der zwei Drucke P_x^- und P_x^+ in Richtung der x -Axe, welche die Platte links und rechts, auf der Seite der kleineren bzw. der grösseren x erfährt; die zwei Randintegrale heben sich auf, die Flächenintegrale bleiben nur für den einerseits von A , andererseits von B bedeckten Teil der Platte übrig. Steht A links bis zur Höhe z^- , rechts bis zur Höhe z^+ an der Platte, so resultiert als Gesamtdruck

$$P_x = g(\rho_A - \rho_B) \frac{(z^+)^2 - (z^-)^2}{2} L = T_{AB}(c^+ - c^-) L,$$

wenn für die Form der Fläche F_{AB} nach (13) links die Integrationskonstante c^- , rechts c^+ in Betracht kommt.

Tauchen jetzt zwei Platten C^- und C^+ von gleicher Breite L parallel zur yz -Ebene und sehr nahe zueinander ein und kommt für den Meniskus in der xz -Ebene zwischen ihnen die Integrationskonstante c in Betracht, während jenseits von ihnen die Flächen F_{AB} asymptotisch an die Niveaubene verlaufen mögen, also hier die betreffende Konstante den Wert 1 hat, so werden die Platten mit einer Kraft $T_{AB}(c - 1)L$ gegeneinander getrieben. Bildet nun A an beiden Platten spitze oder an beiden Platten stumpfe Winkel, so zeigt der

Meniskus in der xz -Ebene zwischen den Platten notwendig eine Stelle mit horizontaler Tangente und ist daher nach (13): $c > 1$, es findet also eine scheinbare Anziehung der Platten statt und zwar, da $c - 1$ nach (13) dem Quadrat der Steighöhe an jener Stelle proportional ist, annähert umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes der Platten. Bildet A an einer Platte spitze, an der anderen stumpfe Winkel, so entspricht einer gewissen Distanz der Platten ein labiles Gleichgewicht, das bei Annäherung der Platten (durch stärkere Krümmung des Meniskus) zu einer Anziehung, bei Entfernung zu einer Abstossung führt³²⁾.

9. Ausschaltung der Schwerkraft. Die Wirkung der Schwere auf die Gestalt der Trennungsfläche von A gegen B erscheint nach (6) ausgeschaltet, wenn $\varrho_A = \varrho_B$ ist, die beiden Flüssigkeiten also gleiche Dichte haben. Dieser Umstand, an den schon *Segner*¹³⁾ gedacht hat, wurde von *Plateau*³³⁾ vielfältig benutzt, um reine Kapillarkwirkungen zu studieren.

Ein Öltropfen, in eine gleich schwere Mischung von Wasser und Alkohol gebracht, nimmt nach (6) im Gleichgewicht die Figur einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung an. Schwebt der Tropfen vollkommen frei, so zeigt er daher notwendig Kugelgestalt, denn die Kugel ist die einzige geschlossene singularitätenfreie Fläche von konstanter mittlerer Krümmung³⁴⁾. Ist die Oberfläche des Tropfens nicht allseitig geschlossen, sondern lehnt sie sich teilweise an eingetauchte Rotationskörper an, so mag sie sich als eine Rotationsfläche um die bezügliche Axe bilden. Sind nun auf einer beliebigen Normale der Meridiankurve dieser Fläche nacheinander (Fig. 16) P der Punkt der Kurve, M das Krümmungszentrum, N der Treffpunkt mit der Axe, also PM , PN die zwei Hauptkrümmungsradien der Rotationsfläche und ist endlich Q derart gelegen, dass $PNQM$ vier harmonische Punkte sind, also

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{2}{PQ}$$

ist, so muss nach (6) oder (11) die Länge PQ konstant ausfallen;

32) *Laplace*, Suppl. à la théor. de l'act. capill. (De l'attraction et de la répulsion apparente des petits corps qui nagent à la surface des fluides). — *Poisson*, Nouv. théor. de l'act. capill., chap. VI. — Allgemeinere Theoreme über Anziehung und Abstossung schwimmender Körper entwickelt *W. Voigt*, Kompendium der theor. Phys. 1, Leipzig 1895, p. 239.

33) *Plateau*, Mém. de l'Acad. de Belgique, 1843 bis 1868; Statique expérimentale et théorique des liquides (Gand 1873).

34) Vgl. *Liebmann*, Math. Ann. 53, p. 81.