SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Manuscripta Mathematica
Verlag: Springer
Jahr: 1976
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN365956996_0018
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN365956996_0018

LOG Id: LOG_0012
LOG Titel: Linearformen mit algebraischen Koeffizienten.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN365956996
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN365956996
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=365956996

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

manuscripta math., 18, 147 - 185 (1976)
© by Springer-Verlag 1976

LINEARFORMEN MIT ALGEBRAISCHEN KOEFFIZIENTEN

Hans Peter Schlickewei

In a recent paper I generalized the Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem on simultaneous rational approximation of n real algebraic numbers to include also the p-adic case. In the present paper I shall carry the argument further and prove analogous results for systems of real and p-adic linear forms with algebraic coefficients.

1. Zusammenstellung der Ergebnisse

Der Satz von ROTH [8] über die rationale Approximation einer reellen algebraischen Irrationalität wurde von RIDOUT [7] ins p-adische verallgemeinert. W. M. SCHMIDT gelang 1970 der Beweis des dem Rothschen Ergebnis entsprechenden Satzes für den Fall simultaner Approximation [11]. 1971 bewies W. M. SCHMIDT [12] sehr viel allgemeinere Sätze vom Rothschen Typ, die wesentliche Ergebnisse von [11] als Spezialfall enthalten. 1974 [9] wurden die Resultate von [11] entsprechend der Ridoutschen Verallgemeinerung des Rothschen Satzes ins p-adische erweitert.
In der vorliegenden Arbeit werden wir die p-adischen Analoga zu den Sätzen in [12] beweisen. Als einfache Folgerungen ergeben sich dabei Sätze wie in [7] und [9].

Seien u, v und n natürliche Zahlen mit

$$(1.1)\qquad u + v = n \quad .$$

p sei eine Primzahl. $L_1, \dots, L_v$ seien linear unabhängige Linearformen in $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mit p-adischen Koeffizienten. Nach Mahlers Verallgemeinerung [4] des Minkowskischen Linearformensatzes besitzen die simultanen Ungleichungen

$$(1.2)\qquad |x_i| << Q^v \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$(1.3)\qquad |L_j(\mathfrak{x})|_p \leq Q^{-n} \qquad (1 \leq j \leq v)$$

für jedes $Q > 1$ eine Lösung $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Mit $\|\mathfrak{x}\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ haben somit die simultanen Ungleichungen

$$(1.4)\qquad |L_j(\mathfrak{x})|_p << \|\mathfrak{x}\|^{-1-\frac{u}{v}} \qquad (1 \leq j \leq v)$$

unendlich viele Lösungen $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n$. Dem entspricht

<u>Definition 1.1 $L_1, \dots, L_v$ seien p-adische Linearformen mit algebraischen Koeffizienten. Wir nennen $L_1, \dots, L_v$ ein p-adisches Roth-System genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ höchstens endlich viele $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n$ gibt, so daß die simultanen Ungleichungen</u>

$$(1.5)\qquad |L_j(\mathfrak{x})|_p \leq \|\mathfrak{x}\|^{-1-\frac{u}{v}-\epsilon} \qquad (1 \leq j \leq v)$$

<u>erfüllt sind.</u>

Sei $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ eine algebraische Irrationalität; setzen wir speziell $u = 1$, $v = 1$, $n = 2$, so folgt aus dem Satz von RIDOUT [7], daß die Form $L(\mathfrak{x}) = X_1 - \alpha X_2$ ein p-adisches Roth-System ist.

Wir werden das folgende notwendige und hinreichende Kriterium für p-adische Roth-Systeme beweisen:

Satz 1.1 Seien $L_1,..,L_v$ p-adische Linearformen mit algebraischen Koeffizienten. $L_1,..,L_v$ bilden ein p-adisches Roth-System genau dann, wenn sie auf jedem rationalen Unterraum S^d der Dimension d mit $1 \leq d \leq n$ Rang r haben mit

$$(1.6) \qquad \frac{r}{d} \geq \frac{v}{n} .$$

Als Anwendungen dieses Satzes erhalten wir

Folgerung 1.1 Seien $\alpha_1,..,\alpha_n$ p-adische algebraische Zahlen mit $1, \alpha_1,..,\alpha_n$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ höchstens endlich viele $\mathfrak{x} = (x_1,..,x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, so daß die simultanen Ungleichungen

$$(1.7) \qquad |x_i - \alpha_i x_{n+1}|_p \leq \|\mathfrak{x}\|^{-1-\frac{1}{n}-\epsilon} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

erfüllt sind.

Diese Folgerung deckt sich im wesentlichen mit Folgerung 1.1 meiner Arbeit [9].

Folgerung 1.2 Unter den Voraussetzungen von Folgerung 1.1 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ höchstens endlich viele $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, für welche die Ungleichung

$$(1.8) \qquad |x_1\alpha_1 + .. + x_n\alpha_n + x_{n+1}|_p \leq \|\mathfrak{x}\|^{-n-1-\epsilon}$$

erfüllt ist.

Diese Folgerung deckt sich weitgehend mit Folgerung 1.2 von [9].

Bei der Definition der p-adischen Roth-Systeme sind die Exponenten in den v Ungleichungen alle gleich. Allgemeiner wäre eine Aussage, in der nur die Exponentensumme eine Rolle spielt. Um die entsprechenden Resultate formulieren zu können, stellen wir zunächst einige Vorüberlegungen an:

Seien $p_1, .., p_t$ verschiedene Primzahlen. $L_{10}, .., L_{no}$ seien reelle, $L_{1\tau}, .., L_{n\tau}$ $(1 \leq \tau \leq t)$ p_τ-adische Linearformen in $\mathfrak{x} = (x_1, .., x_n)$. $c_{10}, .., c_{no}, .., c_{1t}, .., c_{nt}$ seien reelle Konstanten mit

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=o}^{t} c_{i\tau} = 0 \quad \text{und} \quad c_{i\tau} \leq 0 \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t). \tag{1.9}$$

Nach dem verallgemeinerten Minkowskischen Linearformensatz gibt es zu jedem $Q > 1$ einen Punkt $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, so daß die simultanen Ungleichungen

$$|L_{io}(\mathfrak{x})| \ll Q^{c_{io}} \quad (1 \leq i \leq n) \tag{1.10}$$

$$|L_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t) \tag{1.11}$$

erfüllt sind. Das legt die folgende Definition nahe:

Definition 1.2 $L_{10}, .., L_{no}, .., L_{1t}, .., L_{nt}$ seien reelle bzw. p_τ-adische Linearformen mit algebraischen Koeffizienten. $c_{10}, .., c_{no}, .., c_{1t}, .., c_{nt}$ seien relle Konstanten mit (1.9). Das System $L_{10}, .., L_{no}, .., L_{1t}, .., L_{nt}; c_{10}, .., c_{no}, ..., c_{1t}, .., c_{nt})$ heißt allgemeines p-adisches Roth-System genau dann, wenn es zu jedem $\delta > 0$ eine Konstante $Q_1 = Q_1(\delta, L_{10}, .., L_{no}, .., L_{1t}, .., L_{nt}, c_{10}, .., c_{no}, .., c_{1t}, .., c_{nt})$ gibt, so daß die simultanen Ungleichungen

$$|L_{io}(\mathfrak{x})| \leq Q^{c_{io}-\delta} \quad (1 \leq i \leq n) \tag{1.12}$$

$$|L_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t) \tag{1.13}$$

für $Q > Q_1$ keine Lösung $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ besitzen.

Bemerkung: Daß wir in (1.9) nur Konstanten $c_{i\tau} \leq 0$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq \tau \leq t$) zulassen, bedeutet keine Einschränkung, da die p-adischen Formen auf $\mathbb{Z}^n$ nach oben gleichmäßig beschränkt sind.

Nach dem Satz von RIDOUT [7] bilden mit algebraischem $\alpha \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ die rellen Formen $L_{10} = X_1, L_{20} = X_2$ und die p-adischen Formen $L_{11} = X_1 - \alpha X_2$, $L_{21} = X_2$ zusammen mit den Konstanten $c_{10} = 1 = c_{20}$, $c_{11} = -2$, $c_{21} = 0$ ein allgemeines p-adisches Roth-System.

Wir nehmen o. B. d. A. an, die Formen seien so geordnet, daß gilt

(1.14) $$c_{i\tau} \leq c_{i+1,\tau} \quad \text{für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n-1 \text{ und alle } \tau \text{ mit } 0 \leq \tau \leq t\ .$$

Sei S^d ein Unterraum von $\mathbb{Q}^n$ der Dimension $d > 0$.
Die Formen $L_{1\tau}, \dots, L_{n\tau}$ mögen auf S^d den Rang r_τ haben ($0 \leq \tau \leq t$).
Zu S^d konstruieren wir die Zahl $c(S^d)$ folgendermaßen:

Falls $r_o < d$ gilt, setzen wir $c(S^d) = 1$. Falls $r_o = d$ gilt, so sei $s_{\tau 1}$ die kleinste ganze Zahl, so daß $L_{s_{\tau 1}\tau} \not\equiv 0$ auf S^d erfüllt ist.

$s_{\tau 2}$ sei die kleinste natürliche Zahl, so daß $L_{s_{\tau 1}\tau}$, $L_{s_{\tau 2}\tau}$ auf S^d Rang 2 haben. Verfahren wir entsprechend weiter, so erhalten wir zu jedem τ mit $0 \leq \tau \leq t$ r_τ Zahlen $s_{\tau 1}, \dots, s_{\tau r_\tau}$.
(Insbesondere für $\tau = 0$ d Zahlen $s_{o1}, \dots, s_{od}$).

Wir setzen

(1.15) $$c(S^d) = \sum_{\tau=o}^{t} \sum_{i=1}^{r_\tau} c_{s_{\tau i}\tau}\ .$$

Der folgende Satz liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für allgemeine p-adische Roth-Systeme.

Satz 1.2 $L_{10}, \dots, L_{no}, \dots, L_{1t}, \dots, L_{nt}$ seien reelle bzw. p-adische Linearformen ($1 \le \tau \le t$) mit algebraischen Koeffizienten. $c_{10}, \dots, c_{no}, \dots, c_{1t}, \dots, c_{nt}$ seien reelle Konstanten, welche den Beziehungen (1.9) und (1.14) genügen. Dann gilt $(L_{10}, \dots, L_{no}, \dots, L_{1t}, \dots, L_{nt}; c_{10}, \dots, c_{no}, \dots, c_{1t}, \dots, c_{nt})$ bilden ein allgemeines p-adisches Roth-System genau dann, wenn

(1.16) $$c(S^d) \le 0$$

für jeden rationalen Teilraum S^d der Dimension $d > 0$ erfüllt ist.

