Werk

Titel: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Jahr: 1903
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN360709532
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360709532
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360709532

LOG Id: LOG_0368
LOG Titel: 12. Faltenpunkte
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN360504019
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN360504019
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=360504019

Terms and Conditions

Contact

die Falte um die Isophase dreht, folgt nach Fig. 3 unmittelbar [110]), dass

$$(\alpha'-\alpha'')\, d\, \frac{\partial \mathfrak{F}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = -\,(\beta'-\beta'')\, d\, \frac{\partial \mathfrak{F}_{\alpha\beta}}{\partial \beta}\,. \tag{2}$$

Ein spezieller Fall dieser Gleichung ist die *Clapeyron-Clausius*'sche (siehe Nr. **61**) [111]).

12. Faltenpunkte. *a*) Ein kritischer Punkt (Nr. **9***b*) ist auf den Tangentialflächen ein *Faltenpunkt* (Beisp. Nr. **60, 67***a*) [112]). Für die rein mathematische Behandlung dieser Punkte verweisen wir auf die Arbeit von *Korteweg* [a]. Von den beiden dort angegebenen Arten kommt für die abgeleitete Fläche nur die erste in Betracht.

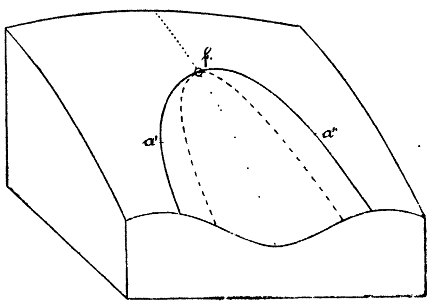

Fig. 4.

Fig. 4 gibt die Abbildung einer von einem Faltenpunkte dieser Art abgeschlossenen Falte (Nr. **60, 66, 68***a*). a' und a'' sind *Konnoden* [96]), die zusammengehörenden Berührungspunkte der Fläche mit einer zwei-

einzigen Punkt der Fläche zusammenkommen, 2. zu untersuchen, ob noch weitere zweifache Berührungsebenen anzubringen sind, und diese abzurollen, 3. die Teile mit grösserem $\mathfrak{F}$ den entsprechenden mit kleinerem $\mathfrak{F}$ gegenüber fortzulassen.

109) Es lassen sich diese Definitionen leicht auf die thermodynamischen Flächen im Allgemeinen übertragen, wobei allerdings die derivirte Fläche zu Linien zusammenfallen kann (vergl. Nr. **14***c*).

110) In Fig. 3 ist df die der $\mathfrak{F}$-Achse parallele Gerade, welche die von den Konnoden $a'(\alpha',\beta')$ und $a''(\alpha'',\beta'')$ ausgehenden der β-, bezw. α-Achse parallele Geraden schneidet, $a'\,a''\,e$ und $a'\,a''\,f$ die zwei Berührungsebenen. Aus

$$d\,\frac{\partial \mathfrak{F}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = -\frac{e\,f}{a''\,c} = -\frac{e\,f}{\alpha'-\alpha''}\,,\quad d\,\frac{\partial \mathfrak{F}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = \frac{e\,f}{a'\,d} = \frac{e\,f}{\beta'-\beta''}$$

folgt Gl. (2).

Für die analytische Ableitung hat man die Gleichung der Berührungsebene im Punkte (α',β') zu bilden, die zugleich durch (α'',β'') hindurchgeht, und die Bedingung dafür anzuschreiben, dass auch die benachbarte Berührungsebene durch dieselben Punkte (α',β'), (α'',β'') hindurchgeht.

111) Ein anderer Fall ist die wichtige *van der Waals*'sche Gl. **A** [b] p. 13 für binäre Mischungen [Nr. **67***a* Gl. (**114**)]. Fig. 3 gibt *Gibbs* [b] p. 387 für die *Clapeyron-Clausius*'sche Gleichung.

112) Von *D. J. Korteweg* [a] definirt als den Punkt, wo bei dem Fortrollen einer zweifach berührenden Ebene auf der Fläche die zwei Berührungspunkte zum Zusammenfallen kommen. Schon von *Gibbs* [b] p. 395 wurde darauf gewiesen, dass diese Punkte die kritischen Punkte bei einem einkomponentigen Stoff bezeichnen. *Maxwell* [a] p. 205 nannte sie auf Vorschlag von *Cayley tacnodal points* (vergl. Enc. III C 4, Art. *Berzolari*, Nr. **2** und Fussn. **11**).

