Modelle.

66. Lineares Strahlensystem (Kongruenz) mit konjugiert imaginären Leitlinien und
67. Lineares Strahlensystem (Kongruenz) mit zusammenfallenden Leitlinien, ausgeführt 1877 von stud. math. K. Rohn im mathem. Institut der Techn. Hochschule München.
68. Drei Modelle der Kummerschen Fläche, ausgeführt usw.
69. Sieben Modelle zur Darstellung des Verlaufes der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid. Ausgef. (1877 und 1880) im mathem. Institut der Techn. Hochschule München (unter Leitung von Prof. A. Brill) von den stud. math. K. Rohn und A. v. Braunmühl.
70. Serie von Regelflächen vierter Ordnung. 1890.
71. Sieben Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen der Raumkurven 4. Ordnung 2. Spezies. 1893.
72. Drei Modelle der Steinerschen Fläche.
73. Ellipsenzirkel 1892.

(Eingegangen am 22. 3. 23.)

Max Noether.

Von A. BRILL in Tübingen.

Max Noether.

Am 13. Dezember 1921 ist der emeritierte ordentliche Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Geheime Hofrat Dr. Max Noether im 78. Lebensjahr verschieden. Mit ihm ist einer der letzten deutschen Vertreter der algebraischen Geometrie dahingegangen, eines Wissenszweigs, der in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts durch lebhaften Austausch zwischen deutschen, englischen und italienischen Mathematikern hervorgerufen und gepflegt worden war. Am triebkräftigsten hat er sich in Italien fortentwickelt, wo noch heute hervorragende Geometer — nächst Cremona und Clebsch — in Noether ihren Führer verehren. Italiener werden darum auch am besten in der Lage sein, durch den Hinweis auf die Entfaltung seiner Ideen in ihrem Lande den Wert und die Auswirkung seiner Arbeiten zu beurteilen.

Wenn ich trotzdem der Aufforderung, dem dahingegangenen Arbeitsgenossen und Freund einen Nachruf zu widmen, in der Gestalt eines

Berichts über sein Lebenswerk zu entsprechen mich entschlossen habe, so geschah es wesentlich im Hinblick auf den Briefwechsel, der mich 52 Jahre hindurch ohne Unterbrechung mit ihm verbunden hat, und dem ich die Entstehungsursache vieler seiner Arbeiten im Zusammenhange mit äußeren Verhältnissen und mit seiner Denkweise entnehmen konnte. — Freilich dürfen dabei die Arbeiten, die ich mit Noether zusammen verfaßt habe, von der Besprechung nicht ausgeschlossen werden, wenn auch der eigene Name mir dann öfters, als mir lieb ist, in die Feder fließen wird.

Und noch eine Vorbemerkung sei mir gestattet. Die Abhandlungen Noethers sind, weil sie überall die aufgeworfene Frage — „ita ut nihil amplius desiderari possit" — zu erschöpfen trachten, der Berichterstattung schwer zugänglich. So habe ich mich bezüglich der mir ferner stehenden Aufsätze auf eine Andeutung des behandelten Stoffes beschränkt, was sich um so mehr empfahl, als Noether selbst in unserem gemeinsamen Bericht „Über die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen" eine Reihe seiner Arbeiten in den geschichtlichen Zusammenhang eingereiht und unvoreingenommen besprochen hat.

„Max Noether[1]) ist geboren am 24. Sept. 1844 in Mannheim als das dritte von fünf Geschwistern. Sein Vater Hermann N., war Kaufmann, der zusammen mit seinem Bruder das noch heute existierende Geschäft Joseph N. u. Co. gegründet hatte, wie überhaupt alle Vorfahren Kaufleute im Eisengroßhandel waren. Sehr nahe scheint das Verhältnis zu der Anfang der siebziger Jahre verstorbenen Mutter gewesen zu sein; und ein Bruder der Mutter, der neben dem Kaufmannsberuf so eine Art Privatgelehrter war, hatte unzweifelhaft auch mathematisches Talent, obwohl es nicht ausgebildet war.

