

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0341

**LOG Titel:** 10. Flüssigkeitshäute

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

stabile Gleichgewichtsfigur, nämlich wirklich eine Fläche von kleinstem Flächeninhalt bei gegebener Grösse des zwischen den zwei Basiskreisflächen gehaltenen Volumens, nur so lange die Tangenten in den zwei Endpunkten der sie erzeugenden Meridiankurve ihren Schnittpunkt vor der Rotationsaxe finden<sup>36)</sup>, und die Zylinderfläche ist in demselben Sinne stabil, nur so lange die Höhe des Zylinders nicht den Umfang des Querschnittes erreicht<sup>37)</sup>.

Wird der freischwebende und eine Kugelgestalt bildende Öltropfen mit Hilfe einer in das Öl eingetauchten Scheibe in gleichförmige Rotation um eine Axe — etwa die  $z$ -Axe — gesetzt, so entsprechen wachsenden Werten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Rotation verschiedene Gestalten des Tropfens; er erscheint zuerst ellipsoidisch, vertieft sich oben und unten, endlich löst sich am Äquator ein Ring ab, der an der Rotation teilnimmt<sup>38)</sup>. Denkt man sich, was freilich dem Versuche nur unzureichend entspricht, es rotiere nur der Tropfen  $A$ , nicht die umgebende Flüssigkeit  $B$ , und behandelt die Bewegung von mitrotierenden Koordinatenaxen aus unter Einführung des Potentials der Zentrifugalkräfte —  $\frac{\omega^2}{2} \varrho_A \int_A r^2 dv$ , so erhält man (mit Bezeichnungen wie in (11)) als Gleichung für die Meridiankurve des rotierenden Tropfens:

$$T_{AB} \frac{d(r \sin \varphi)}{r dr} = \lambda_{AB} - \frac{\omega^2}{2} \varrho_A r^2 \quad \left( \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Hieraus bestimmt sich  $z$  als hyperelliptisches Integral in  $r$  vom Geschlecht 2 und kommt man je nach den Werten von  $\omega$  auf sphäroidische oder ringförmige Flächen<sup>39)</sup>. — Einen Vergleich der hier auftretenden Figuren mit den Gestalten gravitierender in stationärer Rotation befindlicher Flüssigkeitsmassen könnte man allenfalls zu Stande bringen, indem man von Fernkräften mit dem Ausdrücke —  $k \frac{e^{-cr}}{r}$  ( $c \geq 0$ ) als Potential für zwei Masseneinheiten in der Distanz  $r$  ausgeht, woraus einerseits Gravitation, andererseits Oberflächenspannung als die zwei Grenzfälle  $c = 0$  und  $c = \infty$  folgen.

**10. Flüssigkeitshäute.** Unter Umständen kann eine Flüssigkeit  $A$  in einem Medium  $B$  längere Zeit hindurch als eine dünne Haut mit zwei einander sehr nahen Trennungsflächen gegen  $B$  bestehen. Die

36) *L. Lindelöf* in *Moigno-Lindelöf*, Calcul des variations, Paris 1861, p. 209, 231. — *Poincaré*, Capillarité, p. 66.

37) *Plateau*, Statique des liquides 2, chap. IX. — *Poincaré*, Capillarité, p. 95.

38) *Plateau*, Mém. de l'acad. de Bruxelles 16 (1843).

39) *Beer*, Einl. in die math. Theorie der Elastizität u. Capillarität, Leipzig 1869.

