

## Werk

**Titel:** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

**Jahr:** 1903

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN360709532

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532>

**LOG Id:** LOG\_0345

**LOG Titel:** 13. Die Hypothese der Kohäsionskräfte

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN360504019

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Rechnung getragen ist; darin bedeuten  $r, \theta, \psi$  Polarkoordinaten vom Kugelzentrum,  $Y_m(\theta, \psi)$  die Kugelflächenfunktion  $m^{\text{ter}}$  Ordnung,  $R$  den Radius der Kugel. Es stellt sich alsdann

$$\sigma^2 = m(m+1)(m-1)(m+2) \frac{T_{AB}}{((m+1)e_A + me_B)R^3}$$

heraus. Das Ergebnis findet Anwendung auf die Schwingungen eines Wassertropfens in Luft, einer Luftblase in Wasser; in abfallenden Tropfen treten durch ein Nachwirken des Abreissens der Tropfen noch die Schwingungen 3. Ordnung ( $m = 3$ ) hervor<sup>63</sup>.

## II. Kapillarität als räumlich verteilte Energie.

**13. Die Hypothese der Kohäsionskräfte.** Die Kapillaritätserscheinungen ergeben sich als notwendige Folgerungen aus einer Hypothese, wonach zwischen zwei materiellen Teilchen gleicher oder verschiedener Substanzen neben der Gravitation noch eine andere, nur von der Distanz abhängende Anziehungskraft in der Verbindungslinie wirksam ist, die man *Kohäsionskraft* nennt und deren Gesetz irgend welcher Art sein mag, nur dass sie mit wachsender Entfernung derart rasch abnimmt, dass sie bereits auf eine äusserst kleine, mikroskopisch nicht wahrnehmbare Distanz ganz ausser Betracht fällt.

Zunächst wurde das Ansteigen von Flüssigkeit in einer kapillaren Röhre allein mit einer von der Röhre auf die Flüssigkeit ausgeübten Anziehung erklärt, die nach der Unabhängigkeit der Erscheinung von der Dicke der Röhre nur von den der Wand nächstgelegenen Partikeln ausgehen konnte<sup>64</sup>. *Clairaut*<sup>65</sup>) erkannte es als notwendig, eine Anziehung der Flüssigkeitsteilchen unter einander mit in Rücksicht zu ziehen. *Laplace*<sup>66</sup>) konnte sodann eine vollständige Theorie der Kapillarität einzig mit der vorhin skizzierten Hypothese über die Kohäsionskräfte aufbauen.

*Laplace* berechnete für eine Flüssigkeitsmasse, deren Teile gemäss jener Hypothese kohärieren, in der Hauptsache das Potential der Kohäsionskräfte für eine Stelle der Oberfläche und fand es als eine lineare Funktion der mittleren Krümmung daselbst. Er betrachtete zunächst das Potential einer Kugel auf eine Stelle der Oberfläche, ging von da zum Potential eines durch zwei unendlich nahe Meridian-

63) *Lenard*, Ann. Phys. Chem. 30 (1887), p. 209.

64) *Hawkesbee*, London Trans. R. Soc. 26, 27 (1709—1713).

65) *Clairaut*, Traité sur la figure de la terre, Paris 1743, chap. X.

66) *Laplace*, Théorie de l'action capillaire.

schnitte der Kugel gebildeten Keiles über und approximierte endlich eine beliebige Flüssigkeitsoberfläche in der Nähe eines Punktes durch die dort aus den Krümmungskreisen der Normalschnitte erzeugte Fläche, d. i. ungefähr durch das Oskulationsparaboloid. Die Differentialgleichung einer freien Oberfläche erhielt er nunmehr aus dem Satze der Hydrostatik, wonach diese bei konstantem äusseren Drucke eine Fläche konstanten Potentials aller wirkenden Kräfte ist<sup>66a)</sup>.

In einer zweiten Darstellung berechnete *Laplace*<sup>67)</sup> für eine Stelle der Flüssigkeitsoberfläche die tangentielle Komponente der gesamten dort ausgeübten Kohäsionskraft, wozu die Flächengleichung an der Stelle bis einschliesslich der Grössen 3<sup>ter</sup> Ordnung zu entwickeln ist, und erhielt die Gleichung der freien Oberfläche aus der Bedingung, dass an ihr die Resultante aus Kohäsion und Schwere stets normal zur Fläche steht. — Für die Konstanz des Randwinkels der Flüssigkeit an einem festen Körper hatte jedoch *Laplace* keinen Beweis, sondern zeigte nur, dass, wenn der Körper die Form von vertikalen Zylindern irgend welcher Querschnitte hat, der Mittelwert des Cosinus jenes Winkels längs der ganzen Randkurve stets auf die nämliche Konstante führen muss.