N. besuchte vier Jahre die Volksschule, hatte aber während des letzten Jahres zugleich zusammen mit einigen anderen Jungen Privatunterricht, um gleich in die zweite Klasse des Gymnasiums aufgenommen zu werden. Aber unglücklich darüber, daß er das alles wußte, was dort vorkam, setzte er es durch, gleich in die 3. Klasse zu kommen. Er hielt dies später für nicht glücklich; in vielem fehlte ihm doch die Reife, und eine gewisse Überanstrengung wird doch auch die Folge gewesen sein. Mit 14 Jahren erkrankte er dann an der damals noch unbekannten spinalen Kinderlähmung, die die Lähmung des Beines zur Folge hatte. Es folgten ein paar Jahre, in denen er überhaupt nicht gehen konnte, Jahre, die außer mit Privatunterricht vor allem mit Lek-

1) Die folgenden persönlichen Angaben verdanke ich einer freundlichen schriftlichen Mitteilung der Tochter des Verstorbenen, Frl. Dr. Emmy Noether, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

türe ausgefüllt waren. Hier hat er den Grund gelegt zu einer sehr ausgedehnten literarischen und geschichtlichen Bildung. Für sich zu Hause arbeitete er das gewöhnliche Universitätspensum in Mathematik durch; auch war er ein Jahr lang an der Mannheimer Sternwarte unter Leitung von Schönfeld beschäftigt, auf dessen Anregung dann auch seine erste astronomische Arbeit entstanden ist. Die drei Semester in Heidelberg bis zur Promotion (1868) waren wesentlich der theoretischen Physik unter Kirchhoff gewidmet, und er sprach erst kürzlich davon, daß er von Kirchhoff aus, also von den in der theoretischen Physik auftretenden Abbildungsproblemen, zu Riemann gelangt sei und über Riemann zu der geometrischen Theorie der algebraischen Funktionen, wesentlich durch gleichzeitige Lektüre von Riemann und Clebsch-Gordan. Für die Promotion wurde damals in Heidelberg keine Dissertation verlangt, aber auch nicht einmal eine eingereichte wurde angenommen — N. wollte die astronomische Arbeit als solche benutzen —, so daß sich das Ganze auf eine mündliche Prüfung in der Wohnung des Dekans beschränkte, wobei der Doktorand den Wein zu spenden hatte."

In Heidelberg empfing N. von seinem eben habilitierten Landsmann Lüroth die Anregung zur Fortsetzung seiner Studien in Gießen. Dort hatte sich in jener Zeit um Clebsch und Gordan ein Kreis von jungen Mathematikern geschart, die in engem persönlichem Verkehr mit den zwei umgänglichen geistvollen Dozenten in Vorlesungen und Seminaren, auf Spaziergängen und beim Kaffee lebhafte Anregung zu wissenschaftlicher Betätigung empfingen. Außer den frühesten Schülern von Clebsch in Gießen, Güßfeld und Brill, gehörten zu diesem Kreis in wechselnder Zusammensetzung Lüroth, Gundelfinger, Korndörfer und seit 1868 Noether. Das Interesse richtete sich außer auf Flächenabbildung hauptsächlich auf Abelsche Funktionen. Wie der später aus jenem Kreis — in Verbindung namentlich mit Felix Klein — hervorgegangene Nachruf auf Clebsch (Math. Anm. **7**, 1874) schildert, war es 1863 Clebsch gelungen, an Hand der Dissertationen von Prym und Roch die sieben Siegel zu lösen, mit denen damals für alle Nicht-Göttinger Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen (Journ. f. Math. **54**, 1857) verschlossen war. In der Abhandlung „Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie" (Journ. f. Math. **63**, 1863) hatte Clebsch aus dem Klassenbegriff von Riemann den Begriff des Kurvengeschlechts herausgenommen und auf ebene und Raumkurven angewendet, auch das Abelsche Theorem für die Geometrie der algebraischen Kurven fruchtbar gemacht, dann in dem mit Gordan zusammen verfaßten Buch „Theorie der Abelschen Funktionen" (Leipzig 1866) diese Theorie von dem Dirichletschen Prinzip, auf das Riemann sie gegründet hatte, abgelöst und an das Jacobische