2. Die p-adische Verallgemeinerung des Teilraumsatzes

Seien n eine natürliche Zahl ≥ 2, t eine ganze Zahl ≥ 0 und $p_1, \dots, p_t$ paarweise verschiedene Primzahlen. $L_{10}, \dots, L_{no}$ seien reelle linear unabhängige Linearformen mit algebraischen Koeffizienten in $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$. $L_{1\tau}, \dots, L_{n\tau}$ seien p_τ-adische linear unabhängige Linearformen mit algebraischen Koeffizienten in denselben Variablen wie die reellen Formen $(1 \le \tau \le t)$. $c_{10}, \dots, c_{no}, c_{11}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{1t}, \dots, c_{nt}$ seien reelle Konstanten mit

(2.1) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=o}^{t} c_{i\tau} = 0 \qquad \text{und}$$

(2.2) $$c_{i\tau} \le 0 \qquad \text{für alle } i, \tau \text{ mit } 1 \le i \le n, \quad 1 \le \tau \le t.$$

Für reelles $Q > 1$ werde durch die Ungleichungen

(2.3) $$|L_{io}(\mathfrak{x})| \le Q^{c_{io}} \qquad (1 \le i \le n)$$

das Parallelepiped $\Pi(Q)$ definiert. $G(Q)$ sei das vermöge der Ungleichungen

$$(2.4)\qquad |L_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq \tau \leq t)$$

ausgezeichnete Teilgitter von $\mathbb{Z}^n$. Weiter seien $\lambda_1(Q), \ldots, \lambda_n(Q)$ die sukzessiven Minima von $\Pi(Q)$ auf dem Gitter $G(Q)$.

Wir beweisen

Satz 2.1 (Teilraumsatz für allgemeine Gitter). Sei $\mathfrak{N}$ eine nach oben nicht beschränkte Menge reeller Zahlen $Q > 1$. Es gebe ein $\delta > 0$ und eine ganze Zahl d mit $1 \leq d \leq n-1$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{N}$

$$(2.5)\qquad \lambda_d(Q) < \lambda_{d+1}(Q) \cdot Q^{-\delta}$$

erfüllt ist. Dann gibt es einen festen rationalen Unterraum S^d der Dimension d und eine nach oben nicht beschränkte Teilmenge $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{N}'$ die ersten d sukzessiven Minima von $\Pi(Q)$ auf $G(Q)$ durch Punkte $\mathfrak{w}_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}_d(Q) \in S^d$ angenommen werden.

Der Beweis dieses Satzes wird in den Abschnitten 1-6 mit Hilfsmitteln aus der Geometrie der Zahlen und über eine verallgemeinerte Form des Rothschen Lemmas geführt. Wir halten uns dabei an SCHMIDT [12], der den entsprechenden Satz im Reellen bewiesen hat.

3. Sätze aus der linearen Algebra und der Geometrie der Zahlen

In diesem Abschnitt referieren wir einige Ergebnisse von MAHLER [5], [6] aus der Geometrie der Zahlen, sowie zwei Lemmata aus der linearen Algebra, die etwa bei SCHMIDT [12] bewiesen sind.

Für Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{Q}^n_{p_\tau}$) sei $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ die kanonische Bilinearform. $\mathfrak{a}_{1\tau}, \ldots, \mathfrak{a}_{n\tau}$ sei für $\tau = 0$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, für $1 \leq \tau \leq t$ eine Basis von $\mathbb{Q}^n_{p_\tau}$. Wir setzen

(3.1) $$d_\tau = \det\{\mathfrak{a}_{1\tau},\ldots,\mathfrak{a}_{n\tau}\} \qquad (0 \le \tau \le t),$$

und setzen o. B. d. A. voraus

(3.2) $$d_\tau = 1 \qquad \text{für alle } \tau \text{ mit } 0 \le \tau \le t .$$

Seien $f_{i\tau} \le 0$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le \tau \le t)$ Zahlen aus $\mathbb{Z}$ und A_i $(1 \le i \le n)$ positive reelle Zahlen, zwischen denen die Relation

(3.3) $$\prod_{i=1}^{n} \{A_i \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{f_{i\tau}}\} = 1$$

bestehe.

Durch das simultane Ungleichungssystem

(3.4) $$|\mathfrak{a}_{io}\,\mathfrak{x}| \le A_i \qquad (1 \le i \le n)$$

mit $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$ wird ein konvexer Körper Π mit dem Volumen

(3.5) $$V = 2^n \prod_{i=1}^{n} A_i$$

definiert. Das System der p-adischen Ungleichungen

(3.6) $$|\mathfrak{a}_{i\tau}\,\mathfrak{x}|_{p_\tau} \le p_\tau^{f_{i\tau}} \qquad (1 \le i \le n,\ 1 \le \tau \le t)$$

zeichnet ein Teilgitter $G \subset \mathbb{Z}^n$ aus.

$\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n$ sei eine Basis von G. Nach [3] (Théorème 1.7, S. 20) gilt für die Gitterdeterminante

(3.7) $$d(G) = \det\{\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n\} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{-f_{i\tau}} .$$

Kombination von (3.3), (3.5) und (3.7) ergibt

(3.8) $$2^{-n}\, V \cdot d(G)^{-1} = 1 .$$

Zu n linear unabhängigen Punkten $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ seien die Punkte $\mathfrak{a}_1^*,\ldots,\mathfrak{a}_n^*$

dual. Nach (3.7) liegen die Punkte $d(G)\,\mathfrak{b}_1^*, \dots, d(G)\mathfrak{b}_n^*$ in $\mathbb{Z}^n$. Sei G^* das von diesen Punkten erzeugte Teilgitter von $\mathbb{Z}^n$. Dann gilt

$$(3.9) \qquad d(G^*) = d(G)^{n-1} .$$

Nach einfacher Rechnung (vgl. hierzu [12] S. 260 f.) erhalten wir aus (3.6), daß die Punkte $d(G)\mathfrak{b}_i^*$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ Lösungen der Ungleichungen

$$(3.10) \qquad |\mathfrak{a}_{i\tau}^*\,\mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_\tau^{f_{k\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

sind. Sei G' das durch (3.10) beschriebene Teilgitter von $\mathbb{Z}^n$. Für seine Gitterdeterminante gilt

$$(3.11) \qquad d(G') = d(G)^{n-1}$$

Vergleich von (3.9) und (3.11) liefert wegen $d(G)\mathfrak{b}_i^* \in G'$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$

$$(3.12) \qquad G' = G^* .$$

Wir betrachten nun die Ungleichungen

$$(3.13) \qquad |\mathfrak{a}_{io}^*\,\mathfrak{x}| \leq A_i^{-1}\, d(G) .$$

Das Volumen des durch (3.13) beschriebenen konvexen Körpers Π^* ergibt sich zu

$$(3.14) \qquad V^* = 2^n \cdot d(G)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} A_i^{-1} .$$

Aus (3.3), (3.7), (3.9) und (3.14) erhalten wir

$$(3.15) \qquad 2^{-n}\, V^*\, d(G^*)^{-1} = 1 .$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien die sukzessiven Minima von Π auf G, $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ die sukzessiven Minima von Π^* auf G^*. $\mathfrak{w}_1, \dots, \mathfrak{w}_n$ seien linear unabhänige Punkte auf G mit $\mathfrak{w}_i \in \lambda_i\,\Pi$ $(1 \leq i \leq n)$.

Nach [2] (Corollary zu Theorem V, S. 219) hat das von $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ erzeugte Gitter in G einen Index $J \leq n!$. Demnach liegen die Punkte $J\, d(G)\, \mathfrak{w}_i^*$ in $\mathbb{Z}^n$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$.
Weiter gilt sogar

$$(3.16) \qquad J\, d(G)\, \mathfrak{w}_i^* \in G^* \qquad \text{für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n$$

und

$$(3.17) \qquad |\mathfrak{a}_{io}^*\, J\, d(G) \mathfrak{w}_j^*| \leq n!\, d(G)\, A_i^{-1} \lambda_j^{-1} \qquad \text{für alle } i \text{ und alle } j \text{ mit } 1 \leq i,\ j \leq n\ .$$

Die zur Verifizierung von (3.16), (3.17) notwendigen Überlegungen sind dieselben wie in [12] S. 260 f.

Berücksichtigen wir noch die auf Grund von (3.8) und (3.15) bestehenden Ungleichungen

$$(3.18) \qquad \frac{1}{n!} \leq \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \leq 1\ , \quad \frac{1}{n!} \leq \lambda_1^* \cdot \ldots \cdot \lambda_n^* \leq 1\ ,$$

so erhalten wir

Satz 3.1: (MAHLER [5]) *Zwischen den sukzessiven Minima* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *und* $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$ *von* Π *auf* G *bzw.* Π^* *auf* G^* (*vgl.* (3.4), (3.6), (3.10), (3.13)) *besteht die Relation*

$$(3.19) \qquad \lambda_i^* \ll \lambda_{n+1-i}^{-1} \ll \lambda_i^*$$

mit nur von n *abhängender Konstante. Seien* $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ *linear unabhängige Punkte aus* G *mit* $\mathfrak{w}_j \in \lambda_j \Pi$ *für alle* j *mit* $1 \leq j \leq n$, *dann genügen die dualen Punkte* $\mathfrak{w}_1^*, \ldots, \mathfrak{w}_n^*$ *den Beziehungen* (3.16) *und* (3.17).

Neben dem Ergebnis von Satz 3.1, das Zusammenhänge zwischen den Minima konvexer Körper auf gewissen Gittern und den Minima der entsprechenden polaren Gebilde herstellt, benötigen wir im folgenden noch das sehr viel allgemeinere Mahlersche Übertragungsprinzip mittels compound Bildung (vgl. [6]).

Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl; σ, ρ seien Teilmengen von $\{1, 2, .., n\}$. Für jede ganze Zahl k mit $1 \leq k \leq n-1$ bestehe die Menge $C(n, k)$ aus allen Mengen σ mit k Elementen. Demnach hat $C(n, k)$ genau

(3.20) $$m = m(k) = \binom{n}{k}$$

Elemente σ. Sei k im folgenden fest. Ausgehend von den Vektoren $\mathfrak{a}_{10}, .., \mathfrak{a}_{no} \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{a}_{1\tau}, .., \mathfrak{a}_{n\tau} \in \mathbb{Q}^n_{p_\tau}$ ($1 \leq \tau \leq t$) der Gestalt

$\mathfrak{a}_{i\tau} = (\alpha^{(\tau)}_{i1}, .., \alpha^{(\tau)}_{in})$ ($1 \leq i \leq n$, $0 \leq \tau \leq t$) mit reellen bzw. p_τ-adischen Komponenten $\alpha^{(\tau)}_{ij}$ konstruieren wir $t + 1$ Systeme von m Vektoren in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{Q}^m_{p_\tau}$ ($1 \leq \tau \leq t$): Für $\sigma, \rho \in C(n, k)$ seien $\alpha^{(\tau)}_{\sigma\rho}$ die Determinanten

der aus den $\alpha^{(\tau)}_{ij}$ mit $i \in \sigma$, $j \in \rho$ gebildeten $k \times k$-Matrizen ($0 \leq \tau \leq t$). Wir ordnen die Zahlen $\alpha^{(\tau)}_{\sigma\rho}$ lexikographisch und bezeichnen mit $_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ den Vektor mit den m Komponenten $\alpha^{(\tau)}_{\sigma\rho}$, wobei ρ die Menge $C(n, k)$ durchläuft. Es sei

(3.21) $$_kd_\tau = \det\{ {_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau}}, \sigma \in C(n, k) \} \qquad (0 \leq \tau \leq t) .$$

Nach AITKEN [1] S. 92 gilt

(3.22) $$_kd_\tau = d_\tau^{\binom{n-1}{k-1}} \qquad (0 \leq \tau \leq t) \quad .$$

Vergleich von (3.22) mit (3.2) ergibt

(3.23) $$_kd_\tau = 1 \qquad (0 \leq \tau \leq t).$$

Der Vektor $_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ wird nur mittels der Vektoren $\mathfrak{a}_{i\tau}$ mit $i \in \sigma$ konstruiert. Wir schreiben daher auch für $\sigma \in C(n, k)$

(3.24) $$_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau} = \mathfrak{a}_{i_1\tau} \wedge .. \wedge \mathfrak{a}_{i_k\tau}$$

mit $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n$ und $i_j \in \sigma$ für alle j mit $1 \leq j \leq k$.

