

Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Jahr: 1903

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN360709532

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

LOG Id: LOG_0343

LOG Titel: 12. Kapillarschwingungen

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

$$t^2 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) T_{AB} - g(\varrho_B - \varrho_A) > 0$$

erfordert, woraus zugleich für $a = \infty$ die entsprechende Bedingung in Bezug auf einen langen Spalt ersichtlich ist.

12. Kapillarschwingungen. Im Gleichgewichtszustand befinde sich A ganz unterhalb, B ganz oberhalb der Niveauebene $z = 0$, und ihre *unbegrenzt* gedachte Trennungsfäche führe nunmehr unter Einfluss der Oberflächenspannung und der Schwere flache Schwingungen

$$z \equiv \varepsilon f(x, y, t) \pmod{\varepsilon^2}$$

aus, worin ε einen Parameter in gewisser Umgebung von 0 bedeutet. In A wie in B mögen Geschwindigkeitspotentiale $\equiv \varepsilon \varphi_A$ bez. $\equiv \varepsilon \varphi_B \pmod{\varepsilon^2}$ gelten, welche der *Laplace'schen* Differentialgleichung genügen und deren *negativ* genommene Differentialquotienten nach den Koordinaten die bezüglichen Geschwindigkeitskomponenten darstellen. An der Trennungsfäche haben wir einerseits für A , andererseits für B erstens die kinematische Forderung einer zur Fläche tangentialen Relativgeschwindigkeit, zweitens für den dort geltenden Druck $\equiv p_0 + \varepsilon p_A$ bez. $\equiv p_0 + \varepsilon p_B \pmod{\varepsilon^2}$ das Integral der lebendigen Kraft und bestimmt sich drittens die Druckdifferenz $\equiv \varepsilon(p_A - p_B) \pmod{\varepsilon^2}$ als Kapillardruck gemäss (10). Für $\lim \varepsilon = 0$, d. h. für unendlich flache Wellen werden diese Beziehungen:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_A}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_B}{\partial z}, \quad \frac{p_A}{\varrho_A} = \frac{\partial \varphi_A}{\partial t} - gf, \quad \frac{p_B}{\varrho_B} = \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} - gf, \quad (z = 0),$$

$$p_A - p_B = -T_{AB} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

Soll noch A für $\lim z = -\infty$, B für $\lim z = +\infty$ ruhen, so wird allen hier genannten Bedingungen in einer Weise, die zur additiven Konstruktion ihrer allgemeinen Auflösung hinreicht, durch den partikulären Ansatz:

$$f = \Re(e^{-i\sigma t} F(x, y)), \quad \varphi_A = \Re\left(-\frac{i\sigma}{k} e^{kz-i\sigma t} F\right), \quad \varphi_B = \Re\left(\frac{i\sigma}{k} e^{-kz-i\sigma t} F\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0$$

genügt, worin σ , k reelle positive Konstanten sind, \Re das Zeichen für den reellen Teil der dahinter aufgeführten Grösse ist und wo dann noch aus den letzten Relationen die Beziehung:

$$(21) \quad \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 = \frac{\varrho_A - \varrho_B}{\varrho_A + \varrho_B} \frac{g}{k} + \frac{T_{AB}}{\varrho_A + \varrho_B} k$$

zwischen k und σ folgt.

Wellen, die von y nicht abhängen, folgen bei dem Ansatz $F = Ce^{ik(x-x_0)}$ und damit ist $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ die Länge horizontal-zylindrischer, in einer Richtung fortschreitender oder auch stehender Wellen von der Schwingungszahl $\frac{\sigma}{2\pi}$. Diese Beziehung (21) haben Lord Kelvin⁵²⁾, ferner Kolaček⁵³⁾ gegeben; sie findet Anwendung auf die Fortpflanzung von Wellen einer unbegrenzten Wasserfläche unter der gemeinsamen Wirkung von Schwere und Kapillarität ohne Wind, ferner auf solche erzwungene stehende Kapillarschwingungen, bei denen die Knotenlinien als parallele Geraden gelten können⁵⁴⁾.