Umkehrproblem angeschlossen. Sie bedienten sich dabei der geometrischen Ausdrucksweise, indem sie zur Definition einer Klasse von algebraischen Funktionen eine „Kurvengleichung" verwendeten und von deren „Doppelpunkten" und „Rückkehrpunkten" sprachen, schufen damit aber unbewußt einen fatalen Gegensatz zu den Analytikern und Arithmetikern, die sich auf dem gleichen Gebiet bewegten. Mancher von ihnen hat auch später noch — vielleicht um der Priorität der eigenen Ansprüche nicht zu nahe zu treten — den Vorwurf, daß die geometrische Richtung die Anschauung als Beweismittel heranzöge, nur zögernd oder gar nicht zurückgenommen und sich davon überzeugen lassen, daß das Beweisverfahren auch bei Clebsch-Gordan einfach algebraisch ist.

Von hier aus nun lag es dem Geometer nahe, den Geschlechtsbegriff, wie für Kurven, so auch für algebraische Flächen zu gestalten; und in einer oft angezogenen folgenreichen Note in den Comptes Rendus **67**, 1868 hatte Clebsch für eine Fläche n-ter Ordnung mit Doppel- und Rückkehrkurven eine Zahl angegeben, die, ähnlich dem Geschlecht für Kurven, gegenüber ein-eindeutiger (birationaler) Transformation sich nicht ändert, „invariant" bleibt, die Anzahl nämlich der durch die Doppel- und Rückkehrkurven der Fläche gehenden linear unabhängigen Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung — das später sogenannte „geometrische Flächengeschlecht". Hier nun setzt zuerst Noethers Tätigkeit ein.

„Der Arbeit, die ich Ihnen hiermit überschicke" (Zur Theor. d. algebr. Funkt. mehrerer Var. Gött. Nachr. 1869), schreibt Noether am 7. 7. 1869 aus Göttingen, wohin er inzwischen mit Clebsch übergezogen war, „werden Sie ansehen, daß sie aus der Sphäre entstammt, die Clebsch umgibt, wenn ich auch die Ideen, die darin entwickelt und angedeutet sind, vollständig für mich in Anspruch nehme." In dieser Note und deren Ausführungen in Math. Ann. **2**, 1869 „Zur Theorie des Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen" wird der oben erwähnte Satz von Clebsch über das *Flächengeschlecht*, auf Flächen mit vielfachen Kurven und Punkten ausgedehnt, bewiesen und auf mehrdimensionale Gebilde in höheren Räumen übertragen. Während in der Note für den Fall des Flächengeschlechtes Null durch Einführung des Begriffs „Kurvengeschlecht" auf die Notwendigkeit einer weiteren Unterscheidung hingewiesen wird, geht Noether in der Abhandlung auf den Nachweis der Invarianz der später sogenannten „adjungierten" (nämlich längs jeder i-fachen Kurve der Fläche n-ter Ordnung $(i-1)$-fach und in jedem k-fachen Knotenpunkt $(k-2)$-fach verschwindenden) Funktionen $(n-4)$-ter Ordnung ein, indem er, ähnlich wie Clebsch und Gordan für Kurven den Integranden des Integrals I. Gattung ein-eindeutig transformiert, und hierbei die Ausführbarkeit eines gewissen Quotienten —

wenigstens für den Fall einer Fläche ohne Singularität — streng beweist. Hiermit ist der wichtige erste Schritt zur Ausfüllung einer empfindlichen Lücke geschehen, die in mehreren Arbeiten verschiedener Autoren offen gelassen war, und deren völlige Erledigung, unter Beschränkung auf algebraische Funktionen einer Veränderlichen, also auf Kurven, mit Noethers Namen für immer verknüpft sein wird. Davon wird sogleich die Rede sein.

„Was da Noether gemacht hat, das hätte ich machen sollen", sagte mir einmal Clebsch, dem die Bedeutung dieser Ergebnisse nicht entging.

