diesem eine Stelle (p, x_i) in der Weise zugeordnet, dafs eine algebraische Zahl X dann und nur dann durch P^ϱ teilbar ist, wenn X an der zugehörigen Stelle eine ϱfache Nullstelle hat, und dafs sie $P^{-\varrho}$ enthält, wenn X dort einen ϱfachen Pol besitzt. Der Primteiler P ist dann vom Grade k (d. h. es ist $Nm(P) = p^k$), wenn zu der Stelle (p, x_i) genau k verbundene Stellen gehören, und p ist genau durch P^d teilbar, wenn die zugehörige Stelle (p, x_i) einem Verzweigungspunkte $(d - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung angehört, der von der ersten oder von der zweiten Art sein kann.

In zwei weiteren Arbeiten*) sind die hier auseinandergesetzten Principien auf die Lösung einiger Aufgaben angewendet worden, deren Lösung mit Hülfe der Idealtheorie noch nicht gelungen war.

Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper.

Von **David Hilbert** in Göttingen.

In der Theorie der relativ Abel'schen Zahlkörper nehmen zunächst die Körper vom zweiten Relativgrade unser Interesse in Anspruch.

Es sei ein beliebiger Zahlkörper k vom Grade n als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt; unsere Aufgabe ist es dann, die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{\mu})$, d. h. derjenigen Körper zu begründen, die durch die Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl μ des Körpers k bestimmt sind. Die „disquisitiones arithmeticae" von Gaufs sind als der einfachste Fall in jenem Problem enthalten. Wir können unseren Gegenstand auch als die Theorie der quadratischen Gleichungen oder Formen bezeichnen, deren Coefficienten Zahlen des vorgelegten Rationalitätsbereiches k sind.

Für unsere Theorie ist vor allem die Erkenntnis notwendig, dafs auch in dem beliebigen Zahlkörper k ein Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste besteht. Das quadratische Reciprocitätsgesetz im Bereiche der rationalen Zahlen lautet bekanntlich:

---

*) Über die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers. — Über die Fundamentalgleichung und die aufserwesentlichen Discriminantenteiler eines algebraischen Körpers, Göttinger Nachrichten v. J. 1897, Heft 3.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

wo p, q beliebige ungerade rationale positive Primzahlen bedeuten. Aber diese Form des Reciprocitätsgesetzes ist, sobald wir den Zweck der Verallgemeinerung desselben vor Augen haben, aus mannigfachen Gründen — ich hebe nur die unübersichtliche Form der auftretenden Exponenten, den Mangel an Einheitlichkeit und die Ausnahmestellung der Zahl 2 hervor — eine unvollkommene. Nun spielt bekanntlich der Begriff der „primären" Zahlen in der bisherigen Fassung der höheren Reciprocitätsgesetze eine sehr wichtige Rolle. Doch für unser allgemeineres Problem werden wir von der Benutzung dieses Begriffes eine Beseitigung der angedeuteten Mißstände nicht erwarten dürfen; denn wir müssen bedenken, daß im Körper k die Zahl 2 im allgemeinen als Product von gewissen Potenzen von Primidealen zerlegt werden kann, und daß demgemäß die Definition des Begriffes „primär" eine Unterscheidung der verschiedenen Möglichkeiten dieser Zerlegung und die Einführung mannigfacher willkürlicher Annahmen nötig machen würde. Auch ist die Fassung, welche Kummer seinen allgemeinen Reciprocitätsgesetzen gegeben hat, schon deshalb für uns nicht verwendbar, weil wir bei ihrer Annahme dem Körper k die beschränkende Bedingung auferlegen müßten, daß seine Klassenanzahl ungerade ist; es wird sich aber zeigen, daß uns der Fall einer durch 2 teilbaren Klassenanzahl zu den schönsten und wertvollsten Resultaten führt.