Nach SCHMIDT [12] S. 273 gelten die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 3.1 Seien $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_k$ und $\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_k$ je k linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_k$ und $\mathfrak{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{y}_k$ in $\mathbb{R}^m$ linear abhängig genau dann, wenn $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_k$ und $\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_k$ denselben Unterraum von $\mathbb{R}^n$ aufspannen.

Lemma 3.2 Sei $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{a}_1^*,\ldots,\mathfrak{a}_n^*$ die duale Basis. Sei $1 \leq k \leq n$. Für $\sigma = \{i_1 < \ldots < i_k\} \in C(n,k)$ setzen wir

(3.25) $$\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{a}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_k} \qquad \text{und}$$

(3.26) $$(\mathfrak{a}^*)_\sigma = \mathfrak{a}^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}^*_{i_k} .$$

Dann bilden die m Vektoren $\mathfrak{a}_\sigma$ mit $\sigma \in C(n,k)$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$. Sei $(\mathfrak{a}_\sigma)^*$ mit $\sigma \in C(n,k)$ die hierzu duale Basis. Dann gilt

(3.27) $$(\mathfrak{a}_\sigma)^* = (\mathfrak{a}^*)_\sigma .$$

Mit $\mathfrak{x}$ seien Vektoren des n-dimensionalen Raumes, mit $\mathfrak{x}^{(k)}$ Vektoren des m-dimensionalen Raumes bezeichnet. Die Zahlen A_i und $f_{i\tau}$ seien wie am Anfang dieses Abschnittes. Wir setzen für $\sigma \in C(n,k)$

(3.28) $$A_\sigma = \prod_{i\in\sigma} A_i ,$$

(3.29) $$f_{\sigma\tau} = \sum_{i\in\sigma} f_{i\tau} \qquad (1 \leq \tau \leq t) .$$

Das durch die Ungleichungen

(2.30) $$\left| {}_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \mathfrak{x}^{(k)} \right|_{p_\tau} \leq p_\tau^{f_{\sigma\tau}} \qquad (\sigma \in C(n,k),\ 1 \leq \tau \leq t)$$

definierte Teilgitter G_k von $\mathbb{Z}^m$ hat gemäß (3.7) und (3.29) die Gitterdeterminante

$$(3.31)\qquad d(G_k) = d(G)^{\binom{n-1}{k-1}} \quad .$$

$\nu_1, \ldots, \nu_m$ seien die sukzessiven Minima des durch

$$(3.32)\qquad |{}_k\alpha_{\sigma o}\, \mathfrak{r}^{(k)}| \le A_\sigma \qquad (\sigma \in C(n,k))$$

bestimmten reellen konvexen Körpers Π_k auf dem Gitter G_k. Für das Volumen V_k von Π_k gilt nach (3.5) und(3.28)

$$(3.33)\qquad 2^{-m} V_k = (2^{-n} V)^{\binom{n-1}{k-1}}$$

Kombination von (3.31) und (3.33) ergibt wegen (3.8)

$$(3.34)\qquad 2^{-m} V_k \cdot d(G_k)^{-1} = 1 \quad .$$

Für die Minima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von Π auf G sei

$$(3.35)\qquad \lambda_\sigma = \prod_{i \in \sigma} \lambda_i \qquad (\sigma \in C(n,k)) \quad .$$

Ordnen wir die λ_σ der Größe nach, dann lautet das Übertragungsprinzip folgendermaßen:

Satz 3.2 (MAHLER [6]) *Zwischen den sukzessiven Minima* ν_μ *des konvexen Körpers* Π_k *auf dem Gitter* G_k *und den sukzessiven Minima* λ_i *des konvexen Körpers* Π *auf* G (*vgl. hierzu* (3.4), (3.6), (3.30), (3.32)) *bestehen die Ungleichungen*

$$(3.36)\qquad \nu_\mu \ll \lambda_{\sigma_\mu} \ll \nu_\mu \qquad (1 \le \mu \le m) \quad .$$

Seien weiter $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ *linear unabhängige Punkte auf* G *mit* $\mathfrak{w}_i \in \lambda_i \Pi$, *dann gilt für alle* ρ *mit* $\rho = \{i_1 < \ldots < i_k\} \in C(n,k)$ *und* $\mathfrak{w}_\rho = \mathfrak{w}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{w}_{i_k}$

$$(3.37)\qquad \mathfrak{w}_\rho \in G_k \qquad \text{und}$$

$$(3.38)\qquad |\mathfrak{a}_{\sigma o}\mathfrak{w}_\rho| \ll \lambda_\rho \cdot A_\sigma \qquad (\sigma \in C(n,k)).$$

Dabei hängen die Konstanten in (3.36) und (3.38) nur von n ab.

4. Der Satz vom vorletzten Minimum

Seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $\mathfrak{a}_{10},..,\mathfrak{a}_{no}$ linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ mit algebraischen Komponenten, $\mathfrak{a}_{1\tau},..,\mathfrak{a}_{n\tau}$ linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{Q}_{p_\tau}^n$ mit algebraischen Komponenten $(1 \leq \tau \leq t)$. Es gelte

$$(4.1)\qquad \det(\mathfrak{a}_{1\tau},..,\mathfrak{a}_{n\tau}) = 1 \qquad (0 \leq \tau \leq t).$$

Die Vektoren $\mathfrak{a}^*_{1\tau},..,\mathfrak{a}^*_{n\tau}$ seien zu $\mathfrak{a}_{1\tau},..,\mathfrak{a}_{n\tau}$ dual. $A_1,..,A_n$ seien positive reelle Zahlen. $f_{11},..,f_{n1},..,f_{1t},..,f_{nt}$ seien ganze Zahlen ≤ 0.

Durch die Ungleichungen

$$(4.2)\qquad |\mathfrak{a}_{io}\mathfrak{x}| \leq A_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

werde das Parallelepiped Π, durch die Ungleichungen

$$(4.3)\qquad |\mathfrak{a}_{i\tau}\mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq p_\tau^{f_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

das Gitter G mit der Gitterdeterminante d(G) beschrieben.

Zwischen den Zahlen A_i und $f_{i\tau}$ bestehe die Beziehung

$$(4.4)\qquad \prod_{i=1}^{n} \{A_i \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{f_{i\tau}}\} = 1.$$

$\lambda_1,..,\lambda_n$ seien die sukzessiven Minima von Π auf G. Π^* bezeichne das durch

$$(4.5)\qquad |\mathfrak{a}^*_{io}\mathfrak{x}| \leq A_i^{-1}\, d(G) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

definierte Parallelepiped, G^* das durch

$$(4.6)\qquad |\alpha^*_{i\tau}\,\mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq p_\tau^{\sum_{j\neq i} f_{j\tau}} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

beschriebene Gitter. Die Menge $\{1, 2, .., n\}$ werde mit M_n bezeichnet.
Sei M_n^{t+1} das (t+1)-fache cartesische Produkt von M_n.
S sei eine nichtleere Teilmenge von M_n^{t+1}.
Wir beweisen

<u>Satz 4.1</u> (<u>Satz vom vorletzten Minimum</u>).
<u>Zu vorgegebenem</u> $\delta > 0$ <u>gibt es eine Konstante</u>
$Q_o = Q_o(\delta, \alpha_{10}, .., \alpha_{no}, .., \alpha_{1t}, .., \alpha_{nt}, S) > 0$ <u>mit der Eigenschaft:</u>
<u>Sei</u>

$$(4.7)\qquad Q > \max\{Q_o, A_1, .., A_n, A_1^{-1}, .., A_n^{-1}, p_\tau^{-f_{i\tau}} \ (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)\}$$

<u>und gelte</u>

$$(4.8)\qquad A_{i_o} \cdot \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{f_{i_\tau \tau}} \cdot Q^{\frac{\delta}{2}} \geq 1 \quad \underline{\text{für alle}}\ (i_o, i_1, .., i_t) \in S .$$

<u>Für das vorletzte Minimum</u> λ_{n-1} <u>von</u> Π <u>auf</u> G <u>bestehe die Ungleichung</u>

$$(4.9)\qquad \lambda_{n-1} < Q^{-\delta} .$$

$\mathfrak{w}_1, .., \mathfrak{w}_n$ <u>seien linear unabhängige Punkte auf dem Gitter</u> G <u>mit</u>
$\mathfrak{w}_i \in \lambda_i \Pi\ (1 \leq i \leq n)$. J <u>sei der Index des von</u> $\mathfrak{w}_1, .., \mathfrak{w}_n$ <u>erzeugten Teilgitters von</u> G. <u>Sind</u> $\mathfrak{w}_1^*, .., \mathfrak{w}_n^*$ <u>die dualen Punkte, so gilt</u>

$$(4.10)\qquad |\alpha^*_{io}\, J\, d(G)\, \mathfrak{w}^*_n| \ll A_i^{-1}\, d(G) \cdot Q^{-\delta(n-1)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$(4.11)\qquad |\alpha^*_{i\tau}\, J\, d(G)\, \mathfrak{w}^*_n|_{p_\tau} \leq p_\tau^{\sum_{j\neq i} f_{j\tau}} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

$$(4.12)\qquad |\alpha^*_{i_o o}\, \mathfrak{w}^*_n| \cdot \prod_{\tau=1}^{t} |\alpha^*_{i_\tau \tau}\, \mathfrak{w}^*_n|_{p_\tau} = 0 \quad \underline{\text{für alle}}\ (i_o, i_1, .., i_t) \in S.$$

<u>Dabei hängt die Konstante in</u> (4.10) <u>nur von</u> n <u>ab.</u>

Daß die Beziehungen (4.10) und (4.11) gelten, ist eine leichte Folgerung aus Satz 3.1 in Verbindung mit (4.9) und der Ungleichung $\frac{1}{n!} \leq \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \leq 1$. Die wesentliche Aussage des Satzes ist in (4.12) enthalten. In [9] haben wir die Kontraposition des Satzes bewiesen. Allerdings wurde dort vorausgesetzt, daß die Linearformen ein eigentliches System bilden.

Weiterhin wurden als Mengen S nur Teilmengen der Diagonale von M_n^{t+1} zugelassen. Damit war die (4.12) entsprechende Bedingung ausgeschlossen, so daß $\lambda_{n-1} > Q^{-\delta}$ gefolgert werden konnte.

