Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln.

Von Julius v. Sz. Nagy in Kolozsvár.

I. Schur hat in seiner Abhandlung[1]) den folgenden sehr interessanten Satz bewiesen:

Es sei $f(x) = 0$ *eine algebraische Gleichung* n*-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln. Die größte Wurzel dieser Gleichung sei* x_n, *ferner sei* x_{n-r} *die größte unter den Wurzeln der* r*-ten derivierten Gleichung* $\overset{(r)}{f}(x) = 0$; *dann ist*

$$(1)\qquad x_n - x_{n-1} \leqq x_{n-1} - x_{n-2} \leqq \cdots \leqq x_2 - x_1.$$

Die Gleichungszeichen gelten dann und nur dann, wenn das Polynom $f(x)$ *eine* $(n-1)$*-fache Wurzel hat.*

Ich will nun einige kleinere Sätze über den Zusammenhang der Wurzeln eines Polynomes $f(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln und ihrer Derivierten zeigen. Diese Sätze stehen im engen Zusammenhange mit dem Schurschen Satze und können teilweise aus ihm gefolgert werden.

1. Wir wollen zuerst den folgenden Satz beweisen:

I. Teilt man das Intervall zwischen der größten und kleinsten Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ n*-ten Grades, die lauter reelle Wurzeln besitzt, in* n *gleiche Teile, so hat die Derivierte* $f'(x) = 0$ *in den äußersten Teilintervallen je eine Wurzel.*

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ im folgenden ihrer Größe nach mit

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_k \leqq \alpha_{k+1} \leqq \cdots \leqq \alpha_n,$$

so ist

$$(1)\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_k} + \frac{1}{x-\alpha_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n} = 0.$$

Für die kleinste Wurzel von $f'(x) = 0\,(\alpha_1 < x < \alpha_2)$ besteht also die Gleichung bzw. Ungleichung

$$(2)\qquad \frac{1}{x-\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2 - x} + \frac{1}{\alpha_3 - x} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n - x} \geqq \frac{n-1}{\alpha_n - x},$$

weil alle Glieder der beiden Seiten in der Gleichung positiv sind.

Daraus folgt die Ungleichung

$$(n-1)(x-\alpha_1) \leqq \alpha_n - x,$$

1) I. Schur, Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, Crelles Journal Bd. 144, S. 75.

oder, wenn man zu den beiden Seiten der Ungleichung $x - \alpha_1$ addiert und dann durch n dividiert,

$$x - \alpha_1 \leqq \frac{\alpha_n - \alpha_1}{n}.$$

Für die größte Wurzel der Derivierten $f'(x) = 0$ folgt ähnlicherweise aus der Ungleichung

$$(3) \qquad \frac{1}{\alpha_n - x} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x - \alpha_{n-1}} \geqq \frac{n-1}{x - \alpha_1}$$

die Ungleichung

$$x - \alpha_1 \leqq (n-1)(\alpha_n - x) \quad \text{und} \quad \alpha_n - x \leqq \frac{\alpha_n - \alpha_1}{n}.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Es gilt auch der folgende allgemeine Satz:

II. Teilt man das Intervall zwischen der k-ten und letzten Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ n-ten Grades, deren sämtliche Wurzeln reell sind, in n gleiche Teile, so erhalten die k ersten Teilintervalle von der k-ten Wurzel aus gerechnet wenigstens eine Wurzel der Derivierten $f'(x) = 0$. Hier können die Wurzeln von $f(x) = 0$ in zunehmender oder in abnehmender Reihenfolge gerechnet werden.

Aus der Gleichung

$$(4) \qquad \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x - \alpha_k} = \frac{1}{\alpha_{k+1} - x} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n - x}$$

folgen für diejenige Wurzel von $f'(x) = 0$, die zwischen α_k und α_{k+1} liegt, die Ungleichungen

$$\frac{k}{x - \alpha_k} \geqq \frac{n-k}{\alpha_n - x} \quad \text{und} \quad \frac{n-k}{\alpha_{k+1} - x} \geqq \frac{k}{x - \alpha_1},$$

weil alle Glieder der beiden Seiten der Gleichung (4) positiv sind.