Dauerhaftigkeit solcher Flüssigkeitshäute beruht nach *Plateau*<sup>40)</sup> auf einer vornehmlich nach den Grenzschichten hin hervortretenden gallertartigen Beschaffenheit (Oberflächenviskosität). Diese wieder erklärt sich durch eine andere Verteilung der stofflichen Bestandteile in den Oberflächenschichten als im Inneren der Haut, wodurch jene Schichten eher die Eigenschaften eines festen Körpers als einer Flüssigkeit haben<sup>41)</sup>. In Häuten von sehr geringer Dicke wird dann ein Fließen des Inneren zwischen den Oberflächenschichten ausserordentlich durch die innere Reibung der Flüssigkeit verzögert<sup>42)</sup> und dadurch eine Variation des gegenseitigen Abstandes der zwei Trennungsf lächen sehr erschwert. Sind  $F_{AB}^-$ ,  $F_{AB}^+$  die Flächeninhalte der zwei Seiten der Haut, so ist alsdann zum Gleichgewicht der Haut das Minimum der potentiellen Energie

$$T_{AB}(F_{AB}^- + F_{AB}^+) + g(\rho_A - \rho_B) \int_A z dv + g\rho_B \int_{A+B} z dv$$

ganz allein in Bezug auf solche virtuelle Verrückungen von  $A$  zu fordern, wobei die normalen Abstände der zwei Trennungsf lächen ungeändert bleiben; denn andere Verrückungen sind als unausführbar anzusehen. Diese Forderung kommt nun, wenn noch die Dicke der Haut als verschwindend zu betrachten ist, im Hinblick auf (3), (4), (5) einfach darauf hinaus, dass für die Haut  $2T_{AB}F_{AB}$  oder also  $F_{AB}$ , darunter die ganze Ausdehnung der Haut verstanden, ein Minimum sein soll. Wird z. B. ein Rahmen, irgendwie aufgebaut aus festen Drähten, beweglichen Fäden, als Stütze dienenden festen Oberflächen, in eine Seifenlösung getaucht, so spannt sich hiernach innerhalb der vorgeschriebenen festen und veränderlichen Grenzen die Seifenlösung in der Form einer *Minimalfläche* (Art. von *Lilienthal*, III D 5, p. 307) aus, und man trifft hier einen der seltenen Fälle an, dass ein rein mathematisches Gebiet aus einer verhältnismässig leichten Experimentierkunst die vielseitigste Anregung zu schöpfen vermocht hat.

Als Differentialgleichung für die Form der Haut erhält man

$$(17) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,$$

während für ihren Rand, soweit er nicht fest vorgeschrieben ist, die Bedingung resultiert, auf die dazu dargebotenen Flächen senkrecht

40) *Plateau*, Statique des liquides 2, chap. VII.

41) *Marangoni*, Nuovo Cimento (2) 5, 6 (1871/72); (3) 3 (1878). — Lord *Rayleigh*, Proc. Roy. Soc. 48 (1890), p. 127 (Sc. papers 3, p. 363).

42) Vgl. die bezüglichen Rechnungen bei *Gibbs*, Equilibrium of heterogeneous substances, p. 475.

aufzutreffen. Dabei können sich infolge der vorgeschriebenen Grenzbedingungen Kreuzungsstellen der Haut in ihrem Verlaufe als notwendig erweisen; in stabilem Gleichgewicht können aber niemals mehr als drei Lamellen längs einer Kurve und zwar dann immer nur unter gleichen Flächenwinkeln, also von  $120^\circ$ , zusammentreffen und höchstens vier, und zwar mit gleichen Raumwinkeln um einen Punkt herum ansetzen<sup>43</sup>). So bildet sich z. B. in dem Kantengerüst eines regulären Tetraeders eine Seifenhaut, bestehend aus sechs ebenen Lamellen, den sechs Dreiecken vom Schwerpunkt des Tetraeders aus nach den einzelnen Kanten, dagegen entsteht innerhalb des Kantengerüsts eines Würfels jedesmal eine Fläche, die nicht alle Symmetrien des Würfels übernimmt, sondern ein beliebiges Paar seiner Seitenflächen begünstigt (Fig. 18)<sup>44</sup>).