Der Gleichung (21) zufolge hat, $\varrho_A > \varrho_B$ vorausgesetzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{\sigma}{k}$ ein Minimum c_m bei einer gewissen Wellenlänge λ_m , mit welchen Grössen dann (21) sich

$$(21a) \quad \frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)$$

schreibt. (In Fig. 21 ist die hierdurch bestimmte Kurve in λ und c nebst den Kurven $c^2/c_m^2 = \frac{1}{2} \lambda/\lambda_m$ und $c^2/c_m^2 = \frac{1}{2} \lambda_m/\lambda$ dargestellt, um die Wirkungen von Schwere und Kapillarität zu vergleichen.) Mit einem jeden Werte $c > c_m$ vertragen sich alsdann zweierlei Wellenlängen, eine kürzere $\lambda_1 < \lambda_m$ und eine längere $\lambda_2 > \lambda_m$, wobei die Quotienten $\frac{\lambda_1}{\lambda_m}$ und $\frac{\lambda_2}{\lambda_m}$ reziprok sind. Die Wellen mit $\lambda < \lambda_m$, bei denen in (21) der Term mit T_{AB} gegenüber demjenigen mit g überwiegt, bezeichnet Lord Kelvin als „ripples“. Für Wasserwellen in Luft ist etwa $\lambda_m = 1,75$ cm, $c_m = 23,2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

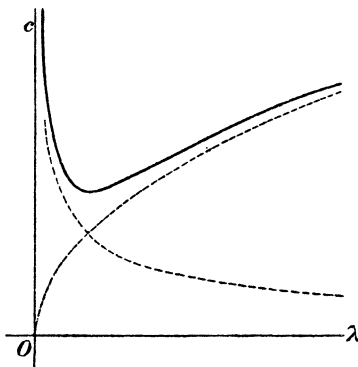


Fig. 21.

Lord Kelvin erörterte ferner den Einfluss des Windes auf die Geschwindigkeit von Wasserwellen. Hierbei wird die Annahme gemacht, dass die obere Flüssigkeit B für $\lim z = \infty$ mit einer gegebenen Geschwindigkeit u in Richtung der x -Axe fortschreitet. Bei der

52) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 42 (1871), p. 368; Edinburgh Proc. Roy. Soc. 1870/71, p. 374.

53) Kolaček, Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 425; 6 (1879), p. 616.

54) Vgl. die ausgedehnten Versuchsreihen von L. Grunmach, Wiss. Abh. d. kais. Normalaichungskommission, Berlin 1902, p. 101.

Wellenlänge λ sind alsdann zweierlei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten

$$c_u = \frac{\varrho}{1 + \varrho} u \pm \sqrt{c^2 - \frac{\varrho}{(1 + \varrho)^2} u^2}, \quad \left(\varrho = \frac{\varrho_B}{\varrho_A} \right)$$

möglich, wo c die durch (21 a) bestimmte Geschwindigkeit für $u = 0$ ist. Ein imaginärer Wert der Quadratwurzel hier würde bedeuten, dass die unverändert als Ausgangspunkt zu nehmende komplexe Partikulärlösung nunmehr in ihrem reellen Teile Wellen mit beständig zunehmender Amplitude darstellt. Diese Instabilität kommt für sämtliche Wellenlängen nicht in Frage, sowie $u < \frac{1 + \varrho}{\varrho^{\frac{1}{2}}} c_m$ ist.