Für das Studium der Flächen dritter Ordnung und der auf ihnen liegenden Kurven zeigte sich deren Abbildung auf eine Ebene bedeutsam, die fast gleichzeitig Clebsch mit analytischen, Cremona mit synthetischen Hilfsmitteln vorgenommen hatten Clebsch dehnte alsbald seine Untersuchungen auf andere „rationale" Flächen aus, deren Koordinaten nämlich als rationale Funktionen zweier Parameter darstellbar sind, sowie auf solche, zu deren Darstellung noch ein Quadratwurzelausdruck aus einer solchen Funktion herangezogen werden muß, Flächen also, die auf eine „Doppelebene" abbildbar sind, mit einer durch das Verschwinden des Wurzelausdrucks dargestellten „Übergangskurve". Hier griff Noether mit mehreren Arbeiten ein. In der Note (Gött. Nachr. 1870) „Auf Ebenen eindeutig abbildbare algebraische Flächen" bestimmt er das Geschlecht der Flächen, die sich auf eine Doppelebene mit gegebener Übergangskurve abbilden lassen, und gibt die Bedingung für deren *Abbildbarkeit* auf eine einfache Ebene an. In seiner Heidelberger Habilitationsschrift: „Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen" (Math. Ann. **3**, 1870) transformiert er die Fläche, auf der ein lineares System von rationalen Kurven bekannt ist, in eine Fläche n-ter Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden, womit sie auf die Ebene abbildbar wird. Die Abhandlung im gleichen Band: „Über die eindeutigen Raumtransformationen" usw. behandelt, ebenfalls für Zwecke der Flächenabbildung, die *räumliche Transformation,* die durch drei bilineare Gleichungen zwischen den beiden Koordinatentripeln definiert ist, eine Übertragung der ebenen quadratischen Cremona-Transformation auf den Raum, für die jedoch, wie Noether hervorhebt, ein Analogon zu dem Satz, daß jede höhere ebene Transformation durch eine Folge von quadratischen ersetzbar ist, nicht existiert. Dem Beweis des letzteren Satzes ist die Note „Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen" in Math. Ann. **5**, 1872 gewidmet, der auch den Fall spezieller Lagen der Basispunkte umfaßt.

Der oben erwähnten Frage nach der Ausführbarkeit der Division zweier Polynome der Variabelen s, z: $\psi(s,z)/\varphi(s,z)$ mit Hilfe der zwischen s, z bestehenden algebraischen Beziehung $f(s,z)=0$ gibt Noether in einer Note in den Gött. Nachr. von 1872 und in der berühmt gewordenen Abhandlung: „Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen“ (Math. Ann. **6**, 1872) die Wendung, daß er nach den Bedingungen fragt, welche ψ an den gemeinsamen Verschwindungsstellen von φ und f zu erfüllen hat, damit die identische Gleichung $\psi \equiv A\varphi + Bf$, wo A und B ebenfalls Polynome in s, z sind, besteht. Wenn der (je nach den Umständen verschiedenen) „Schnittpunktbedingung“ für ψ an *jeder* solchen Stelle Genüge geleistet ist, so *gibt* es zwei endliche Polynome A, B der erwähnten Art. In der Formulierung jener Bedingung für jede mögliche Art des Schnittes besteht der „*Fundamentalsatz* der Theorie der algebraischen Funktionen“. Noether führt den Beweis durch eine sehr geschickte Anknüpfung an die bekannte Identität $R \equiv M\varphi + Nf$, wo R die Resultante (etwa in z) von φ und f ist, M und N wieder Polynome sind, indem er mit ψ multipliziert und den Grad des Produktes $M\psi$ hinsichtlich s mit Hilfe von f soweit als möglich erniedrigt, dann in den Koeffizienten der Potenzen von s des so erhaltenen Polynoms diejenigen Faktoren von R, die den einzelnen Schnittpunkten entsprechen, nachweist und damit deren Teilbarkeit durch R selbst feststellt. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich dann durch Kombination der beiden Beziehungen die zu beweisende Identität.

Der Nachweis der Teilbarkeit jener Koeffizienten durch alle Faktoren $(z-a)$ von R, die einer Schnittstelle $z = a$, $s = b$ zugehören, erfolgt durch Anordnung von φ, f nach Dimensionen von $z - a$, $s - b$ und Entwicklung von ψ nach diesen Größen. Diese Entwicklung kann an einer endlichen Stelle abgebrochen werden. An welcher Stelle? Dieser Frage gelten zwei spätere Noten Noethers in Math. Ann. **30** (1887) und **34** (1889), die durch wertvolle Bemerkungen einerseits von A. Voss (ebd. **27**), andererseits von E. Bertini (ebd. **34**) hervorgerufen waren, während die Note in Math. Ann. **40** (1891), Noethers Beweis, den er, wie er immer wieder hervorhebt, unabhängig von Reihenentwicklungen mit nur Hilfsmitteln der Elimination führt, noch einmal in kürzester Gestalt zusammenfaßt.