(bzw. mehr-)fach tangirenden Ebene. Die Gesamtheit der Punkte a', a'' bildet die *Konnodalkurve* oder *Konnodale* [113]). Im Faltenpunkte f berühren sich die Konnodalkurve und die Spinodalkurve (vergl. Fussn. 103).

b) Ausser den einfachen Faltenpunkten bespricht *Korteweg* [a] und [b] die Ausnahmepunkte erster Ordnung [114]). Unter diesen sind für die abgeleitete Fläche nur die beiden Arten der *homogenen Doppelfaltenpunkte* von Bedeutung [115]).

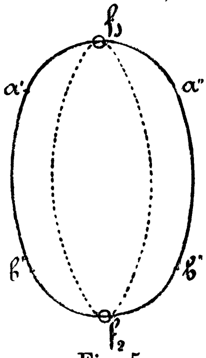

Fig. 5.

Dieselben unterscheiden sich durch die Art, in welcher man sie bei der Veränderung der Fläche entstanden denken kann. Das Auftreten eines *homogenen Doppelfaltenpunktes der ersten Art* auf einer veränderlichen Fläche bedingt das Entstehen oder Verschwinden einer von zwei Faltenpunkten abgeschlossenen Falte (Fig. 5) [116]), das eines *homogenen Doppelfaltenpunktes zweiter Art* dahingegen das

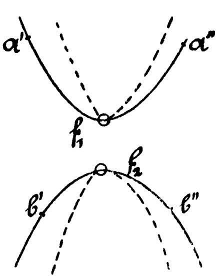

Fig. 6.

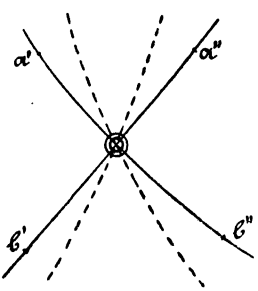

Fig. 7.

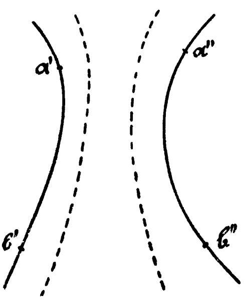

Fig. 8.

Zusammenfliessen zweier Falten oder die Teilung einer Falte, wie das durch die Figuren 6—8 oder 8—6 verdeutlicht wird, welche Figuren

113) *Van der Waals* nennt sie meistens *Binodale.*

114) Ausnahmepunkte (oder im Allgemeinen Ausnahmesingularitäten) erster Ordnung nennt *Korteweg* solche, deren Auftreten auf einer Fläche, deren Gleichung veränderliche Parameter enthält, nur eine einzige Bedingung zwischen diesen Parametern fordert.

115) Die Betrachtung *heterogener Doppelfaltenpunkte*, die im nicht absolut stabilen Teil der Primitivfläche auftreten, kann dazu dienen, um das Verhalten der Falten bei sich änderndem Parameter (z.B. T der *van der Waals*'schen $\mathfrak{F}_{vTx}$, v, x-Fläche), insbesondere das Auftreten *zusammengesetzter Falten*, besser verständlich zu machen (vergl. Fussn. 122): *van der Waals* [e] März 1907, p. 841 u. f., Mai 1907, p. 20 (vergl. Nr. 68*c*).

116) f_1 und f_2 sind die Faltenpunkte der neuentstandenen Falten; a' und a'', b' und b'' zusammengehörige Konnoden, die gebrochene Linie gibt die Spinodalkurve, im Innern dieser Kurve ist die Fläche negativ gekrümmt. Vergl. Nr. 68*c*.

sich auf die Gestaltung der Fläche vor, während und nach dem Auftreten eines solchen Doppelfaltenpunktes beziehen [117] [118].