Wir beweisen Satz 4.1 indirekt und können daher genauso wie in [9] vorgehen. Gehen wir den Beweis des Satzes vom vorletzten Minimum in [9] durch, so stellen wir fest, daß lediglich in das dortige Lemma 3.1 die speziellere Gestalt der Menge S und die Bedingung, daß die betrachteten Systeme eigentlich sind, eingehen. Wir beweisen daher

<u>Lemma 4.1:</u> S, $\mathfrak{a}_{10}, \ldots, \mathfrak{a}_{no}, \ldots, \mathfrak{a}_{1t}, \ldots, \mathfrak{a}_{nt}, \mathfrak{a}^*_{10}, \ldots, \mathfrak{a}^*_{no}, \ldots, \mathfrak{a}^*_{1t}, \ldots, \mathfrak{a}^*_{nt}$ <u>seien wie in Satz 4.1. Sei</u> $\delta > 0$. $c_{10}, \ldots, c_{no}, c_{11}, \ldots, c_{n1}, \ldots, c_{1t}, \ldots, c_{nt}$ <u>seien reelle Zahlen mit</u>

(4.13) $$|c_{io}| \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n) \qquad -1 \leq c_{i\tau} \leq 0 \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

(4.14) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=o}^{t} c_{i\tau} = 0.$$

<u>Weiter gelte</u>

(4.15) $$\sum_{\tau=o}^{t} c_{i_\tau \tau} \geq -\frac{3\delta}{4} \qquad \text{für alle } (i_o, \ldots, i_t) \in S.$$

<u>Sei</u> $Q > 1$, Π <u>der konvexe Körper</u>

(4.16) $$|\mathfrak{a}_{io}\,\mathfrak{r}| \leq Q^{c_{io}} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

<u>und</u> G <u>das Gitter</u>

(4.17) $$|\mathfrak{a}_{i\tau}\,\mathfrak{r}|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t).$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien die sukzessiven Minima von Π auf G. $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ seien linear unabhängige Punkte auf G mit dem Index J und mit $\mathfrak{w}_i \in \lambda_i \Pi$ $(1 \le i \le n)$. $\mathfrak{w}_1^*, \ldots, \mathfrak{w}_n^*$ seien die dualen Punkte. Sei weiter $\mathfrak{m}$ der bis auf einen Faktor ± 1 eindeutig bestimmte, zu $\mathfrak{w}_n^*$ proportionale Vektor mit ganzzahligen, relativprimen Komponenten. Es sei

$$\lambda_{n-1} < Q^{-\delta} , \tag{4.18}$$

und es gebe $(i_o, i_1, \ldots, i_t) \in S$ mit

$$|\mathfrak{a}_{i_o o}^* \mathfrak{w}_n^*| \cdot \prod_{\tau=1}^{t} |\mathfrak{a}_{i_\tau \tau}^* \mathfrak{w}_n^*|_{p_\tau} \neq 0 . \tag{4.19}$$

Dann existieren Konstanten C_1, C_2, C_3 mit $C_i = C_i(\delta, \mathfrak{a}_{1o}, \ldots, \mathfrak{a}_{no}, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_{1t}, \ldots, \mathfrak{a}_{nt}, S) > 0$ $(1 \le i \le 3)$, so daß

$$Q^{c_1} \le \|\mathfrak{m}\| \le Q^{c_2} \tag{4.20}$$

falls $Q > C_3$.

Beweis: Mittels Satz 3.1, insbesondere (3.17) erhalten wir unmittelbar eine mögliche Konstante C_2:

Nach (4.18) gilt $\lambda_n^{-1} \ll \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1} < Q^{-\delta(n-1)}$.

Setzen wir dies in (3.17) ein, so erhalten wir

$$|\mathfrak{a}_{io}^* \, J \, d(G) \, \mathfrak{w}_n^*| \ll Q^{-\delta(n-1) - c_{io} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{t} c_{j\tau}} \qquad (1 \le i \le n) \tag{4.21}$$

Bei Berücksichtigung von (4.13) und, da die Vektoren $\mathfrak{a}_{1o}^*, \ldots, \mathfrak{a}_{no}^*$ linear unabhängig sind, erhalten wir $C_2 = n(t+1)$ bei genügend großen Q als möglichen Exponenten für die rechte Seite in (4.20).

Satz 3.1 (3.16) liefert weiter die Ungleichungen

$$(4.22) \qquad |\alpha^*_{i\tau} J\, d(G)\, \mathfrak{w}^*_n|_{p_\tau} \leq Q^{\sum_{j\neq i} c_{j\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

Für den Nachweis der Existenz einer Konstanten C_1 mit den gewünschten Eigenschaften wählen wir $(i_o, i_1, \ldots, i_t) \in S$ mit (4.19).

Für solche Indizes gilt insbesondere $\alpha^*_{i_\tau\tau}\, \mathfrak{w}^*_n \neq 0$ für alle τ mit $0 \leq \tau \leq t$.

Kombination von (4.15), (4.21), (4.22) ergibt

$$(4.23) \qquad |\alpha^*_{i_o o} J\, d(G)\, \mathfrak{w}^*_n| \cdot \prod_{\tau=1}^{t} |\alpha^*_{i_\tau \tau} J\, d(G)\, \mathfrak{w}^*_n|_{p_\tau} \ll Q^{-\frac{\delta}{4}} .$$

Sei W der größte gemeinsame Teiler der Komponenten von $J\, d(G)\, \mathfrak{w}^*_n$. Wir dividieren in (4.23) die linke Seite durch $|W| \cdot \prod_{\tau=1}^{t} |W|_{p_\tau}$ und erhalten

$$(4.24) \qquad |\alpha^*_{i_o o}\, \mathfrak{m}| \cdot \prod_{\tau=1}^{t} |\alpha^*_{i_\tau \tau}\, \mathfrak{m}|_{p_\tau} \ll Q^{-\frac{\delta}{4}} .$$

Der von den Komponenten von $\alpha^*_{i\tau}$ erzeugte Erweiterungskörper habe über $\mathbb{Q}$ den Grad $D_{i\tau}$ $(1 \leq i \leq n,\ 0 \leq \tau \leq t)$.

Sei $D = \max_{i,\tau} (D_{i\tau})$. Es gilt $|N(\alpha^*_{i_o o}\, \mathfrak{m})| \gg 1$; andererseits hat jede zu $\alpha^*_{i_o o}\, \mathfrak{m}$ konjugierte Zahl einen Absolutbetrag $\ll |\mathfrak{m}|$. Somit erhalten wir

$$(4.25) \qquad |\alpha^*_{i_o o}\, \mathfrak{m}| \gg |\mathfrak{m}|^{1-D} .$$

Weiter haben wir die Beziehung

$|N(\alpha^*_{i_\tau \tau}\, \mathfrak{m})|_{p_\tau} \gg |\mathfrak{m}|^{-D}$. Jede zu $\alpha^*_{i_\tau \tau}\, \mathfrak{m}$ Konjugierte hat einen p_τ-Betrag $\ll 1$. Daher gilt

$$(4.26) \qquad |\alpha^*_{i_\tau \tau}\, \mathfrak{m}|_{p_\tau} \gg |\mathfrak{m}|^{-D} .$$

Setzen wir (4.25) und (4.26) in (4.24) ein, so ergibt sich

$$(4.27) \qquad |\mathfrak{m}|^{1-(t+1)D} \ll Q^{-\frac{\delta}{4}} .$$

Damit ist für große Q auch eine mögliche Konstante C_1 bestimmt.

Der weitere Beweis von Satz 4.1 verläuft ganz genau wie in [9], [10] und [12].

5. Eine Folgerung zum Satz vom vorletzten Minimum

Satz 5.1 Die Vektoren $\mathfrak{a}_{1o},..,\mathfrak{a}_{no},..,\mathfrak{a}_{1t},..,\mathfrak{a}_{nt}$ seien wie im 4. Abschnitt $c_1,..,c_n,..,c_{1t},..,c_{nt}$ seien reelle Konstanten mit

$$(5.1)\qquad -1 \leq c_{i\tau} \leq 0 \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t).$$

$\mathfrak{M}$ sei eine nach oben nicht beschränkte Menge reeller Zahlen $Q > 1$. Zu jedem $Q \in \mathfrak{M}$ seien $A_1(Q),..,A_n(Q)$ positive reelle Zahlen mit

$$(5.2)\qquad \prod_{i=1}^{n} \{A_i(Q) \prod_{\tau=1}^{t} Q^{c_{i\tau}}\} = 1 \qquad \text{und}$$

$$(5.3)\qquad Q > \max\{A_1(Q),..,A_n(Q), A_1^{-1}(Q),..,A_n^{-1}(Q)\}.$$

$\Pi(Q)$ sei das durch

$$(5.4)\qquad |\mathfrak{a}_{io}\mathfrak{x}| \leq A_i(Q) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

beschriebene Parallelepiped, $G(Q)$ das zu den Ungleichungen

$$(5.5)\qquad |\mathfrak{a}_{i\tau}\mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

gehörende Teilgitter von $\mathbb{Z}^n$.

$\lambda_1(Q),..,\lambda_n(Q)$ seien die sukzessiven Minima von $\Pi(Q)$ auf $G(Q)$. Es sei $\delta > 0$ fest vorgegeben. Für alle $Q \in \mathfrak{M}$ gelte

$$(5.6)\qquad \lambda_{n-1}(Q) < Q^{-\delta}$$

$\mathfrak{w}_1(Q),..,\mathfrak{w}_n(Q)$ seien linear unabhängige Punkte auf $G(Q)$ mit dem

Index $J(Q)$ in $G(Q)$ und mit $\mathfrak{w}_i(Q) \in \lambda_i(Q)\Pi(Q)$ für alle $i(1 \leq i \leq n)$.
$\mathfrak{w}_1^*(Q), \ldots, \mathfrak{w}_n^*(Q)$ seien die dualen Punkte. Für $\mathfrak{r} \neq 0$ sei $\langle \mathfrak{r} \rangle$ der von $\mathfrak{r}$ erzeugte eindimensionale Unterraum.

Dann gibt es einen festen Vektor $\mathfrak{v} \in \mathbb{Z}^n$ und eine nach oben nicht beschränkte Teilmenge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{M}'$

$$\langle \mathfrak{w}_n^*(Q) \rangle = \langle \mathfrak{v} \rangle \tag{5.7}$$

erfüllt ist.

Beweis: Zu $Q \in \mathfrak{M}$ bestehe die Menge $S(Q)$ aus denjenigen $(t+1)$-Tupeln $(i_o, \ldots, i_t)$ von Indizes, für die

$$A_{i_o} \cdot \prod_{\tau=1}^{t} Q^{c_{i_\tau \tau}} \cdot Q^{\frac{\delta}{2}} \geq 1 \tag{5.8}$$

gilt. Wegen (5.2) ist $S(Q) \neq \emptyset$ für alle $Q \in \mathfrak{M}$. Mittels eines Schubfachschlusses können wir zu einer nach oben nicht beschränkten Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ übergehen, für die $S(Q)$ nicht mehr von Q abhängt. Seien Q_o die Konstante aus Satz 4.1 und $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_1 \cap \{Q \mid Q \in \mathbb{R},\ Q > Q_o\}$. Dann sind für alle $Q \in \mathfrak{M}_1'$ die Voraussetzungen von Satz 4.1 mit festem S erfüllt.

Wir betrachten zunächst ein festes $Q_1 \in \mathfrak{M}_1'$. Für den Punkt $J(Q_1) \cdot d(G(Q_1))\,\mathfrak{w}_n^*(Q_1) = \mathfrak{h}$ gilt wegen (4.12)

$$|\mathfrak{a}_{i_o}^* \mathfrak{h}| \cdot \left|\prod_{\tau=1}^{t}\right| \mathfrak{a}_{i_\tau \tau}^* \mathfrak{h}|_{p_\tau} = 0 \quad \text{für alle} \quad (i_o, i_1, \ldots, i_t) \in S \tag{5.9}$$

Wir zeigen, daß $\mathfrak{h}$ ein mögliches Exemplar für den gesuchten Vektor $\mathfrak{v}$ ist. Für $1 \leq \tau \leq t$ seien die Teilmengen T_τ von $\{1, \ldots, n\}$ durch die Bedingung: $i \in T_\tau$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}_{i\tau}^* \mathfrak{h} \neq 0$ erfüllt ist, charakterisiert.