Denkt man sich wieder A in horizontal-zylindrischer, von y nicht abhängender Bewegung derart, dass das von $z = 0$ wenig abweichende, im übrigen aber völlig willkürlich angesetzte Wellenprofil von A gleichförmig mit der Geschwindigkeit c in der x -Richtung fortschreitet und andererseits A für $z = -\infty$ ruht, so gewinnt man durch das Integral der lebendigen Kraft an der Oberfläche von A und andererseits den Kapillardruck eine Integralgleichung (*Fourier'sches Integral*), um das Wellenprofil gerade einer willkürlich angenommenen Verteilung des äusseren Druckes p_B an der Oberfläche anzupassen. Insbesondere wirkt eine mit einer Geschwindigkeit $c > c_m$ in der x -Richtung schwimmende zur y -Axe parallele Gerade, welche an ihrem Orte den Gesamtbetrag des Druckes auf die Längeneinheit um P vermehrt, während sonst der Druck p_B konstant sei, genau wie eine sprungweise Zunahme des Richtungskoeffizienten dz/dx des Wellenprofils um den Betrag $2P/T_{AB}$ und ruft in einiger Entfernung vor sich her einfachharmonische Wellen von der Länge $\lambda_1 (< \lambda_m)$, hinter sich von der Länge $\lambda_2 (> \lambda_m)$ hervor. — Eine gegen ihre Fortschreitungsrichtung einen Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$ bildende Drucklinie wirkt dann, als wenn sie nur senkrecht gegen sich die Geschwindigkeit $c \cos \theta$ hat, woraus durch eine Integration nach θ sich die Wirkung eines gleichförmig mit der Geschwindigkeit c schwimmenden, druckvermehrend wirkenden Punktes berechnet und insbesondere sich zeigt, dass ein solcher eine keilförmige Wellenfront (man denke an das Bild von Schiffswellen) mit dem durch $c \cos \theta = c_m$ bestimmten Öffnungswinkel $2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ vor sich her treibt⁵⁴).

Die Berücksichtigung der *inneren Reibung* wird für flache, in einer Richtung fortschreitende Wellen auf einer *reinen* Wasserober-

54) Lord *Rayleigh*, Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1883), p. 69 (Sc. papers 2, p. 258).

fläche derart zu geschehen haben, dass an der Oberfläche die Schubspannung gleich Null angenommen, die Zugspannung dem Kapillardruck entsprechend berechnet wird. Ist μ der Reibungskoeffizient und $\nu = \mu/\rho_A$, so findet man zu gegebener Wellenlänge λ anstatt der früheren Fortpflanzungsgeschwindigkeit c , wofern $\vartheta = 2\pi\nu/c\lambda$ klein ausfällt, (für Wasserwellen ist $\frac{2\pi\nu}{c_m} = 0,0048$ cm), eine modifizierte Wellengeschwindigkeit $= c(1 - \sqrt{2} \vartheta^{\frac{3}{2}})$, während zugleich die Amplituden einen Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{8\pi^2\nu}{\lambda^2} t}$, also eine Relaxationszeit

$$\frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu} (= 0,712 \lambda^2 \text{ sec für Wasser})$$

aufweisen.

Die beruhigende Einwirkung von Öl auf Wasserwellen wird dadurch erklärt⁵⁶⁾⁵⁷⁾, dass zunächst infolge Überwiegens der Oberflächenspannung von Wasser gegen Luft über die Summe der zwei Oberflächenspannungen von Öl gegen Wasser und gegen Luft das Öl sich zu einer äusserst dünnen Haut auf dem Wasser auszieht und für die Oberflächenschicht mit der Beimengung von Öl dann elastische Eigenschaften zu Tage treten; ihre Spannung bleibt nicht länger konstant, sondern wächst, wenn die Dicke durch Streckung weiter zu reduzieren gesucht wird; dadurch wirkt sie gleichsam wie eine biegsame und schwer dehnbare Membran und hindert durch ihren Zug auf das darunter befindliche Wasser die freie Entfaltung und Fortpflanzung der Wellen. Infolgedessen ist, wenn man den Einfluss der inneren Reibung ermitteln will, nicht mehr, wie im Falle einer reinen Wasseroberfläche, mit der Grenzbedingung an der Oberfläche zu rechnen, dass dort die Schubspannung Null ist, sondern eher mit der anderen, dass dort die horizontale Geschwindigkeitskomponente Null sei⁵⁸⁾. Für diesen anderen extremen Fall ergibt sich eine gegen die vorhin betrachteten Umstände im Verhältnis $4\sqrt{2}\vartheta:1$ kleinere Relaxationszeit.