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der Minimalflächen, dass ihre Abbildung durch parallele Normalen auf eine Kugelfläche eine konforme mit Umlegung der Winkel ist. Soll nun die Begrenzung der Minimalfläche ein gegebener geschlossener Streckenzug sein oder allgemeiner, soll sie stückweise in vorgeschriebenen Geraden oder Ebenen verlaufen, so müssen die Geraden Asymptotenkurven auf der Fläche werden und die Ebenen Krümmungskurven aus ihr heraus schneiden, und jene sphärische Abbildung wird ein Kreisbogenpolygon von bekanntem Umriss. Die analytische Bestimmung der fraglichen Minimalfläche erfordert die konforme Abbildung dieses Polygons auf eine Halbebene, diese Abbildungsaufgabe hängt von einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Funktionen als Koeffizienten ab, und schliesslich soll man eine endliche Anzahl von Parametern, die in diese Gleichung eingehen, den Längen und Winkeln des gegebenen Rahmens entsprechend einrichten, worin transzendente Relationen liegen, deren Theorie erst in Spezialfällen zu befriedigendem Abschluss gebracht werden konnte<sup>45</sup>).

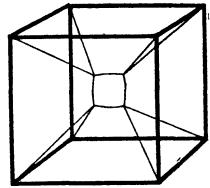


Fig. 18.

*Plateau*<sup>33</sup>) und in der Folge *H. A. Schwarz*<sup>45</sup>) haben eine Menge verschiedenartiger Minimalflächen (z. B. das Katenoid innerhalb zweier senkrecht übereinander gehaltenen Kreisringe, eine Schraubenfläche innerhalb eines Glaszylinders zwischen zwei Erzeugenden) durch

43) *Lamarle*, Mém. de l'acad. de Belg. 35, 36. — *Plateau*, Statique des liquides 1, chap. V.

44) *Plateau*, l. c. p. 318.

45) Vgl. *H. A. Schwarz*, Gesammelte math. Abh. 1, Berlin 1890.

Seifenlamellen realisiert und zugleich die Grenzen ihres extremalen Charakters sowie die Umlagerungen bei eintretender Instabilität theoretisch wie experimentell festgestellt. — Innerhalb eines Drahtes, der in den sechs Kanten eines geraden, regelmässigen, sechsseitigen Prismas und den sie abwechselnd in der einen und der anderen Grundfläche verbindenden Seiten ausgespannt ist, bildet sich, falls die Prismenkanten im Verhältnis zu den Basisseiten hinreichend lang sind, eine Lamelle aus, die auf der Mittellinie des Prismas einer der zwei Grundflächen wesentlich näher liegt und die durch ein leichtes Schütteln in das Gegenbild in Bezug auf die andere Grundfläche überspringt; diese auffallende Erscheinung soll aber ganz allein auf die stets vorhandenen geringen Unvollkommenheiten der Modelle zu schieben sein.

Für die Stabilität einer Flüssigkeitshaut in einem festen Rahmen ist die Bedingung die, dass keine unendlich nahe Minimalfläche durch irgend ein auf der Fläche liegendes geschlossenes Kurvensystem möglich ist<sup>46)</sup>. Für den Fall beweglicher Grenzen geben die allgemeinen Kriterien von *Hilbert*<sup>47)</sup> bezüglich des Vorhandenseins eines Extremums Aufschluss über die Stabilität.

Indem man geeignet verfährt, kann man innerhalb eines festen Rahmens auch Seifenlamellen einspannen, in denen vollständig geschlossene Flächen (Blasen) auftreten. (Zum Beispiel kann man innerhalb des Kantengerüsts eines Würfels eine Seifenhaut herstellen, welche aus einer innen schwebenden geschlossenen nach aussen gekrümmten Fläche mit den Symmetrien des Würfels und zwölf, deren Schneiden mit den entsprechenden Würfelkanten verbindenden trapezartigen, ebenen Lamellen besteht (Fig. 19)<sup>48)</sup>.) Dabei enthält jede geschlossene Blase  $B^{(i)}$  ein ganz bestimmtes Luftquantum bei irgend einem Volumen  $V^{(i)}$  und irgend einem Druck  $p^{(i)}$ , und ist demgemäss zur potentiellen Energie des gesamten Systems jedesmal noch der entsprechende Term  $-p^{(i)}V^{(i)}$  hinzuzufügen. Dadurch folgt dann für eine Seitenfläche der Blase, auf welche auf der anderen Seite ein Druck  $p^{(h)}$  herrscht, in Anbetracht der zwei Trennungsflächen der Lamellen anstatt (17) allgemeiner und im Einklang mit (10):