Aus den angegebenen Gründen erscheint mir die Einführung eines neuen Symbols $\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ in die Zahlentheorie nötig, welches in unserem Falle der Theorie eines relativquadratischen Körpers, wie folgt, zu definiren ist. Sind ν, μ ganze Zahlen in k, dabei μ nicht Quadratzahl, und ist $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal in k, so bezeichne jenes Symbol den Wert

(1) $$\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

sobald die Zahl ν mit der Relativnorm einer ganzen Zahl des durch $\sqrt{\mu}$ bestimmten relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach dem Primideal $\mathfrak{w}$ congruent ist, und sobald außerdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ existirt, deren Relativnorm der Zahl ν nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ congruent ist; in jedem anderen Falle setzen wir

$$(2)\qquad \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = -1.$$

Diejenigen ganzen Zahlen ν, für welche die Gleichung (1) gilt, sollen Normenreste*) des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$, diejenigen Zahlen, für welche die Gleichung (2) gilt, Normennichtreste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$ heifsen. Wenn μ das Quadrat einer Zahl in k ist, möge die Gleichung (1) gelten. Der Bildung der Begriffe „Normenrest" und „Normennichtrest" entspricht in der Functionentheorie gewissermafsen die Unterscheidung, ob eine algebraische Function einer Variablen an einer Stelle nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen der Variablen entwickelt werden kann.

Die ersten Sätze für das eben definirte Symbol sind in den Formeln enthalten:

$$\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\mu,\,\nu}{\mathfrak{w}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu\nu',\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\nu',\,\mu}{\mathfrak{w}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu,\,\mu\mu'}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\nu,\,\mu'}{\mathfrak{w}}\right);$$

die wichtigste Eigenschaft unseres Symbols spricht sich in dem folgenden Satze aus:

Wenn $\mathfrak{w}$ ein Primideal des Körpers k ist, das nicht in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so ist jede zu $\mathfrak{w}$ prime Zahl in k Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$. Wenn dagegen $\mathfrak{w}$ ein Primideal des Körpers k ist, das in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so sind bei genügend hohem Exponenten e von allen vorhandenen zu $\mathfrak{w}$ primen und nach $\mathfrak{w}^e$ einander incongruenten Zahlen in k genau die Hälfte Normenreste nach $\mathfrak{w}$.

Diese Thatsache entspricht dem bekannten Satze über die Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche, wonach eine algebraische Function in der Umgebung eines einfachen Verzweigungspunktes den Vollwinkel auf die Hälfte desselben conform abbildet.

Mit Benutzung des eben definirten Symboles drückt sich das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste durch die Formel aus:

$$(3)\qquad \prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = [\nu,\,\mu]\,[\nu',\,\mu']\cdots[\nu^{(n-1)},\,\mu^{(n-1)}].$$

---

*) Vgl. meinen Bericht über die Theorie der Zahlkörper. Diese Berichte Bd. 4, S. 286 und 402.

Hierin bedeuten ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k. Das Product linker Hand ist über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken; da dem vorigen Satz zufolge das Symbol $\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ nur für eine endliche Anzahl von Primidealen $\mathfrak{w}$ den Wert -1 haben kann, so kommt bei der Bestimmung des Wertes des Productes nur eine endliche Anzahl von Factoren in Betracht. Auf der rechten Seite der Formel (3) bedeuten ν', μ'; ... $\nu^{(n-1)}$, $\mu^{(n-1)}$ die zu ν, μ conjugirten Zahlen bez. in den zu k conjugirten Körpern k'; ...; $k^{(n-1)}$; das Zeichen $[\nu, \mu]$ bedeutet den Wert -1, wenn der Körper k reell und zugleich jede der beiden Zahlen ν, μ negativ ist; in jedem anderen Falle bezeichnet $[\nu, \mu]$ den Wert $+1$. Entsprechend bedeutet $[\nu', \mu']$ den Wert -1, wenn k' reell und zugleich jede der beiden Zahlen ν', μ' negativ ausfällt, in jedem anderen Falle dagegen soll $[\nu', \mu']$ den Wert $+1$ haben, u. s. f.

Sind beispielsweise k und alle zu k conjugirten Körper imaginär, so lautet das Reciprocitätsgesetz

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1. \tag{4}$$

Im Falle, dafs k den Körper der rationalen Zahlen bedeutet, erhalten wir

$$\prod_{(w)}\left(\frac{n,\, m}{w}\right) = [n, m], \tag{5}$$

wo n, m zwei beliebige ganze rationale Zahlen sind, ferner w alle rationalen Primzahlen durchläuft und $[n, m]$ den Wert $+1$ oder -1 bezeichnet, jenachdem wenigstens eine der Zahlen m, n positiv ausfällt oder beide negativ sind.*)

Die einfachsten Fälle des quadratischen Reciprocitätsgesetzes erhalten wir aus unseren Formeln (3), (4), indem wir für ν, μ Einheiten oder unzerlegbare Zahlen des Körpers k einsetzen. Insbesondere folgen aus (5) die bekannten Formeln des gewöhnlichen quadratischen Reciprocitätsgesetzes, indem wir für n, m die Zahlen -1, 2 oder beliebige ungerade Primzahlen p, q wählen.*)