Die kleinen Schwingungen einer Trennungsfläche von der Gestalt eines *Kreiszylinders* behandelte Lord *Rayleigh*⁵⁹⁾, um von da aus die Stabilität der Flüssigkeitsstrahlen beurteilen zu können. Die Schwere

55) Vgl. H. Lamb, Hydrodynamics, 3rd ed., Cambridge 1906, p. 563.

56) Reynolds, Brit. Assoc. Rep. 1880 (Sc. papers 1, p. 409).

57) Aitken, Edinburgh Roy. Soc. Proc. 12 (1883), p. 56.

58) H. Lamb, Hydrodynamics, 3rd ed., Cambridge 1906, p. 570.

59) Lord Rayleigh, Lond. Proc. Math. Soc. 10 (1878), p. 4; Proc. Roy. Soc. 29 (1879), p. 71 (Sc. papers 1, p. 361, 377; Theory of sound, 2. ed. chapt. XX); in Phil. Mag. 34 (1892), p. 145 (Sc. papers 3, p. 585) wird noch der Einfluss der inneren Reibung der Flüssigkeit in Betracht gezogen.

wird nicht berücksichtigt. Es sei A innerhalb, B ausserhalb des Zylinders befindlich, R der Radius des Zylinders, seine Axe die z -Axe, und

$$r \equiv R + \varepsilon f(z, \theta, t) \pmod{\varepsilon^2}, \quad (x + iy = re^{i\theta}),$$

im $\lim \varepsilon = 0$ seine Schwingungsgleichung. Wird der äussere Druck in B konstant angenommen, was damit gleichwertig ist, $q_B = 0$ zu nehmen, so kann man für das Geschwindigkeitspotential in A den partikulären Ansatz

$$\varepsilon \Re(C e^{i(kz - \sigma t + m\theta)} J_m(ikr)) \pmod{\varepsilon^2}$$

machen, wobei J_m die *Bessel'sche* Funktion erster Art von der Ordnung m bedeutet, und man gelangt durch die kinematische Bedingung und andererseits die Druckgleichung an der Oberfläche zu der Relation

$$\sigma^2 = \frac{ikR J'_m(ikR)}{J_m(ikR)} (k^2 R^2 + m^2 - 1) \frac{T_{AB}}{\rho_A R^3}.$$

Für $m = 0$ wird $\sigma^2 < 0$, falls $kR < 1$ ist, was den instabilen Charakter von Störungen bedeutet, deren Wellenlänge $2\pi/k$ den Umfang des Zylinders überschreitet. Die Instabilität wird infolge des Faktors $e^{|\sigma|t}$ in den Amplituden am grössten, wenn dabei $|\sigma|$ am grössten ausfällt, was auf $\frac{2\pi}{k} = 4,51 \times 2R$ hinführt, so dass für Schwellungen und Kontraktionen von dieser Wellenlänge die Tendenz des Strahls A zum Zerfallen in Tropfen am stärksten ist.

Nach ähnlichen Prinzipien behandelt Lord *Rayleigh*⁶⁰⁾ den Fall $q_A = 0, q_B > 0$, wobei sich als die Wellenlänge grösster Instabilität $\frac{2\pi}{k} = 6,48 \times 2R$ ergibt.

Das erste Ergebnis findet Anwendung auf das Zerfallen eines Wasserstrahls in Luft, das zweite auf das Zerreißen eines durch Wasser geschickten Luftstrahls. Die Schwingungen für $m = 2, 3, 4$ treten prädominierend hervor, wenn der Strahl aus einer Öffnung von elliptischer, dreieckiger, quadratischer Form austritt.