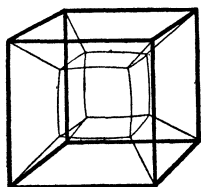


Fig. 19.

$$p^{(i)} - p^{(h)} = 2 T_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

46) *H. A. Schwarz*, Acta soc. scient. Fennicae 15 (1885), p. 315 (Ges. math. Abh. 1, p. 223).

47) *Hilbert*, Gött. Nachr. 1905, p. 159.

48) *Plateau*, l. c. p. 361.

wo die Krümmungsradien positiv bei nach aussen konvexer Krümmung zu rechnen sind; zur Festlegung der  $p^{(i)}$  dienen der Wert des äusseren Druckes sowie die Beträge der einzelnen eingeschlossenen Luftquanta. Die Randbedingungen beim Zusammentreffen dreier Flächen sind dieselben wie im früheren Falle nicht geschlossener Lamellen. So lassen sich z. B. mit Hülfe zweier fester Ringe wieder alle Formen des Unduloids und Nodoids, geschlossen durch angesetzte Kugelkalotten, erzielen. Eine einzelne freie Seifenblase hat notwendig Kugelgestalt und ist der Überdruck innen umgekehrt proportional ihrem Radius und der Proportionalitätsfaktor das Vierfache der Oberflächenspannung.

**11. Stabilität einer Trennungsfläche.** Für das stabile Gleichgewicht einer Trennungsfläche  $F_{AB}$ , die bereits der früher erörterten Bedingung  $\frac{dE}{dw} = 0$  ( $w = 0$ ) in jeder von einem Parameter  $w$  abhängenden und durch sie hindurch führenden Schar von virtuellen Verrückungen entspricht, ist weiter der definit-positive Charakter der zweiten Ableitung der potentiellen Energie nach dem Variationsparameter  $w$ , d. i. die Ungleichung:

$$(18) \quad \frac{d^2 E}{dw^2} > 0 \quad \text{für } w = 0$$

erforderlich. Nehmen wir an, der Rand von  $F_{AB}$  sei festzuhalten, so dass das Kurvenintegral in (3) fortfällt, so folgt durch Differentiation nach  $w$  aus (3), (4), (5) im Hinblick auf (6):

$$\frac{d^2 E}{dw^2} = \int_{F_{AB}} N \left\{ T_{AB} \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + g(\varrho_A - \varrho_B) \frac{\partial z}{\partial w} \right\} df.$$



Fig. 20.

Hiervon sei eine spezielle Anwendung gemacht. Die Trennungsfläche falle in die Niveauebene  $z = 0$ . Die Flüssigkeit  $B$  befinde sich oberhalb  $A$  in einem nach unten offenen Gefässe, sei aber schwerer als  $A$ , also  $\varrho_B > \varrho_A$  (Fig. 20). Hier ist für die variierten Flächen

$$z \equiv Nw \pmod{w^2}, \quad \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \equiv -\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \pmod{w},$$

(wobei durch das Zeichen  $\equiv$  und den Zusatz  $\pmod{w^2}$  bzw.  $\pmod{w}$ ) eine Gleichheit bis auf Glieder von der Ordnung  $w^2$  bez.  $w$  angedeutet werden soll), und kommt die Bedingung (18) auf

$$(19) \quad \int_{F_{AB}} N \left\{ -T_{AB} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - g(\varrho_B - \varrho_A) N \right\} df > 0$$

hinaus, während die Konstanz des Volumens  $V_A$  die Gleichung