Wir betrachten nun große $Q \in \mathfrak{M}_1'$. Sei $\Pi^*(Q)$ das durch

$$|\mathfrak{a}_{io}^* \mathfrak{r}| \leq A_i^{-1}(Q)\, d(G(Q)) \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{5.10}$$

definierte Parallelepiped; das Gitter $G^*(Q)$ entspreche den Ungleichungen

$$(5.11) \qquad |\alpha^*_{i\tau}\,\mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq Q^{\sum_{j\neq i} c_{j\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t).$$

Nach (3.7) erhalten wir bei Berücksichtigung von (5.5)

$$(5.12) \qquad Q^{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{t} c_{i\tau}} \ll d(G(Q)) \ll Q^{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{t} c_{i\tau}}$$

$\lambda^*_1(Q), \ldots, \lambda^*_n(Q)$ seien die Minima von $\Pi^*(Q)$ auf $G^*(Q)$. Da $\lambda_{n-1}(Q) < Q^{-\delta}$ gilt, können wir mittels Satz 3.1 folgern $\lambda^*_2(Q) \gg Q^{\delta}$.
Für genügend große $Q \in \mathfrak{M}'_1$ gilt daher

$$(5.13) \qquad \lambda^*_2(Q) > 1 .$$

(5.13) besagt, daß für große Q alle Punkte $\mathfrak{x} \in \Pi^*(Q) \cap G^*(Q)$ proportional sind. Nach (4.10), (4.11) gilt für genügend großes Q

$$(5.14) \qquad J(Q)\, d(G(Q))\, \mathfrak{w}^*_n(Q) \in \Pi^*(Q) \cap G^*(Q) .$$

Für den oben gewählten Punkt $\mathfrak{y}$ haben wir, da Q_1 fest ist,

$$(5.15) \qquad |\alpha^*_{io}\,\mathfrak{y}| \ll 1 \qquad (1 \leq i \leq n), \text{ sowie}$$

$$(5.16) \qquad |\alpha^*_{i\tau}\,\mathfrak{y}|_{p_\tau} \ll 1 \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t) .$$

Für reelles α sei $[\alpha]$ die größte ganze Zahl $\leq \alpha$. Wir setzen

$$(5.17) \qquad g_{i\tau}(Q) = \left[\frac{\log Q}{\log p_\tau} \cdot \sum_{j\neq i} c_{j\tau}\right] \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t).$$

Weiter sei

$$(5.18) \qquad g_\tau(Q) = \min_{i \in T_\tau} g_{i\tau}(Q) \qquad (1 \leq \tau \leq t).$$

Nach Definition der Mengen T_τ und wegen (5.16) gibt es eine rationale Konstante c_1, so daß

$$(5.19)\qquad c_1 \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{-g_\tau(Q)} \cdot \mathfrak{y} \in G^*(Q)$$

für alle $Q \in \mathfrak{M}$ erfüllt ist.

Wegen (5.17) sehen wir die Richtigkeit von

$$(5.20)\qquad \prod_{\tau=1}^{t} \max_{i \in T_\tau} Q^{-\sum_{j\neq i} c_{j\tau}} \ll \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{-g_\tau(Q)} \ll \prod_{\tau=1}^{t} \max_{i \in T_\tau} Q^{-\sum_{j\neq i} c_{j\tau}}$$

ein. Zur Abkürzung setzen wir

$$(5.21)\qquad c_1 \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{-g_\tau(Q)} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(Q) .$$

Wir wollen zeigen $\mathfrak{y}(Q) \in \Pi^*(Q)$ für genügend große $Q \in \mathfrak{M}'_1$ also nach (5.10) $|\mathfrak{a}^*_{io}\, \mathfrak{y}(Q)| \leq A_i^{-1}(Q)\, d(G(Q))$ für alle i $(1 \leq i \leq n)$.

Im folgenden beachten wir, daß für $Q \in \mathfrak{M}'_1$ die Menge S fest ist.

Sei i mit $1 \leq i \leq n$ beliebig vorgegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) es existieren Indizes $i_1 \in T_1, \dots, i_t \in T_t$ mit

$$(5.22)\qquad (i, i_1, \dots, i_t) \in S .$$

(2) für alle Indizes $i_1 \in T_1, \dots, i_t \in T_t$ gilt

$$(5.23)\qquad (i, i_1, \dots, i_t) \notin S .$$

Im Fall (1) können wir nach Definition der Mengen T_τ und wegen Satz 4.1 schließen $\mathfrak{a}^*_{io}\, \mathfrak{y}(Q) = 0$, so daß $\mathfrak{y}(Q)$ für solche i (5.10) erfüllt.

Im Fall (2) gilt wegen (5.15) und (5.20)

$$(5.24)\qquad |\mathfrak{a}^*_{io}\, \mathfrak{y}(Q)| \ll \prod_{\tau=1}^{t} \max_{i \in T_\tau} Q^{-\sum_{j\neq i} c_{j\tau}} .$$

Nach Definition von S können wir mit (5.23) für $Q \in \mathfrak{M}_1$ schließen

$$(5.25)\qquad A_i^{-1}(Q) \cdot \prod_{\tau=1} Q^{-c_{i_\tau \tau}} \cdot Q^{-\frac{\delta}{2}} > 1 \quad \text{für alle } i_1 \in T_1, \dots, i_t \in T_t .$$

Kombination von (5.12), (5.24) und (5.25) liefert für große $Q \in \mathfrak{M}'_1$

$$|\alpha^*_{io}\, \mathfrak{y}(Q)| \leq A_i^{-1}(Q)\, d(G(Q)) \; . \tag{5.26}$$

Damit ist Satz 5.1 bewiesen.

Im Falle $d = n-1$ gestattet Satz 5.1 bereits eine ähnliche Aussage wie die des Teilraumsatzes, dessen Beweis wir erbringen wollen. Das nun folgende Lemma von Davenport erlaubt es, Bedingung (5.6) in Satz 5.1 durch die wesentlich schwächere Bedingung $\lambda_{n-1} < \lambda_n \cdot Q^{-\delta}$ zu ersetzen, womit dann der Fall $d = n-1$ von Satz 2.1 bewiesen ist. Wir zitieren eine leicht verallgemeinerte Fassung von [10] Lemma 7.

Lemma 5.1 (SCHMIDT [10]) $\alpha_{1o}, .., \alpha_{no}, .., \alpha_{n1}, .., \alpha_{1t}, .., \alpha_{nt}$ seien $t+1$ Systeme von jeweils n linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{Q}^n_{p_\tau}$ $(1 \leq \tau \leq t)$, deren Determinante jeweils 1 sei. $A_1, .., A_n$ seien positive reelle Zahlen, und $f_{i\tau}$ seien ganze Zahlen ≤ 0 $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$. Es gelte

$$\prod_{i=1}^{n} \{A_i \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{f_{i\tau}}\} = 1. \tag{5.27}$$

$\lambda_1, .., \lambda_n$ seien die sukzessiven Minima des durch

$$|\alpha_{io}\, \mathfrak{x}| \leq A_i \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{5.28}$$

gegebenen konvexen Körpers Π auf dem Gitter G, das durch die Ungleichungen

$$|\alpha_{i\tau}\, \mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq p_\tau^{f_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)\; . \tag{5.29}$$

Ferner seien $\rho_1, .., \rho_n$ reelle Zahlen mit

$$\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_n = 1 \qquad , \tag{5.30}$$

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq .. \geq \rho_n > 0 \qquad \text{und} \tag{5.31}$$

(5.32) $$\rho_1\lambda_1 \leq \rho_2\lambda_2 \leq \dots \leq \rho_n\lambda_n .$$

Dann gibt es eine Permutation σ der Zahlen $\{1,2,..,n\}$, so daß die sukzessiven Minima λ'_i $(1 \leq i \leq n)$ des durch

(5.33) $$|\alpha_{io}\mathfrak{x}| \leq A_i \rho_{\sigma(i)}^{-1} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

definierten konvexen Körpers Π' auf dem Gitter G_1 den Ungleichungen

(5.34) $$2^{-n}\rho_i\lambda_i \leq \lambda'_i \leq 2^{n^2} \cdot n!\, \rho_i\lambda_i$$

genügen. Seien weiter $\mathfrak{w}_1,..,\mathfrak{w}_n$ linear unabhängige Punkte auf dem Gitter G mit

(5.35) $$|\alpha_{io}\mathfrak{w}_j| \leq \lambda_j A_i \qquad (1 \leq i,\ j \leq n).$$

S^{j-1} sei der von $\mathfrak{w}_1,..,\mathfrak{w}_{j-1}$ erzeugte Unterraum. Dann gilt für jeden Punkt $\mathfrak{w} \in G \setminus S^{j-1}$

(5.36) $$\max\{\rho_{\sigma(1)} A_1^{-1}|\alpha_{1o}\mathfrak{w}|,..,\rho_{\sigma(n)} A_n^{-1}|\alpha_{no}\mathfrak{w}|\} \geq 2^{-n}\rho_j\lambda_j .$$

Der Beweis dieses Lemmas ist identisch mit dem in [10]; wir müssen nur die Bedingung $\mathfrak{w} \in \mathbb{Z}^n$ durch $\mathfrak{w} \in G$ ersetzen.

Damit beweisen wir

Satz 5.2 $\alpha_{1o},..,\alpha_{n\sigma}$ seien linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ mit algebraischen Koeffizienten. Für $1 \leq \tau \leq t$ seien $\alpha_{1\tau},..,\alpha_{n\tau}$ linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{Q}^n_{p_\tau}$ mit algebraischen Koeffizienten. Die Koeffizientendeterminante sei jeweils gleich Eins; $c_{1o},..,c_{no},..,c_{1t},..,c_{nt}$ seien reelle Konstanten

(5.37) $$|c_{io}| \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n), \quad -1 \leq c_{i\tau} \leq 0 \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

und

(5.38) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=o}^{t} c_{i\tau} = 0 .$$

$\mathfrak{M}$ sei eine nach oben nicht beschränkte Menge reeller Zahlen $Q > 1$. $\lambda_1(Q), \ldots, \lambda_n(Q)$ seien die sukzessiven Minima des durch

(5.39) $$|\mathfrak{a}_{io}\,\mathfrak{x}| \leq Q^{c_{io}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

definierten Parallelepipeds $\Pi(Q)$ auf dem durch

(5.40) $$|\mathfrak{a}_{i\tau}\,\mathfrak{x}|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

beschriebenen Gitter $G(Q)$. $\mathfrak{w}_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}_n(Q)$ seien linear unabhängige Punkte auf $G(Q)$ mit $\mathfrak{w}_i(Q) \in \lambda_i(Q)\,\Pi(Q)$ $(1 \leq i \leq n)$, und $\mathfrak{w}_1^*(Q), \ldots, \mathfrak{w}_n^*(Q)$ seien die dualen Punkte. Sei $\delta > 0$ vorgegeben. Für alle $Q \in \mathfrak{M}$ gelte

(5.41) $$\lambda_{n-1}(Q) < \lambda_n(Q)\, Q^{-\delta} .$$

Dann gibt es einen festen Vektor $\mathfrak{v} \in \mathbb{Z}^n$ und eine nach oben nicht beschränkte Teilmenge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{M}'$

(5.42) $$\langle \mathfrak{w}_n^*(Q) \rangle = \langle \mathfrak{v} \rangle$$

erfüllt ist.