Daraus folgen die Ungleichungen

$$\alpha_n - x \geqq \left(\frac{n}{k} - 1\right)(x - \alpha_k) \quad \text{und} \quad x - \alpha_1 \geqq \left(\frac{n}{n-k} - 1\right)(\alpha_{k+1} - x)$$

und daraus die folgenden Ungleichungen

$$x - \alpha_k \leqq k\,\frac{\alpha_n - \alpha_k}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_{k+1} - x \leqq (n-k)\,\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_1}{n}.$$

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Die Lage der Wurzeln von $f'(x) = 0$ wird durch den folgenden Satz näher bestimmt:

III. Es sei μ_1 bzw. μ_2 der Schwerpunkt der k ersten bzw. $n-k$ letzten Wurzeln von der Gleichung $f(x) = 0$ n-ten Grades, deren sämtliche Wurzeln reell sind, so gelten für diejenige Wurzel von $f'(x) = 0$, die zwischen α_k und α_{k+1} liegt, die Ungleichungen:

$$x - \alpha_k \leqq k\,\frac{\mu_2 - \alpha_k}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_{k+1} - x \leqq (n-k)\,\frac{\alpha_{k+1} - \mu_1}{n}.$$

Für diesen Wert x ist

$$\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_k}\geqq\frac{k}{x-\mu_1}$$

und

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}-x}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-x}\geqq\frac{n-k}{\mu_2-x},$$

weil alle Glieder dieser Ungleichungen positiv sind und das arithmetische Mittel von positiven Zahlen nicht kleiner als das harmonische Mittel von denselben Zahlen ist.

Es gelten die Ungleichungen:

$$\frac{k}{x-\alpha_k}\geqq\frac{n-k}{\mu_2-x}\quad\text{und}\quad\frac{k}{x-\mu_1}\leqq\frac{n-k}{\alpha_{k+1}-x},$$

woraus

$$x-\alpha_k\leqq k\,\frac{\mu_2-\alpha_k}{n}\quad\text{und}\quad\alpha_{k+1}=x\leqq(n-k)\,\frac{\alpha_{k+1}-\mu_1}{n}$$

ist.

Aus diesem Satze folgen unsere zwei ersten Sätze, weil $\mu_2\leqq\alpha_n$ und $\mu_1\geqq\alpha_1$ ist.

2. Neben dem ersten Satze gilt auch der folgende Satz:

IV. Ist d_n die Länge des Intervalles zwischen der größten und kleinsten Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ n-ten Grades, die lauter reelle Wurzeln hat, und schneidet man aus diesem Intervalle von den Endpunkten aus je eine Strecke mit der Länge $\frac{d_n}{2}\left(1-\sqrt{\frac{n-2}{n}}\right)$ ab, so liegt wenigstens auf der einen Strecke eine Wurzel der Derivierten $f'(x)=0$

Weil für jedes $n\geqq 2$

$$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{n-2}{n}}\right)\leqq\frac{1}{2(n-1)}$$

ist, so können wir auch den folgenden Satz aussprechen:

V. Teilt man das Intervall zwischen der größten und kleinsten Wurzel von $f(x)=0$ in $2(n-1)$ gleiche Teile, so besitzt die Derivierte $f'(x)=0$ wenigstens auf einem der äußersten Teilintervalle eine Wurzel.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt, daß der größere von den Brüchen

(5) $$\frac{1}{x_1-\alpha_1}\quad\text{und}\quad\frac{1}{\alpha_n-x_{n-1}},$$

wo x_1 bzw. x_{n-1} die kleinste bzw. größte Wurzel von $f'(x)$ bedeutet, für bestimmte α_1 und α_n nur dann sein Minimum erreicht, wenn

$$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_{n-1}=\frac{\alpha_1+\alpha_n}{2}$$

ist. Die Existenz dieses Minimums ist evident.

Wir nehmen an, daß der größere Bruch von $\frac{1}{x_1-\alpha_1}$ und $\frac{1}{\alpha_n-x_{n-1}}$ sein Minimum erreicht, ohne daß $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_{n-1}$ ist.

Wegen des bekannten Zusammenhanges zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel positiver Zahlen bestehen die Ungleichungen

$$\frac{1}{\alpha_2 - x_1} + \frac{1}{\alpha_{n-1} - x_1} \geqq \frac{2}{\frac{\alpha_2 + \alpha_{n-1}}{2} - x_1}$$

und

$$\frac{1}{x_{n-1} - \alpha_2} + \frac{1}{x_{n-1} - \alpha_{n-1}} \geqq \frac{2}{x_{n-1} - \frac{\alpha_2 + \alpha_{n-1}}{2}}.$$

Daraus folgt, daß die beiden Werte unter (5) verkleinert werden, wenn man α_2 und α_{n-1} mit $\frac{\alpha_2 + \alpha_{n-1}}{2}$ substituiert. Aus diesem Widerspruche folgt, daß $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha$ ist.

Die Annahme, daß $\alpha \neq \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}$ ist, führt ebenfalls zu einem Widerspruche, weil der größere Bruch von (5) mit der Substitution $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}$ verkleinert wird, ohne daß der andere Bruch der größere wäre.

Ist aber
$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2},$$
so ist
$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_n)\left(x - \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}\right)^{n-2} = 0$$
und
$$x_1 - \alpha_1 = \alpha_n - x_{n-1} = \frac{\alpha_n - \alpha_1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{n-2}{n}}\right) = \frac{d_n}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{n-2}{n}}\right) \leqq \frac{d_n}{2n-2},$$
wie man leicht rechtfertigen kann.