Es sei insbesondere der Körper k nebst seinen sämtlichen Conjugirten imaginär und habe überdies die Klassenanzahl $h = 1$. Bedeuten dann π, $\varkappa$, π', $\varkappa'$ irgend welche Primzahlen in k, die zu 2 prim sind und nach dem Modul 4 den Congruenzen

$$\pi \equiv \pi', \quad \varkappa \equiv \varkappa', \quad (4)$$

genügen, so gelten, wie wir aus (4) leicht erkennen, folgende specielle Gesetze:

*) Vgl. l. c. § 64 und § 69.

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi'}{\varkappa'}\right)\left(\frac{\varkappa'}{\pi'}\right),$$

und ferner wird, falls wenigstens eine der Primzahlen π, $\varkappa$ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 4 congruent ist:

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)=\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right).$$

In den beiden letzten Formeln bedeutet allgemein das Symbol $\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$ den Wert $+1$ oder -1, jenachdem ν dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach μ congruent ist oder nicht. Die beiden letzteren Gesetze können leicht auf die mannigfaltigste Weise durch numerische Beispiele bestätigt werden.

Es ist überaus bemerkenswert, dafs bei Anwendung unseres Symbols eine einzige Gleichung von so einfacher Bauart, wie es die Formel (3) ist, das quadratische Reciprocitätsgesetz für einen beliebigen Zahlkörper in vollster Allgemeinheit zum Ausdruck bringt: die Formel (3) gilt, gleichviel ob der zu Grunde gelegte Körper k ein Galois'scher ist oder irgend einen oder gar keinen Affect hat; die Formel (3) nimmt Rücksicht auf die vielen möglichen Fälle, je nach der Realität des Körpers k und seiner Conjugirten; sie gilt, wie auch immer die Zerlegung der Zahl 2 im Körper k ausfallen möge; sie enthält alle Ergänzungssätze; durch sie erscheint die exclusive Stellung der Zahl 2 und der in 2 aufgehenden Primideale beseitigt; vor allem endlich gilt die nämliche Formel (3) unabhängig davon, ob die Klassenanzahl des Körpers k ungerade oder durch irgend eine Potenz der Zahl 2 teilbar ist.

Das Reciprocitätsgesetz in der Fassung (3) erinnert an den Cauchy'schen Integralsatz in der Functionentheorie, demzufolge ein complexes Integral, um alle einzelnen Singularitäten einer Function geführt, insgesamt stets den Wert 0 ergiebt. Einer der bekannten Beweise des gewöhnlichen quadratischen Reciprocitätsgesetzes weist auch auf einen inneren Zusammenhang zwischen jenem zahlentheoretischen Gesetze und Cauchy's functionentheoretischem Fundamentalsatz hin.

Doch das Reciprocitätsgesetz (3) bildet nur den ersten wichtigen Schritt zur Begründung unserer Theorie der relativquadratischen Zahlkörper. Unsere weitere Aufgabe ist die Aufstellung aller relativquadratischen Körper und die Untersuchung ihrer Eigenschaften. Der Einfachheit halber sei fortan der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich k nebst sämtlichen Conjugirten imaginär. Da wir die Relativkörper durch ihre Relativdiscriminanten festlegen wollen, so ist offenbar die einfachste Frage diejenige nach den relativquadratischen Körpern mit der Relativdiscriminante 1. Nach einem in meinem Berichte über die Theorie der algebraischen Zahlkörper bewiesenen

Satze*) kann es einen solchen Relativkörper niemals geben, falls die Klassenanzahl des Körpers k ungerade ist; wir wählen daher den Körper k so, dafs seine Klassenanzahl gerade, und zwar der Einfachheit halber gleich 2 sei. In der That gelingt dann der Nachweis der Existenz eines Relativkörpers K mit der Relativdiscriminante 1. Dieser Körper werde der Klassenkörper**) von k genannt. Der Klassenkörper K besitzt folgende fundamentalen Eigenschaften:

1) Der Klassenkörper K hat in Bezug auf k die Relativdiscriminante 1.

2) Die Klassenanzahl des Klassenkörpers K ist ungerade.

3a) Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in K in das Product zweier Primideale.

3b) Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in K Primideale; sie werden jedoch in K Hauptideale.