Die kleinen Schwingungen einer Trennungsfläche von der Gestalt einer *Kugel* erledigen sich ausgehend von dem gleichzeitigen Ansätze^{61) 62)}

$$\varphi_A = \Re\left(\frac{-C}{m} \frac{r^m}{R^m} Y_m(\theta, \psi) e^{-i\sigma t}\right), \quad \varphi_B = \Re\left(\frac{C}{m+1} \frac{R^{m+1}}{r^{m+1}} Y_m(\theta, \psi) e^{-i\sigma t}\right),$$

wobei der kinematischen Bedingung $\frac{d\varphi_A}{dr} = \frac{d\varphi_B}{dr}$ an der Oberfläche

60) Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 34 (1892), p. 177 (Sc. papers 3, p. 594)

61) Lord *Rayleigh*, Proc. Roy. Soc. 29 (1879), p. 71 (Sc. papers 1, p. 377).

62) *Webb*, Mess. of math. 9 (1880), p. 177.

Rechnung getragen ist; darin bedeuten r, θ, ψ Polarkoordinaten vom Kugelzentrum, $Y_m(\theta, \psi)$ die Kugelflächenfunktion m^{ter} Ordnung, R den Radius der Kugel. Es stellt sich alsdann

$$\sigma^2 = m(m+1)(m-1)(m+2) \frac{T_{AB}}{((m+1)e_A + me_B)R^3}$$

heraus. Das Ergebnis findet Anwendung auf die Schwingungen eines Wassertropfens in Luft, einer Luftblase in Wasser; in abfallenden Tropfen treten durch ein Nachwirken des Abreissens der Tropfen noch die Schwingungen 3. Ordnung ($m = 3$) hervor⁶³).

II. Kapillarität als räumlich verteilte Energie.

13. Die Hypothese der Kohäsionskräfte. Die Kapillaritätserscheinungen ergeben sich als notwendige Folgerungen aus einer Hypothese, wonach zwischen zwei materiellen Teilchen gleicher oder verschiedener Substanzen neben der Gravitation noch eine andere, nur von der Distanz abhängende Anziehungskraft in der Verbindungslinie wirksam ist, die man *Kohäsionskraft* nennt und deren Gesetz irgend welcher Art sein mag, nur dass sie mit wachsender Entfernung derart rasch abnimmt, dass sie bereits auf eine äusserst kleine, mikroskopisch nicht wahrnehmbare Distanz ganz ausser Betracht fällt.

Zunächst wurde das Ansteigen von Flüssigkeit in einer kapillaren Röhre allein mit einer von der Röhre auf die Flüssigkeit ausgeübten Anziehung erklärt, die nach der Unabhängigkeit der Erscheinung von der Dicke der Röhre nur von den der Wand nächstgelegenen Partikeln ausgehen konnte⁶⁴). *Clairaut*⁶⁵) erkannte es als notwendig, eine Anziehung der Flüssigkeitsteilchen unter einander mit in Rücksicht zu ziehen. *Laplace*⁶⁶) konnte sodann eine vollständige Theorie der Kapillarität einzig mit der vorhin skizzierten Hypothese über die Kohäsionskräfte aufbauen.

Laplace berechnete für eine Flüssigkeitsmasse, deren Teile gemäss jener Hypothese kohärieren, in der Hauptsache das Potential der Kohäsionskräfte für eine Stelle der Oberfläche und fand es als eine lineare Funktion der mittleren Krümmung daselbst. Er betrachtete zunächst das Potential einer Kugel auf eine Stelle der Oberfläche, ging von da zum Potential eines durch zwei unendlich nahe Meridian-

63) *Lenard*, Ann. Phys. Chem. 30 (1887), p. 209.

64) *Hawkesbee*, London Trans. R. Soc. 26, 27 (1709—1713).

65) *Clairaut*, Traité sur la figure de la terre, Paris 1743, chap. X.

66) *Laplace*, Théorie de l'action capillaire.