Beweis: Wir setzen

(5.43) $$\rho_o(Q) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(Q) \cdot \frac{\lambda_{n-1}(Q)}{\lambda_n(Q)} \right\}^{\frac{1}{n}} , \qquad \text{sowie}$$

(5.44) $$\rho_1(Q) = \frac{\rho_o(Q)}{\lambda_1(Q)}, \ldots, \rho_{n-1}(Q) = \frac{\rho_o(Q)}{\lambda_{n-1}(Q)},\ \rho_n(Q) = \frac{\rho_o(Q)}{\lambda_{n-1}(Q)} .$$

Mit dieser Wahl der Größen $\rho_i(Q)$ sind für alle $Q \in \mathfrak{M}$ die Bedingungen (5.30) - (5.32) erfüllt.

Nach Lemma 5.1 gibt es also eine Permutation σ_Q der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, so daß zwischen den sukzessiven Minima $\lambda_i(Q)$ von $\Pi(Q)$ auf $G(Q)$ und den sukzessiven Minima $\lambda'(Q)$ des durch

$$(5.45)\qquad |\mathfrak{a}_{io}\,\mathfrak{x}| \leq Q^{c_{io}}\,\rho^{-1}_{\sigma_Q(i)}(Q) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

beschriebenen Parallelepipeds $\Pi'(Q)$ auf $G(Q)$ die Beziehung (5.34) besteht. Kombination von (5.34) mit (5.41), (5.43), (5.44) ergibt bei Berücksichtigung von $1 \ll \lambda_1(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(Q) \ll 1$

$$(5.46)\qquad \lambda'_{n-1}(Q) \ll \rho_{n-1}(Q)\,\lambda_{n-1}(Q) = \rho_o(Q) \ll \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{n}} < Q^{-\frac{\delta}{n}} \qquad ;$$

dabei hängen die Konstanten in (5.46) nur von n und den Primzahlen $p_1, \ldots, p_t$ ab.

Da die Vektoren $\mathfrak{a}_{1o}, \ldots, \mathfrak{a}_{no}$ linear unabhängig sind, gilt

$$(5.47)\qquad \max\{|\mathfrak{a}_{1o}\,\mathfrak{x}|, \ldots, |\mathfrak{a}_{no}\,\mathfrak{x}|\} \gg \|\mathfrak{x}\| \geq 1 \geq Q^{c_{io}-1} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

für alle $Q \in \mathfrak{M}$ und jeden Punkt $\mathfrak{x} \in G(Q)$, $\mathfrak{x} \neq 0$. Daraus schließen wir

$$(5.48)\qquad \lambda_1(Q) \gg Q^{-1} \quad \text{für alle } Q \in \mathfrak{M}\ .$$

$\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ seien die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{Z}^n$. Wir definieren

$$(5.49)\qquad h_\tau(Q) = \min_{1 \leq i \leq n} \left[c_{i\tau} \frac{\log Q}{\log p_\tau} \right] \qquad (1 \leq \tau \leq t)$$

und

$$(5.50)\qquad f(Q) = \prod_{\tau=1}^{t} p_\tau^{-h_\tau(Q)} \quad .$$

Dann gibt es eine nur von den Vektoren $\mathfrak{a}_{11}, \ldots, \mathfrak{a}_{nt}$ abhängende ganzrationale Konstante c_2, so daß die Punkte $c_2 f(Q)\mathfrak{e}_j$ den Ungleichungen

$$(5.51)\qquad |\mathfrak{a}_{i\tau}\, c_2 f(Q)\, \mathfrak{e}_j|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i,\ j \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

genügen. Das bedeutet aber $c_2 f(Q)\mathfrak{e}_j \in G(Q)$. Wegen (5.36), (5.49) und (5.50) gilt weiter

$$(5.52)\qquad |\alpha_{io} c_2 f(Q) e_j| \ll Q^{-\sum_{\tau=1}^{t} \min_i c_{i\tau}} \leq Q^{c_{io}+t+1} \qquad (1 \leq i, j \leq n) .$$

Aus (9.52) schließen wir

$$(5.53)\qquad \lambda_n(Q) \ll Q^{t+1} \qquad \text{für alle } Q \in \mathfrak{M} .$$

Die Ungleichungen (5.48) und (5.53) liefern uns obere und untere Schranken für die Größen $\rho_i(Q)$: Wegen (5.43) und $1 \ll \lambda_1(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(Q) \ll 1$ erkennen wir sofort die Gültigkeit von $\rho_o(Q) \ll 1$. Weiter ergibt (5.48) mit (5.44)

$$(5.54)\qquad \rho_1(Q) = \rho_o(Q)\, \lambda_1^{-1}(Q) \ll Q.$$

(5.44) und (5.53) besagen

$$(5.55)\qquad \rho_n(Q) = \lambda_{n-1}^{-1}(Q) \cdot \rho_o(Q) \gg \lambda_{n-1}^{-\frac{n-1}{n}}(Q) \cdot \lambda_n^{-\frac{1}{n}}(Q) \geq \lambda_n^{-1}(Q) \gg Q^{-t-1} .$$

Vergleich von (5.31), (5.54) und (5.55) ergibt

$$(5.56)\qquad Q^{-t-1} \ll \rho_n(Q) = \rho_{n-1}(Q) = \ldots = \rho_1(Q) \ll Q$$

für alle $Q \in \mathfrak{M}$.

Mit (5.56) können wir die auf der rechten Seite von (5.45) stehenden Produkte $Q^{c_{io}} \rho^{-1}_{\sigma_Q(i)}(Q) =: A_i(Q)$ folgendermaßen abschätzen:

$$(5.57)\qquad Q^{-t-2} \ll A_i(Q) \ll Q^{t+2} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Wegen (5.30) und (5.38) ist

$$(5.58)\qquad \prod_{i=1}^{n} (A_i(Q) \cdot \prod_{\tau=1}^{t} Q^{c_{i\tau}}) = 1 \qquad \text{erfüllt.}$$

Für große $Q \in \mathfrak{M}$ erhalten wir vermöge (5.57) und (5.36)

$$(5.59)\qquad Q^{t+3} \geq \max \{A_i(Q),\ A_i^{-1}(Q),\ Q^{-c_{i\tau}} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)\},$$

sowie vermöge (5.46)

$$(5.60) \qquad \lambda'_{n-1}(Q) < (Q^{t+3})^{-\delta'}$$

mit $\delta' = \frac{\delta}{(t+4)n}$. Damit sind für das Parallelepiped $\Pi'(Q)$ und das Gitter $G(Q)$, δ' an Stelle von δ und $\mathfrak{N} = \{Q^{t+3} \mid Q \in \mathfrak{M}, Q \text{ genügend groß}\}$ die Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt.

$\mathfrak{w}'_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}'_n(Q)$ seien linear unabhängige Punkte auf dem Gitter $G(Q)$ mit $\mathfrak{w}'_i(Q) \in \lambda'_i(Q)\Pi'(Q)$ $(1 \leq i \leq n)$, und $\mathfrak{w}'^*_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}'^*_n(Q)$ seien die dualen Punkte. Nach Satz 5.1 gibt es eine nach oben nicht beschränkte Teilmenge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$, so daß

$$(5.61) \qquad \langle \mathfrak{w}'^*_n(Q) \rangle = \langle \mathfrak{v}' \rangle \quad \text{für alle } Q \in \mathfrak{M}'$$

mit von Q unabhängigen $\mathfrak{v}' \in \mathbb{Z}^n$ gilt.
Sei T^{n-1} der von $\mathfrak{w}_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}_{n-1}(Q)$ erzeugte Unterraum. Wir zeigen $T^{n-1} = \langle \mathfrak{w}'_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}'_{n-1}(Q) \rangle$. Daraus können wir dann auf $\langle \mathfrak{w}^*_n(Q) \rangle = \langle \mathfrak{w}'^*_n(Q) \rangle$ schließen und erhalten mit (5.61) die Behauptung des Satzes. Nach (5.36) gilt für jeden Punkt $\mathfrak{w} \in G(Q)$, $\mathfrak{w} \notin T^{n-1}$

$$(5.62) \qquad \max_{1 \leq i \leq n} \{ \rho_{\sigma_Q(i)} Q^{-c_{io}} |\mathfrak{a}_{io}\mathfrak{w}| \} \gg \lambda'_n(Q) \gg 1 .$$

(vgl. (5.34), (5.60)). Wegen (5.60) folgt aus (5.62) insbesondere $\mathfrak{w}'_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}'_{n-1}(Q) \in T^{n-1}(Q)$.
Damit ist Satz 5.2 bewiesen.

6. Beweis des Teilraumsatzes

Eine Kombination von Lemma 3.1, Lemma 3.2, Satz 3.2 und Satz 5.2 ermöglicht es uns, Satz 2.1 zu beweisen. Den Formen $L_{1o}, \ldots, L_{no}, \ldots, L_{1t}, \ldots, L_{nt}$ entsprechen selbstverständlich reelle bzw. p_τ-adische Vektoren $\mathfrak{a}_{1o}, \ldots, \mathfrak{a}_{no}, \ldots, \mathfrak{a}_{1t}, \ldots, \mathfrak{a}_{nt}$.
Wir nehmen an, (2.5) sei für alle Q aus einer nach oben nicht beschränkten Menge $\mathfrak{N}$ reeller Zahlen erfüllt und setzen

(6.1) $$k = n - d\,.$$

Für $\sigma \in C(n,k)$ sei ${}_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ $(0 \leq \tau \leq t)$ wie in (3.24) definiert, weiter sei für $\sigma \in C(n,k)$

(6.2) $$c_{\sigma\tau} = \sum_{i\in\sigma} c_{i\tau} \qquad (0 \leq \tau \leq t)\,.$$

Gemäß (2.1) und (2.2) gilt dann

(6.3) $$\sum_{\sigma\in C(n,k)} \sum_{\tau=0}^{t} c_{\sigma\tau} = 0 \qquad \text{sowie}$$

(6.4) $$-k \leq c_{\sigma\tau} \leq 0 \qquad \text{für alle } \tau \text{ mit } 1 \leq \tau \leq t \text{ und alle } \sigma \in C(n,k),$$

(6.5) $$|c_{\sigma o}| \leq k \qquad \text{für alle } \sigma \in C(n,k)\,.$$

Wir wenden nun Satz 3.2 auf das durch

(6.6) $$|{}_k\mathfrak{a}_{\sigma o}\,\mathfrak{x}^{(k)}| \leq Q^{c_{\sigma o}} \qquad (\sigma \in C(n,k))$$

gegebene Parallelepiped $\Pi_k(Q)$ und das Gitter $G_k(Q)$, welches vermöge

(6.7) $$|{}_k\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\,\mathfrak{x}^{(k)}|_{p_\tau} \leq Q^{c_{\sigma\tau}} \qquad (\sigma \in C(n,k),\ 1 \leq \tau \leq t)$$

definiert sei. Mit $m = \binom{n}{k}$ seien $\nu_1(Q),\ldots,\nu_m(Q)$ die sukzessiven Minima von $\Pi_k(Q)$ auf $G_k(Q)$. Nach (3.36) gilt

(6.8) $$\nu_m(Q) \ll \lambda_{d+1}(Q)\cdot\lambda_{d+2}(Q)\cdot\ldots\cdot\lambda_n(Q) \ll \nu_m(Q) \qquad \text{und}$$

(6.9) $$\nu_{m-1}(Q) \ll \lambda_d(Q)\cdot\lambda_{d+2}(Q)\cdot\ldots\cdot\lambda_n(Q) \ll \nu_{m-1}(Q)\,.$$

Kombination von (2.5), (6.8) und (6.9) liefert $\nu_{m-1}(Q) \ll \nu_m(Q)\cdot Q^{-\delta}$ und damit für große Q

(6.10) $$\nu_{m-1}(Q) < \nu_m(Q)\, Q^{-\frac{\delta}{2}}\,.$$

Wir können somit Satz 5.2 auf die Parallelepipede $\Pi_k(Q)$ und die Gitter $G_k(Q)$ mit $Q \in \mathfrak{N}$, Q genügend groß anwenden.