Es folgt die Zeit, in der in brieflichem und mündlichem Verkehr die *gemeinsame Arbeit* Brill-Noether im 7. Band der Mathematischen Annalen entstanden ist: Mitte 1872 bis Ende 1873. — Der Nachruf auf Clebsch, den seine Freunde und Schüler dem so rasch aus dem Leben Geschiedenen gewidmet hatten, veranlaßte zwischen Noether und mir einen häufigen Austausch, den die Nähe unserer Wohnorte Heidelberg und Darmstadt begünstigte. An meiner Arbeit „Über Entsprechen von Punktsystemen auf einer Kurve“ (Gött. Nachr. 1871) interessierten Noether die algebraischen Probleme, die mit dem Anhäufen von Basispunkten einer Kurvenschar auf der Grundkurve (M. Ann. VI, S. 61) zusammenhängen, durch die nämlich die Existenz von solchen „ausgezeichneten" Gruppen von Punkten auf der Kurve nachgewiesen wird, von denen eine Anzahl ohne Aufwand weiterer Bestimmungsstücke durch die anderen mitbestimmt sind, Aufgaben, zu denen u. a. auch die gehörten, auf die in § 61 der „Theorie der Abelschen Funktionen" von Clebsch und Gordan (Leipz. 1866) hingewiesen war, wo es sich um das identische Verschwinden der Θ-Funktion handelt.

Ein gewisses Eliminationsverfahren nämlich, angewendet auf die zu einer gegebenen Grundkurve n-ter Ordnung „adjungierten" Kurven (die nämlich durch jeden i-fachen Punkt der Kurve $(i-1)$fach hindurchgehen) $(n-3)$-ter Ordnung, die „φ-Kurven", oder vielmehr auf Bildungen aus den Polynomen φ, liefert u. a. Funktionen einer Riemannschen Klasse, die in einem Minimum von Punkten der Grundkurve null und unendlich werden, und die zur Transformation der Grundgleichung auf die Riemannsche Normalform $f(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0$ verwendbar sind, wo, je nachdem p gerade oder ungerade ist, $\mu = \frac{1}{2}(p-2)$ bzw. $= \frac{1}{2}(p-1)$ ist. Ihre Mannigfaltigkeit (und damit die der Schar ihrer Schnittpunktgruppen) hatten schon vorher auf transzendentem Weg Roch (J. f. M. 64) und Riemann (J. f. Math. 65) bestimmt. Riemann verwendete sie für die Herstellung von Argumenten, für die die Thetafunktion mit einer Anzahl ihrer Differentialquotienten verschwindet, und fand (für den besonderen Fall, um den es sich dort handelt), daß durch das Abelsche Theorem jeder solchen ausgezeichneten Gruppe eine andere ebensolche zugeordnet wird.

Diese Bemerkung nun läßt sich sofort auf alle von φ-Kurven ausgeschnittenen ausgezeichneten Punktgruppenscharen übertragen und bildet in dieser Gestalt zusammen mit der Abzählung ihrer Mannigfaltigkeit den „Riemann-Rochschen Reziprozitätssatz". Auf diesen Satz richtete sich zunächst Noethers Aufmerksamkeit, und ein algebraischer Beweis desselben war, nachdem seine algebraische Fassung feststand, das Ziel unserer beiderseitigen Bestrebungen. Diese Fassung gibt ihm Noether zuerst an einem Beispiel (Brief vom 6. 6. 72). Auch ein Ansatz zu dem später sogenannten „Restsatz", für einen besonderen Fall ausgesprochen, findet sich in einem Briefe Noethers vom 30. 11. 72. Da glückt uns beiden gleichzeitig der algebraische Beweis des Satzes. Am 16. 1. 73 schreibt Noether: „Die Resultate, welche Sie mir gestern [brieflich] entwickelt haben, zeigen eine völlige Übereinstimmung mit den meinigen, daß es in der Tat geeignet sein dürfte, die Veröffentlichung gemeinschaftlich zu besorgen. Mein Gedankengang ist nur bei dem Beweis des R. R-Satzes etwas komplizierter, indem der Satz meiner Note wiederholt [nämlich bei dem Schluß von $n-3i$ auf $n-3(i+1)$] angewendet wird".