3. Die vorigen Sätze hängen mit dem folgenden Satze von E. Laguerre[1]) zusammen:

Teilt man das Intervall zwischen zwei benachbarten Wurzeln der Gleichung $f(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln in n gleiche Teile, so kann die Derivierte $f'(x)$ in den äußersten Teilintervallen nicht verschwinden.

Wir wollen die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes aussprechen.

VI. Es sei d der Abstand der Wurzeln α_k und α_{k+h} $(\alpha_k < \alpha_{k+h})$ von der Gleichung $f(x) = 0$ (n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln), zwischen denen die Gleichung $h - 1$ Wurzeln hat, und schneidet man in diesem Intervalle (α_k, α_{k+h}) von α_k bzw. α_{k+h} aus gerechnet eine Strecke von der Länge $\frac{d}{n-k+1}h$ bzw. $\frac{d}{k+h}h$ heraus, so kann keine dieser bei-

1) Vgl. E. Cesàro-G. Kowalewsky, Elementares Lehrbuch der alg. Analysis § 431; E. Cesàro, Solution d'une question de M. Laguerre, Nouvelles Annales de Mathématiques (3), IV (1885), S. 328—330.

den Strecken die sämtlichen zwischen α_k und α_{k+h} liegenden Wurzeln der derivierten Gleichung $f'(x)=0$ enthalten.

Bezeichnen wir die kleinste bzw. größte der in dem Intervalle (α_k, α_{k+h}) liegenden Wurzeln von $f'(x)=0$ mit x_k bzw. x_{k+h-1}, so folgen aus den Gleichungen

$$\frac{1}{x_k-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{x_k-\alpha_k}=\frac{1}{\alpha_{k+1}-x_k}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{k+h}-x_k}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-x_k}$$

$$\frac{1}{\alpha_n-x_{k+h-1}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{k+h}-x_{k+h-1}}=$$

$$=\frac{1}{x_{k+h-1}-\alpha_{k+h-1}}+\cdots+\frac{1}{x_{k+h-1}-\alpha_k}+\cdots+\frac{1}{x_{k+h-1}-\alpha_1}.$$

die Ungleichungen

$$\frac{k}{x_k-\alpha_k}\geqq\frac{h}{\alpha_{k+h}-x_k}\quad\text{und}\quad\frac{n-k-h+1}{\alpha_{k+h}-x_{k+h-1}}\geqq\frac{h}{x_{k+h-1}-\alpha_k},$$

und daraus erhalten wir die Ungleichungen

$$x_{k+h-1}-\alpha_k\geqq\frac{\alpha_{k+h}-\alpha_k}{n-k+1}h\quad\text{und}\quad\alpha_{k+h}-x_k\geqq\frac{\alpha_{k+h}-\alpha_k}{k+h}h,$$

die unseren Satz aussprechen.

Weil $k+h\leqq n$ und $n-k+1\leqq n$ ist, darum folgt aus dem vorigen Satze der folgende:

VII. Teilt man den Abstand von solchen zwei Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ (n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln), zwischen denen $h-1$ Wurzel der Gleichung liegen, in n gleiche Teile, so kann keine der beiden aus den h äußersten Teilintervallen bestehenden Strecken die sämtlichen h Wurzeln der derivierten Gleichung $f'(x)=0$ enthalten, die zwischen den angenommenen zwei Wurzeln von $f(x)=0$ liegen.

In dem Falle, wenn $h=1$ ist, verschwindet die Derivierte $f'(x)$ nur einmal zwischen α_k und α_{k+1}, also kann die Derivierte auf keiner der beiden äußersten Strecken verschwinden. Der Satz VII enthält den Laguerreschen Satz in sich.

4. Wir wollen noch einige mit dem Satze von I. **Schur** verwandte Sätze beweisen:

VIII. Es sei d_n bzw. d_k die Länge zwischen der größten und kleinsten der (sämtlich reellen) *Wurzeln der Gleichung $f(x)$ n-ten Grades, bzw. ihrer $(n-k)$-ten Derivierten $\overset{(n-k)}{f}(x)=0$, so bestehen die folgenden Ungleichungen:*

$$\frac{d_n}{d_{n-1}}\leqq\sqrt{\frac{n}{n-2}}<\frac{n-1}{n-2}\quad\text{und}\quad\frac{d_n}{d_k}\leqq\sqrt{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}}<\frac{n-1}{k-1},\quad(n>k\geqq 2).$$

Der Beweis dieses Satzes ist analog mit dem Beweise der Sätze IV und V. Wir werden die dort angewandten Bezeichnungen benutzen.

und lassen die kleinste und größte der Wurzeln von $f(x) = 0$ (α_1 und α_n) wieder unverändert.