Den Bedingungen (5.37), (5.38) entsprechen (6.3) - (6.5), wobei sich die Schranke k für die Exponentensysteme an Stelle der Schranke 1 nicht als störend erweist, da in Satz 5.2 nur in Q gleichmäßige Schranken benötigt werden. (6.10) entspricht (5.41).

$\mathfrak{v}_1(Q), \ldots, \mathfrak{v}_m(Q)$ seien linear unabhängige Punkte auf dem Gitter $G_k(Q)$ mit $\mathfrak{v}_j(Q) \in \nu_j(Q)\, \Pi_k(Q)$ $(1 \leq j \leq m)$. $\mathfrak{v}_1^*(Q), \ldots, \mathfrak{v}_m^*(Q)$ seien die dualen Punkte. Nach Satz 5.2 gibt es dann eine nach oben beschränkte Teilmenge $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{N}'$

$$\langle \mathfrak{v}_m^*(Q) \rangle = \langle \mathfrak{v}^{(k)} \rangle \tag{6.11}$$

mit einem festen, insbesondere von Q unabhängigen Vektor $\mathfrak{v}^{(k)} \in \mathbb{Z}^m$.

$\mathfrak{w}_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}_n(Q)$ seien linear unabhängige Punkte auf dem Gitter G(Q) mit $\mathfrak{w}_i(Q) \in \lambda_i(Q)\, \Pi(Q)$ $(1 \leq i \leq n)$. Für $\rho = \{i_1 < \ldots < i_k\} \in C(n,k)$ sei $\mathfrak{w}_\rho = \mathfrak{w}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{w}_{i_k}$. Nach Satz 3.2 gilt $\mathfrak{w}_\rho(Q) \in G_k(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{N}$ und

$$|\mathfrak{a}_{\sigma o}\, \mathfrak{w}_\rho| \ll \nu_{m-1}\, Q^{c_{\sigma o}} \tag{6.12}$$

mit $\sigma, \rho \in C(n,k)$, $\rho \neq \rho_m = \{d+1, d+2, \ldots, n\}$.

Beachten wir (6.10), so können wir schließen, daß die m-1 Vektoren $\mathfrak{w}_\rho(Q)$ mit $\rho \in C(n,k)$, $\rho \neq \rho_m$ für alle genügend großen $Q \in \mathfrak{N}$ denselben Teilraum wie $\mathfrak{v}_1(Q), \ldots, \mathfrak{v}_{m-1}(Q)$ aufspannen. Also gilt

$$\langle (\mathfrak{w}_{\rho_m}(Q))^* \rangle = \langle \mathfrak{v}_m^*(Q) \rangle \quad \text{für alle } Q \in \mathfrak{N}. \tag{6.13}$$

Nach Lemma 3.2 bedeutet das

$$\langle (\mathfrak{w}^*(Q))_{\rho_m} \rangle = \langle \mathfrak{v}_m^*(Q) \rangle \quad \text{für alle } Q \in \mathfrak{N}. \tag{6.14}$$

Kombination von (6.11) und (6.14) ergibt

$$(6.15) \qquad \langle \mathfrak{w}^*_{d+1}(Q) \wedge .. \wedge \mathfrak{w}^*_n(Q) \rangle = \langle \mathfrak{v}^{(k)} \rangle$$

für alle $Q \in \mathfrak{N}'$. Nach Lemma 3.1 können wir schließen, daß die Vektoren $\mathfrak{w}^*_{d+1}(Q), .., \mathfrak{w}^*_n(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{N}'$ in einem festen rationalen Unterraum S^* der Dimension n-d liegen.
Das orthogonale Komplement von S^* liefert dann den festen rationalen Unterraum S^d, in dem die Punkte $\mathfrak{w}_1(Q), .., \mathfrak{w}_d(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{N}'$ liegen.

7. Beweis von Satz 1.2

Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung (1.16) notwendig ist. Gibt es einen rationalen Unterraum S^d der Dimension $d > 0$ mit $c(S^d) > 0$, so unterscheiden wir gemäß der Definition von $c(S^d)$ die Fälle

(1) $\quad r_o < d \qquad\qquad$ (2) $\quad r_o = d.$

Gilt $r_o < d$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Teilgitter G von $\mathbb{Z}^n$ einen Punkt $\mathfrak{x} \in S^d \cap (G \setminus \{0\})$ mit

$$(7.1) \qquad |L_{io}(\mathfrak{x})| < \varepsilon \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Das bedeutet aber, daß es zu beliebigem $Q > 0$, $\delta > 0$ einen Punkt $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gibt, der den simultanen Ungleichungen (1.12), (1.13) genügt. Demnach haben wir kein allgemeines p-adisches Roth System vorliegen.
Gilt $r_o = d$, so sei die positive Zahl δ durch die Gleichung $2d(t+1)\delta = c(S^d)$ bestimmt. Wir wenden den Satz von Minkowski auf das durch die p-adischen Ungleichungen (1.13) in S^d induzierte d-dimensionale Gitter an. Demnach gibt es zu jedem $Q > 0$ ein $\mathfrak{x} \in S^d \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$ mit

$$(7.2) \qquad |L_{s_{oi}o}(\mathfrak{x})| \ll Q^{c_{s_{oi}o} - 2\delta} \qquad (1 \leq i \leq d)$$

$$(7.3) \qquad |L_{s_{\tau i}\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \ll Q^{c_{s_{\tau i}\tau} - 2\delta} \qquad (1 \leq i \leq r_\tau,\ 1 \leq \tau \leq t) .$$

Berücksichtigen wir (1.14), die Konstruktion der Zahlen $s_{\tau i}$ und, daß $\mathfrak{x} \in S^d$ gilt, so folgt aus (7.2), (7.3)

$$(7.4) \qquad |L_{io}(\mathfrak{x})| \ll Q^{c_{io}-2\delta} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$(7.5) \qquad |L_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \ll Q^{c_{i\tau}-2\delta} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t) \ .$$

Das bedeutet jedoch für große Q, daß auch (1.12) und (1.13) erfüllt sind. Somit ist auch in diesem Falle $(L_{1o},..,L_{no},..,L_{1t},..,L_{nt};$ $c_{1o},..,c_{no},..,c_{1t},..,c_{nt})$ kein allgemeines p-adisches Roth-System.

Der Nachweis, daß (1.16) auch hinreichend ist, gelingt mit Hilfe des Teilraumsatzes. Wir nehmen an, $(L_{1o},..,L_{no},..,L_{1t},..,L_{nt};$ $c_{1o},..,c_{no},..,c_{1t},..,c_{nt})$ sei kein allgemeines p-adisches Roth-System, und konstruieren einen rationalen Unterraum S^d der Dimension $d > 0$ mit $c(S^d) > 0$.

Sind die Formen $L_{10},..,L_{no}$ linear abhängig, so gilt $c(\mathbb{Q}^n) = 1$. Wir können daher im folgenden annehmen, daß die Formen $L_{1o},..,L_{no}$ linear unabhängig sind.

Wir nehmen weiter an, es gebe ein τ mit $1 \leq \tau \leq t$, so daß die Formen $L_{1\tau},..,L_{n\tau}$ linear abhängig sind. Ihr Rang sei $r_\tau < n$. Zum Raum $\mathbb{Q}^n$ konstruieren wir dann die Zahlen $s_{\tau 1},..,s_{\tau r_\tau}$. Sei $U_\tau = \{s_{\tau 1},..,s_{\tau r_\tau}\}$.

Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten:

(1) Es gibt ein $j \in \{1,2,..,n\}$, und ein τ mit $1 \leq \tau \leq t$, $j \notin U_\tau$ mit $c_{j\tau} < 0$.

(2) Für alle τ mit $1 \leq \tau \leq t$ und alle j mit $j \in \{1,2,..,n\}$, $j \notin U_\tau$ gilt $c_{j\tau} = 0$.

Im Fall (1) folgt aus (1.9) unmittelbar $c(\mathbb{Q}^n) > 0$.

Im Fall (2) beachten wir zunächst, daß wir o.B.d.A. voraussetzen können, daß die Koeffizienten der p-adischen Formen ganzalgebraisch sind. Zu den Formen $L_{k\tau}$ mit $k \in U_\tau$ wählen wir $n-r_\tau$ unter den Formen $X_1,..,X_n$, so daß wir n linear unabhängige Formen erhalten. O.B.d.A.

nehmen wir an, daß wir die Formen $X_{r_\tau+1}, \dots, X_n$ wählen können.

Wir bezeichnen das System $L_{k\tau}$ $(k \in U_\tau)$, $X_{r_\tau+1}, \dots, X_n$ mit $L'_{i\tau}$ $(1 \leq i \leq n)$ und erkennen unmittelbar, daß die simultanen Ungleichungen

$$(7.6) \qquad |L_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

$$(7.7) \qquad |L'_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

für $\mathfrak{x} \in \mathbb{Z}^n$ äquivalent sind. Weiter erhalten wir für jeden rationalen Unterraum $S^d \neq 0$:

Ist $c(S^d)$ die zu dem System $(L_{1o}, \dots, L_{no}, \dots, L_{11}, \dots, L_{n1}, \dots, L_{1\tau}, \dots, L_{n\tau}, \dots, L_{1t}, \dots, L_{nt}; c_{1o}, \dots, c_{nt})$ gehörende Konstante und $c'(S^d)$ die zu $(L_{1o}, \dots, L_{no}, L_{11}, \dots, L_{n1}, \dots, L'_{1\tau}, \dots, L'_{n\tau}, \dots, L_{1t}, \dots, L_{nt}; c_{1o}, \dots, c_{nt})$ gehörende Konstante, so gilt

$$(7.8) \qquad c(S^d) = c'(S^d) \quad .$$

Wegen (7.6) - (7.8) können wir daher im Fall (2) voraussetzen, daß für alle τ mit $1 \leq \tau \leq t$ die Formen $L_{1\tau}, \dots, L_{n\tau}$ linear unabhängig sind. Damit sind wir in der Lage, Satz 2.1 anwenden zu können.

Durch die simultanen Ungleichungen

$$(7.9) \qquad |L_{io}(\mathfrak{x})| \leq Q^{c_{io}} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

werde das Parallelepiped $\Pi(Q)$ definiert;

die Ungleichungen

$$(7.10) \qquad |L_{i\tau}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{i\tau}} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

mögen das Gitter $G(Q) \subset \mathbb{Z}^n$ definieren. $\lambda_1(Q), \dots, \lambda_n(Q)$ seien die sukzessiven Minima von $\Pi(Q)$ auf $G(Q)$. Nach (1.9) und dem Satz von Minkowski gilt

$$(7.11) \qquad 1 \ll \lambda_1(Q) \cdot \dots \cdot \lambda_n(Q) \ll 1$$

mit von Q unabhängigen Konstanten.