So einigten wir uns auf eine gemeinsame Veröffentlichung. Aber erst die Ausarbeitung unserer Note (Gött. Nachr. v. Jan. 1873) für die Mathematischen Annalen („Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie von A. Brill und M. Noether", Math. Ann. 7, 1873) regt die Erfindungskraft Noethers zu einer Höchstleistung an. Er setzt sich zum Ziel, die Beweise des ersten Teiles unserer Ausführung von allen Abzählungsergebnissen frei zu machen, und dringt damit schließlich durch. Seiner Feder verdankt dieser Teil die Schärfe und Allgemeinheit der Beweisführung, die wohl den Hauptwert unserer Abhandlung ausmacht. Insbesondere gelingt Noether der Nachweis, daß für jede Funktionsklasse, welches auch ihre „Moduln" (die gegenüber birationaler Transformation unveränderlichen Konstanten der zugehörigen Kurvengleichung) sind, die Mannigfaltigkeit ihrer φ-Kurven immer gleich $p-1$ ist, wenn p die Geschlechtszahl ist, ferner daß die Mannigfaltigkeit selbst eine invariante Schar bildet, und daß demzufolge die Eigenschaften der von den φ auf der Grundkurve ausgeschnittenen Punktgruppenscharen („Spezialscharen") invariant sind. Auf dieser Grundlage erst konnten die Beweise des Riemann-Rochschen Satzes und des von der Erhaltung des Geschlechts bei ein-eindeutigen (birationalen) Transformationen streng gefaßt und von jedem Rest ihrer Herkunft aus transzendentem bzw. projektivem Ursprung befreit werden.

Der zweite Teil enthält wesentlich Abzählungen, die sich auf Kurven mit allgemeinen Moduln beziehen, und die, wie die Bestimmung der Anzahl der Moduln in § 16 und die der Konstantenzahl einer Raumkurve — an die später Noether wieder angeknüpft hat — von Brill beigetragen worden sind.

Es sei mir anschließend eine persönliche Bemerkung gestattet.

Zwischen Noether und mir bestand die Verabredung, daß wir nach außen hin für unsere gemeinsame Arbeit so eintreten wollten, als ob jeder sie allein gemacht hätte. Noether, der sich in der Folge immer wieder auf sie zu berufen hatte, hat dieses Abkommen jederzeit aufs treueste gehalten. Am 21. 12. 1892 schreibt er: „Ich habe noch nie — wenigstens meines Wissens — nach außen hin Veranlassung gegeben, eine Ungleichheit in unseren Ansprüchen auf B. N. [Brill-Noether] zu vermuten; auch in meinen Gedanken existiert keine solche Vermutung." — Wenn ich in diesem Nachruf den Schleier des beiderseitigen Anteils an der Arbeit, soweit die Briefe dies sicher festzustellen erlauben, etwas lüfte, um Noethers Verdienst in das richtige Licht zu setzen, so werden die Manen des Verstorbenen mir dies verzeihen.