Aus dem erwähnten Beweise ergibt sich, daß der Abstand $d_{n-1} = x_{n-1} - x_1$ bei bestimmten $d_n = \alpha_n - \alpha_1$ nur dann sein Minimum erreichen kann, wenn $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1}$ ist, also die Gleichung $f(x) = 0$ die Form

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_n)\left(x - \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} - \varrho\right)^{n-2} = 0, \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_n}{2} \leqq \varrho \leqq \frac{\alpha_n - \alpha_1}{2}\right)$$

hat.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} = 0$ ist. In diesem Falle ist $\alpha_1 = -\frac{d_n}{2}$ und $\alpha_n = \frac{d_n}{2}$, also ist

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{d_n^2}{4}\right)(x - \varrho)^{n-2} \text{ und } f'(x) = \left[n x^2 - 2\varrho x - (n-2)\frac{d_n^2}{4}\right](x - \varrho)^{n-3}.$$

Aus der Gleichung $f'(x) = 0$ folgt, daß

$$d_{n-1} = x_{n-1} - x_1 = \sqrt{\left(\frac{2\varrho}{n}\right)^2 + \frac{n-2}{n} d_n^2} \geqq \sqrt{\frac{n-2}{n}}\, d_n$$

ist, woraus folgt, daß

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} \leqq \sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

ist.

Wendet man diesen Satz der Reihe nach auf die Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, $f''(x) = 0$ und $f'''(x) = 0$, usw. an, und multipliziert man die so erhaltenen Ungleichungen, so ergibt sich leicht, daß

$$\frac{d_n}{d_k} \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}}$$

ist.

Diese Ungleichung ist genau, weil sie im Falle

$$f(x) = x^n - \frac{d_n^2}{4} x^{n-2} = 0$$

mit dem Gleichheitszeichen gilt.

Für $k = 2$ ist

$$d_n \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot d_2.$$

Wenden wir diesen Satz auf die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

an, so bekommen wir die Ungleichung

$$d_n \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \sqrt{4\left(\frac{a_1}{n a_0}\right)^2 - 8 \frac{a_2}{n(n-1) a_0}}$$
$$= \sqrt{2 \cdot \frac{n-1}{n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 4\frac{a_2}{a_0}} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}}.$$

Hiermit erhalten wir den folgenden Satz:

IX. Sind a_0, a_1 und a_2 die drei ersten Koeffizienten einer solchen Gleichung, deren sämtliche Wurzeln reell sind, und ist d die Länge des

Intervalles, das die sämtlichen Wurzeln der Gleichung enthält, so besteht unabhängig von der Gradzahl der Gleichung, die Ungleichung

$$d < \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}}.$$

Diese obere Grenze ist genau, erstens, weil die Gleichung

$$d_n = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot d_2$$

für jede n befriedigt werden kann, zweitens, weil

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{2\frac{n-1}{n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 4\frac{a_2}{a_0}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}} \qquad \text{ist.}$$

5. Die Grenzen der Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ (n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln) kann man mit Hilfe des Satzes von I. Schur leicht bestimmen.

Bezeichnet man jetzt die größte (kleinste) Wurzel von $f(x) = 0$ bzw. von $\overset{(n-k)}{f(x)} = 0$ mit α_n (mit β_n) bzw. mit α_k (mit β_k), so folgt durch Addition aus dem Satze von I. Schur die Ungleichung

$$\alpha_n - \alpha_1 \leqq (n-1)(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{6}$$

Wendet man diesen Satz auf die Gleichung $f(-x) = 0$ an, so ergibt sich

$$\beta_1 - \beta_n \leqq (n-1)(\beta_1 - \beta_2) = (n-1)(\alpha_2 - \alpha_1),$$

wo $\beta_1 = \alpha_1$ ist.

Ist x irgendeine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so gilt für sie die Ungleichung

$$\beta_n = \alpha_1 - (n-1)(\alpha_2 - \alpha_1) \leqq x \leqq \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Wenden wir diesen Satz auf die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

an, so erhalten wir, daß

$$-\frac{a_1}{na_0} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{n}{n-1}\frac{a_2}{a_0}} \leqq x \leqq -\frac{a_1}{na_0} + \frac{n-1}{n}\sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{n}{n-1}\cdot\frac{a_2}{a_0}}$$

ist.

Diese Ungleichung drückt einen Satz von E. Laguerre[1]) aus, der in der Literatur mehrmals vorkommt.[2])

---

1) Œuvres de Laguerre, tome I, S. 92—93. (Nouvelles Annales de mathématiques (2), 19 (1880).

2) L. Kraus, Casopis, Prag, Bd. 15, S. 63—64 (1886); A. Pleskot, Sitzungsberichte der Kgl. böhmischen Gesellsch. der Wiss, 1897, Nr. 37, Nouv. Ann. d. math. (3) 18, S. 301—305.