Aus der Annahme, daß $(L_{1o}, \ldots, L_{nt}, c_{1o}, \ldots, c_{nt})$ kein allgemeines p-adisches Roth-System ist, schließen wir, daß es ein $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\lambda_1(Q) < Q^{-\epsilon} \tag{7.12}$$

für alle Q aus einer nach oben nicht beschränkten Menge reeller Zahlen $\mathfrak{M}$. Berücksichtigen wir (7.11), so erhalten wir über einen Schubfachschluß eine nach oben nicht beschränkte Teilmenge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$ und eine feste Zahl d mit $1 \leq d \leq n-1$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{M}'$ $\lambda_d(Q) \ll \lambda_{d+1} Q^{-\epsilon/(n-1)}$ erfüllt ist. Mit $\delta = \frac{\epsilon}{n}$ existiert somit eine nach oben nicht beschränkte Menge $\mathfrak{N}$ reeller Zahlen Q, so daß für alle $Q \in \mathfrak{N}$

$$\lambda_d(Q) < \lambda_{d+1}(Q) \cdot Q^{-\delta} \tag{7.13}$$

erfüllt ist.

Sei S^d der d-dimensionale rationale Unterraum von Satz 2.1.
Wir setzen

$$\Pi'(Q) = \Pi(Q) \cap S^d \qquad \text{und} \tag{7.14}$$

$$G'(Q) = G(Q) \cap S^d . \tag{7.15}$$

$\lambda'_1(Q), \ldots, \lambda'_d(Q)$ seien die sukzessiven Minima von $\Pi'(Q)$ auf $G'(Q)$.

$V'(Q)$ sei das Volumen des d-dimensionalen konvexen Körpers $\Pi'(Q)$, $d(G'(Q))$ sei die Gitterdeterminante des d-dimensionalen Gitters $G'(Q)$. Nach dem Satz von Minkowski (vgl. [2] S. 203) gilt

$$1 \ll \lambda'_1(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda'_d(Q) \cdot V'(Q) \cdot d(G'(Q))^{-1} \ll 1 \tag{7.16}$$

mit nur von S^d abhängender Konstante. Nach Satz 2.1 gibt es eine nach oben nicht beschränkte Teilmenge $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$, so daß für alle $Q \in \mathfrak{N}'$ die ersten d sukzessiven Minima von $\Pi(Q)$ auf $G(Q)$ durch Punkte $\mathfrak{w}_1(Q), \ldots, \mathfrak{w}_d(Q) \in S^d$ angenommen werden. Somit haben wir für alle $Q \in \mathfrak{N}'$

$$(7.17) \qquad \lambda_1'(Q) = \lambda_1(Q), \ldots, \lambda_d'(Q) = \lambda_d(Q) .$$

Aus (7.13) schließen wir auf

$$(7.18) \qquad \lambda_i(Q) < (\lambda_{d+1}(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(Q))^{\frac{1}{n-d}} \cdot Q^{-\delta}$$

für alle i mit $1 \leq i \leq d$ und alle $Q \in \mathfrak{N}'$.

Kombination von (7.11), (7.17) und (7.18) ergibt

$$(7.19) \qquad \lambda_1'(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda_d'(Q) = (\lambda_1(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda_d(Q))^{\frac{d}{n} + \frac{n-d}{n}}$$

$$< (\lambda_1(Q) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(Q))^{\frac{d}{n}} \cdot Q^{-\frac{d\delta(n-d)}{n}}$$

$$\ll Q^{-\frac{d \cdot \delta(n-d)}{n}} = Q^{-\eta} \qquad \text{für alle } Q \in \mathfrak{N}'$$

mit $\eta = \frac{d\delta(n-d)}{n} > 0$. Vergleichen wir (7.19) mit (7.16), so erhalten wir

$$(7.20) \qquad V'(Q) \cdot d(G'(Q))^{-1} \gg Q^{\eta} \quad \text{für alle } Q \in \mathfrak{N}' .$$

Zum Unterraum S^d seien die Zahlen $s_{o1}, \ldots, s_{od}, \ldots, s_{t1}, \ldots, s_{td}$ wie im ersten Abschnitt definiert. Durch die Ungleichungen

$$(7.21) \qquad |L_{s_{oj}^o}(\mathfrak{x})| \leq Q^{c_{s_{oj}^o}} \qquad (1 \leq j \leq d)$$

mit $\mathfrak{x} \in S^d$ werde das Parallelepiped $\Pi''(Q)$ definiert; ferner werde für $\mathfrak{x} \in S^d \cap \mathbb{Z}^n$ das Gitter $G''(Q)$ durch die Ungleichungen

$$(7.22) \qquad |L_{s_{\tau j}^{\tau}}(\mathfrak{x})|_{p_\tau} \leq Q^{c_{s_{\tau j}^{\tau}}} \qquad (1 \leq j \leq d,\ 1 \leq \tau \leq t)$$

beschrieben. Sei $V''(Q)$ das Volumen von $\Pi''(Q)$ und $d(G''(Q))$ die Gitterdeterminante von $G''(Q)$. Wir erkennen sofort die Beziehungen

$$(7.23) \qquad \Pi'(Q) \subset \Pi''(Q), \qquad G'(Q) \subset G''(Q) .$$

Aus (7.23) folgt

(7.24) $$V'(Q) \cdot d(G'(Q))^{-1} \leqq V''(Q)d(G''(Q))^{-1} \quad .$$

Andererseits ergeben (7.21), (7.22)

(7.25) $$V''(Q) \cdot d(G''(Q))^{-1} \ll Q^{c(S^d)} \quad .$$

Kombination von (7.20), (7.24) und (7.25) ergibt $c(S^d) \geqq \eta > 0$.

8. Beweis von Satz 1.1

Wir erkennen sofort, daß Bedingung (1.6) notwendig ist:

Annahme (1.6) gelte nicht.

Seien in S^d, o.B.d.A. $x_1, .., x_d$ linear unabhängig. Die Formen $L_1, .., L_v$ mögen auf S^d Rang r haben.

Nach dem Satz von Minkowski gibt es zu jedem $Q > 1$ einenganzzahligen Punkt $\mathfrak{x} \in S^d \setminus \{0\}$ mit

(8.1) $$|x_i| \ll Q^r \qquad (1 \leqq i \leqq d) \qquad \text{und}$$

(8.2) $$|L_i(\mathfrak{x})|_p \leqq Q^{-d} \qquad (1 \leqq i \leqq v) \quad .$$

Da $x_1, .., x_d$ linear unabhängig in S^d sind, schließen wir aus (8.1) weiter

(8.3) $$|x_i| \ll Q^r \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Da (1.6) nicht gilt, existiert ein $\delta > 0$ mit

(8.4) $$r = \frac{d \cdot v}{n} (1 + \delta)^{-1} \quad .$$

Kombination von (8.2) und (8.3) ergibt

(8.5) $$|L_i(\mathfrak{x})|_p \ll \| \mathfrak{x} \|^{-\frac{d}{r}} \quad .$$

Berücksichtigen wir (8.4), so erhalten wir

$$(8.6)\qquad |L_i(\mathfrak{r})|_p \ll \|\mathfrak{r}\|^{-\frac{n(1+\delta)}{v}} = \|\mathfrak{r}\|^{-1-\frac{u}{v}-\epsilon} \qquad (1 \leqq i \leqq v)$$

mit positivem ϵ im Widerspruch zur Annahme, daß $L_1, \ldots, L_v$ ein p-adisches Roth-System bilden.

Den Nachweis, daß (1.6) hinreichend ist, bringen wir mit Hilfe von Satz 1.2. Für $d = n$ besagt (1.6), daß die Formen $L_1, \ldots, L_v$ linear unabhängig sind. Wir nehmen nun o.B.d.A. an, die Formen $L_1, \ldots, L_v, X_{v+1}, \ldots, X_n$ seien linear unabhängig und betrachten das System

$$(8.7)\quad (X_1, X_2, \ldots, X_n;\ L_1, \ldots, L_v, X_{v+1}, \ldots, X_n;\ c_{1o} = v, \ldots, c_{no} = v;$$

$$c_{11} = -n, \ldots, c_{v1} = -n.\ c_{v+1,1} = 0, \ldots, c_{n1} = 0)\ .$$

Sei S^d ein Teilraum der Dimension $d \geqq 1$. Da $L_1, \ldots, L_v, X_{v+1}, \ldots, X_n$ linear unabhängig sind, haben sie auf S^d den Rang d. Weiter sei r der Rang von $L_1, \ldots, L_v$ auf S^d. Dann gilt mit den Bezeichnungen des ersten Abschnitts $s_{11} < s_{12} < \ldots < s_{1r} \leqq v < s_{1,r+1} < \ldots < s_{1,d}$, und wir erhalten für das System (8.7)

$$(8.8)\qquad c(S^d) = c_{s_{o1}o} + \ldots + c_{s_{od}o} + c_{s_{11}1} + \ldots + c_{s_{1d}1} = dv - n \cdot r\ .$$

Wegen (1.6) können wir für jeden rationalen Unterraum $S^d \neq 0$ schließen

$$(8.9)\qquad c(S^d) \leqq 0\ .$$

Nach Satz 1.2 bildet also (8.7) ein allgemeines p-adisches Roth-System, und es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante $Q_1 = Q_1(\epsilon, L_1, \ldots, L_v)$, so daß für alle Q mit $Q > Q_1$ die simultanen Ungleichungen

$$(8.10)\qquad |x_i| \leqq Q^{v-\epsilon} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

(8.11) $$|L_j(\mathfrak{r})|_p \leq Q^{-n} \quad (1 \leq j \leq v)$$

keine Lösung $\mathfrak{r} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ besitzen. Daraus folgt, daß $L_1, \ldots, L_v$ ein p-adisches Roth-System bilden.

Literatur

[1] AITKEN, A. C., Determinants and matrices, Oliver and Boyd, London (1951)

[2] CASSELS, J. W. S. An introduction to the geometry of numbers, Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg (1959)

[3] LUTZ, E. Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques, Hermann Paris (1955)

[4] MAHLER, K. Über diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen Jahresbericht der DMV 44 (1934), 250-255

[5] ——— Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen, Casopis. Pest. Mat. 68(1939), 85-92

[6] ——— On compound convex bodies (I), Proc. London Math. Soc. Ser. III, 5(1955), 358-379

[7] RIDOUT, D. The p-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, Mathematika 5 (1958), 40-48

[8] ROTH, K. F. Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 2 (1955), 1-20

[9] SCHLICKEWEI, H. P. Die p-adische Verallgemeinerung des Satzes von Thue-Siegel-Roth-Schmidt, Journ. R. Ang. Math. (erscheint demnächst)

[10] SCHMIDT, W. M. On simultaneous approximation of two algebraic numbers by rationals Acta Math. 119 (1967), 27-50

[11] SCHMIDT, W. M. Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals
Acta Math. 125 (1970), 189 - 201

[12] ——— Linear forms with algebraic coefficients I
J. of Number Theory 3 (1971), 253 - 277

Hans Peter Schlickewei
Math. Inst. d. Universität
D - 7800 Freiburg i. Br.
Hebelstr. 29

(Eingegangen am 21. Oktober 1975)