13. **Faltentheoretische Betrachtungen.** *a*) *Korteweg* [b] [119] teilt die Falten [120] in drei Arten, von welchen aber nur zwei, die *geschlossenen Falten* (Fig. 5) und die ungeschlossenen *Ringfalten* (Fig. 9) [121], für die

---

117) Wenn f_1 und f_2 derselben Falte angehören, entsteht eine Ringfalte (Nr. **13**, Fig. 9).

118) Wie man sieht, kann in Fig. 8 ein ungestörtes Fortrollen der zweifachen Berührungsebene von dem Konnodenpaar (a', a'') zu dem Konnodenpaar (b', b'') stattfinden d. h. die koexistirenden Phasen (a', a'') können unter den Bedingungen, welche für jeden Punkt der Fläche erfüllt sein müssen (also für die *van der Waals*'sche $\mathfrak{F}_{VTX}$, V, X-Fläche bei konstanter Temperatur, bei der *Gibbs*'schen $\mathfrak{F}_{pTXY}$, X, Y-Fläche bei konstanter Temperatur und konstantem Druck), allmählich in die Phasen (b', b'') ohne Unterbrechung der Heterogenität übergehen, was bei Fig. 6 unmöglich ist. Das erste experimentelle Beispiel bei *Kuenen*, Leiden Comm. Nr. 16 (1895), vergl. Nr. **67***b*.

119) In dieser Arbeit behandelt *Korteweg* alle solche Ausnahmeerscheinungen [die Knotenpunkte, ohne Bedeutung für die Thermodynamik, später: Nieuw Archief voor Wisk. 18 (1891), p. 153] erster Ordnung, welche auf das Entstehen und Verschwinden, auf das Verhalten der Falten im Allgemeinen und der thermodynamisch wichtigen vielfachen Berührungsebenen einer veränderlichen Fläche (z.B. der *van der Waals*'schen $\mathfrak{F}_{vTx}$, v, x-Fläche mit T) Einfluss haben können, insoweit nämlich als eine solche Fläche als eine punktallgemeine Fläche betrachtet werden kann. Dabei ist nun zu bemerken, dass dieses nicht bei allen *Gibbs*'schen Tangentialflächen der Fall ist. Wohl bei der *van der Waals*'schen $\mathfrak{F}_{vTx}$, v, x-Fläche, nicht aber bei der *Gibbs*'schen $\mathfrak{F}_{pTxy}$, x, y-Fläche. Infolge dessen können, wie uns vom Autor freundlichst mitgeteilt wurde, bei dieser letzteren Singularitäten sowie Ausnahmesingularitäten erster Ordnung auftreten, welche bei *Korteweg* [b] nicht angegeben sind; so z. B. können die zwei Seiten einer Falte sich zu durchschneiden anfangen, sodass unter Bildung von zwei Kehrkanten eine *dreiblättrige Falte* (*van der Waals* [e] Febr. 1902, p. 560) entsteht, oder es können zwei Blätter sich zu berühren anfangen (ohne einen kegelförmigen Knotenpunkt zu bilden), um bei weiterer Änderung der Parameter sich zu schneiden, wobei eine Ringfalte entstehen kann (vergl. *Gibbs* [c] p. 184, *van der Waals* [e] März 1902, p. 673), und das Alles ohne Auftreten von Singularitäten höherer Ordnung.

120) Die mathematische Definition einer Falte ist nicht ohne Schwierigkeit. Der übliche Begriff muss verallgemeinert und verschärft werden. Siehe *Korteweg* [a] p. 95. Als lehrreiches Beispiel gibt derselbe da den Fall von drei Kugeln; diesem könnte man den eines oder mehrerer Toroide an die Seite stellen. Nach *Korteweg* vergegenwärtigt jeder Zweig der Konnodalkurve, der sich wie in Fig. 5 verhält, eine geschlossene, jedes Paar wie in Fig. 9 (vergl. Fussn. 121) eine Ringfalte, die weitere Gestalt der Fläche möge dann sein wie sie wolle.

121) Hier sind a', a''; b', b''; c', c''; d', d'' Konnodenpaare; die doppelt berührende Ebene kehrt zuletzt in ihre ursprüngliche Lage zurück. Wenn die doppelt berührende Ebene von a' nach $b'\,d'$, und von a'' nach $b''\,d''$ rollte, hätte man zwei geschlossene Falten.