Diese Lücke in der *Laplace*'schen Theorie ergänzte *Gauss*<sup>68)</sup>. Ausgehend von dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für einen Gleichgewichtszustand formte *Gauss* dieses Prinzip zu der Forderung eines Minimums der potentiellen Energie um und betrachtete nunmehr die gesamte potentielle Energie der ins Spiel kommenden Kohäsionskräfte. Diese Energie erscheint in Form eines Doppel-Raumintegrals. Für jede Raumintegration lässt sich eine lineare ausführen, wobei ein Term proportional dem Volumen und ein zweiter proportional dem Flächeninhalt der Oberfläche besonders heraustreten, und von dem übrig bleibenden Doppel-Oberflächenintegral wies *Gauss* nach, dass bei der *Laplace*'schen Annahme über das Abnehmen der Kohäsionskraft die Vernachlässigung desselben geboten ist, insofern als verglichen mit der Distanz, auf die allein die Kohäsionskräfte in Betracht kommen, die Krümmungsradien der Oberfläche als unendlich gross, die Fläche

---

66\*) Genauer gesagt, verfuhr *Laplace* so: er dachte sich in der Flüssigkeit einen unendlich schmalen Kanal gelegt, der am Anfang und Ende senkrecht gegen die Oberfläche einmündet, berechnete den durch die Kohäsionskräfte zu Stande kommenden Druck auf einen Querschnitt des Kanals und brachte endlich das „Prinzip des Gleichgewichts in Kanälen“ zur Anwendung.

67) *Laplace*, Suppl. à la théorie de l'act. capill.

68) *Gauss*, Principia generalia, Göttingen 1830. — Selbstanzeige der Abh.: Gött. gel. Anz. 1829 (Werke 5, p. 287).

als nahezu eben gelten darf. Aus dem extremalen Charakter der potentiellen Energie entnahm sodann *Gauss* nach den Methoden der Variationsrechnung (ungefähr wie oben in Nr. 3 und 4 dargelegt ist) die Differentialgleichung für die freie Oberfläche, dann aber auch den Beweis für den *Laplace'schen* Satz vom konstanten Randwinkel.

**14. Potentielle Energie der Kohäsion in einem Medium.** Die von *Gauss* vorgenommene Transformation der Energie von Kohäsionskräften<sup>69)</sup> lässt sich gegenwärtig als eine zweimalige Anwendung des *Green'schen* Satzes darstellen.

Wir betrachten zunächst die Kohäsionsenergie innerhalb eines einzelnen homogenen Mediums *A*. Seine Dichte heisse  $\rho$ ; zwischen je zwei Volumenelementen  $dv$ ,  $dv'$  von *A* an den Stellen  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  im Abstände  $r$  wirke als Kohäsion eine Anziehungskraft  $= \rho^2 dv dv' \varphi(r)$ , wo  $\varphi(r)$  in später noch genau festzusetzender Weise mit zunehmendem  $r$  rapide nach Null sinken soll. Führt man

$$\int_r^\infty \varphi(r) dr = \psi(r), \quad \int_r^\infty r^2 \psi(r) dr = \chi(r)$$

ein, so lässt sich die gesamte potentielle Energie dieser Kohäsionskräfte für *A*:

$$(22) \quad -\frac{1}{2} \rho^2 \iint \psi(r) dv dv' \\ = -\frac{1}{2} \rho^2 \iint \left( \frac{\partial \chi}{\partial x'} \frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y'} \frac{\partial 1}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z'} \frac{\partial 1}{\partial z} \right) dv dv'$$

schreiben, wobei einerseits  $dv$ , andererseits  $dv'$  unabhängig von einander das ganze Volumen von *A* zu durchlaufen hat und der Faktor  $\frac{1}{2}$  vorzusetzen ist, weil auf diese Weise jedes Paar von Elementen  $dv$ ,  $dv'$  zweimal in Betracht kommt. Fassen wir zunächst die Integration nach  $dv'$  bei festgehaltenem  $dv$  ins Auge, so können wir den zweiten Ausdruck in (22) nach dem *Green'schen* Satze umformen, wobei wir die *Laplace'sche* Differentialgleichung für  $1/r$  verwenden, aber infolge der Unstetigkeit von  $1/r$  an der Stelle  $dv$  noch aus dem Integrationsraume für  $dv'$  eine kleine Kugel um  $dv$  auszuschneiden haben, deren Radius wir schliesslich nach Null konvergieren lassen. Bezeichnen wir mit  $df'$  (später auch mit  $df$ ) ein Oberflächenelement von *A*, mit  $n'$  (und  $n$ ) die äusseren Normalen dort, so transformiert sich nun-

69) Vereinfachte Darstellungen dieser Transformation gaben *Bertrand*, Journ. de math. (1) 13 (1848), p. 185; *Weinstein*, Ann. Phys. Chem. 27 (1886), p. 544. — *L. Boltzmann*, Ann. Phys. Chem. 141 (1870), p. 582 setzte Summationen über Moleküle an Stelle der Integrationen.