Von diesen vier Eigenschaften 1, 2, 3a, 3b definirt bei unserer Annahme über den Körper k jede für sich in eindeutiger Weise den Klassenkörper K; wir haben somit die Sätze:

1) Es giebt aufser K keinen anderen relativquadratischen Körper mit der Relativdiscriminante 1 in Bezug auf k.

2) Wenn ein zu k relativquadratischer Körper eine ungerade Klassenanzahl hat, so stimmt derselbe mit dem Klassenkörper K überein.

3) Wenn alle Primideale in k, die in k Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper zerfallen, oder wenn alle Primideale in k, die in k nicht Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper Primideale bleiben, so folgt jedesmal, dafs dieser relativquadratische Körper kein anderer als der Klassenkörper K ist.

Diese Gesetze für den Klassenkörper K sind einer weiten Verallgemeinerung fähig; sie lassen eine wunderbare Harmonie erkennen und erschliefsen, wie mir scheint, ein an neuen arithmetischen Wahrheiten reiches Gebiet.

Auch eine Theorie der Geschlechter läfst sich in unserem relativquadratischen Körper aufstellen; aus dieser fliefsen dann die Bedingungen für die Auflösbarkeit ternärer diophantischer Gleichungen, deren Coefficienten Zahlen des beliebigen Rationalitätsbereiches k sind.

Wir haben uns in diesem Vortrage auf die Untersuchung relativ Abel'scher Körper vom zweiten Grade beschränkt. Diese Beschränkung ist jedoch nur eine vorläufige, und da die von mir bei den Beweisen der Sätze angewandten Schlüsse sämtlich der Verallgemeinerung fähig sind, so steht zu hoffen, dafs die Schwierigkeiten nicht unüberwindliche sein werden, die die Begründung

---

*) Satz 94, S. 279.

**) Vgl. H. Weber, Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Drei Abhandlungen. Math. Ann., Bd. 48, 49, 50.

einer allgemeinen Theorie der relativ Abel'schen Körper bietet. Die oben in der Theorie des relativquadratischen Körpers auftretenden, in der Unterscheidung zwischen reellen und imaginären Körpern beruhenden Schwierigkeiten fallen in der Theorie der Abel'schen Körper von ungeradem Relativgrade sogar gänzlich fort, und die höheren Reciprocitätsgesetze erhalten deshalb einen noch einfacheren Ausdruck als das quadratische Reciprocitätsgesetz (3), indem dann in dieser Formel an Stelle der rechten Seite stets die Zahl 1 tritt.

Die Theorie der relativ Abel'schen Körper enthält als besonders einfachen Fall die Theorie derjenigen Zahlkörper, die die complexe Multiplication der elliptischen Functionen liefert. Da H. Weber*) für diese Körper die Eigenschaften 3a und 3b bewiesen hat, so werden wir hieraus schliefsen, dafs den nämlichen Zahlkörpern das volle System der oben angedeuteten arithmetischen Eigenschaften zukommt; es ist dann nicht schwer, den Nachweis dafür zu erbringen, dafs die Abel'schen Gleichungen im Bereiche eines quadratischen imaginären Körpers durch die Transformationsgleichungen elliptischer Functionen mit singulären Moduln erschöpft werden — und dies hiefse, den „liebsten Jugendtraum" Kronecker's verwirklichen, der diesen Gelehrten noch bis an seinen Lebensabend lebhaft beschäftigt hat.

Über die Beziehungen zwischen der Zahlentheorie und der Theorie der automorphen Functionen.

Von **Robert Fricke** in Braunschweig.

Die in der Überschrift genannten Beziehungen lassen sich nach drei Gesichtspunkten klassificiren.

Erstlich gestattet die geometrische Theorie gewisser zwei Gruppen von linearen Substitutionen $\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$ einer complexen Variablen ζ eine Anwendung auf drei der überlieferten Zahlentheorie angehörende Gattungen binärer quadratischer Formen. Es handelt sich dabei einmal um die Modulgruppe, welche ganze rationale Zahlen α, β, γ, δ zu Coefficienten und unimodulare Substitutionen hat, sodann um die sogenannte Picard'sche Gruppe, bei welcher α, β, γ, δ ganze complexe Zahlen der Gestalt $m + in$ darstellen und die Substitutionen gleichfalls unimodular sind. Die quadratischen Formen aber sind einmal die Gaufs'schen $ax^2 + 2bxy + cy^2$, bei

*) Vgl. Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, sowie die zweite und dritte der vorhin genannten Abhandlungen über Zahlengruppen.