Durch die Abhandlung B. N. im 7. Band der Annalen war die Theorie der algebraischen Funktionen zum erstenmal von den Spuren ihres transzendenten Ursprungs befreit und auf rein algebraische Grundlage gestellt worden. Insbesondere vermittelt der „Restsatz“ — an Stelle des Abelschen Theorems — eine von der Ordnung der ausschneidenden Kurvenschar und damit vom projektiven Standpunkt unabhängige Geometrie der Punktgruppen auf der Kurve. — Als nächste Aufgabe bot sich nun der Versuch dar, die hierbei gebildeten Begriffe und Beweisverfahren auf algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen, d. h. auf die Theorie der *algebraischen Flächen*, auszudehnen. Hatte Noether im 2. Bande der Math. Ann. den Satz von Clebsch über die Erhaltung der adjungierten (s. u.) Funktionen φ_{n-4}, die einer Fläche n-ter Ordnung zugehören, mit einem Beweise versehen, der dem Satz eine breitere Grundlage gibt, so stellt er in der Arbeit: Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde (Math. Ann. 8, 1874) den Nachweis der Invarianz einer aus dem Grad der Fläche und gewissen Singularitätenzahlen zusammengesetzten numerischen Größe (dem schon von Cayley für einfache Fälle formulierten „numerischen Flächengeschlecht“ p_n) an die Spitze. Im 4. Band der Math. Ann. (1876) hatte Zeuthen seinen eleganten Beweis für die Erhaltung der Geschlechtszahl p einer ebenen Kurve auf Flächen ausgedehnt. Indem Noether diesem Gedankengang eine algebraische Fassung gibt, erhält er zwei Transformationsrelationeu, deren eine die Erhaltung von p_n beweist, während die andere, die zunächst nur relativinvariante „Zeuthen-Segresche Invariante“, durch die Einführung gewisser ausgezeichneter Kurven auf der Fläche durch Noether ebenfalls in eine absolute Invariante verwandelt wird. Indem er die Erhaltung der adjungierten (durch jede i-fache Kurve $(i-1)$fach gehenden) Flächen $(n-4)$-ter Ordnung φ_{n-4} in voller Allgemeinheit beweist, zeigt er die Invarianz nicht nur der Anzahl der linearunabhängigen φ-Flächen, des *„geometrischen Flächengeschlechts“* p, sondern auch die des Geschlechts p_1 der von ihnen auf der Grundfläche ausgeschnittenen Kurven (des „Kurvengeschlechts“ der Fläche) sowie die der Zahl p_2 ihrer gegenseitigen Schnittpunkte auf der Fläche, eine Zahl, die mit p_1 durch die Relation $p_2 = p_1 - 1$ zusammenhängt. Auch dehnt er die Untersuchung auf dreidimensionale Gebilde aus und bereitet durch Bildung der φ-Flächen für Raumkurven den Boden für seine späteren Untersuchungen über Raumkurven vor.

Auf die Theorie der algebraischen Flächen kommt Noether — außer in einer Arbeit in den Annali di mat. (2^a) 5 1871, die die eben erwähnte einleitet — noch mehrmals zurück. In der oben besprochenen Abhandlung im 2. Band der Math. Ann. hatte Noether, nach dem Vorgang von Clebsch, die überall-endlichen Integrale längs einer ebenen

Kurve beim Übergang zu Flächen durch überall-endliche Doppelintegrale ersetzt, indem integrabele einfache Differentialausdrücke, die für alle Punkte der Fläche einen endlichen Wert haben, nur für besondere Flächengattungen existieren. Mit solchen von der letzten Art hatte sich inzwischen E. Picard (Journ. d. Math. (4) **1**, 1885) beschäftigt. In der Abhandlung „Über die totalen algebraischen Differentialausdrücke" (Math. Ann. **29**, 1886) dehnt Noether dessen Ergebnisse erheblich aus — wobei statt der Reihenentwicklungen in singulären Stellen sein Transformationsverfahren zur Verwendung kommt — indem er von allen Flächen vom Geschlecht 1, welche zwei unabhängige totale Differentialausdrücke erster Ordnung du, du' (mehr sind überhaupt nicht möglich) besitzen, beweist, daß sich ihre Koordinaten durch ganze Potenzreihen nach $u - \alpha$, $u' - \alpha'$ (α, α' gehören einer endlichen Flächenstelle zu), also durch mehrfach periodische Funktionen von zwei Parametern darstellen lassen.

Einen höchst bemerkenswerten Satz für Flächen, der dem Riemann-Rochschen Satz entspricht, beweist Noether in einer Note der Comptes Rendus von 1886. Die Ungleichung, in die N. den Satz kleidet, hat später Enriquez (Castelnuovo et Enriquez, réc. resultats dans la théorie des surfaces, Math. Ann. **48**, 1896) durch Berücksichtigung gewisser Sonderfälle in eine Gleichung verwandelt.

In einer Mitteilung an die Berliner Akademie „Anzahl der *Moduln einer Klasse algebraischer Flächen*" (Sitzbr. der Pr. Ak. d. Wiss. 1888) ermittelt Noether diese Anzahl ähnlich, wie sie die Abhandlung Brill-Noether für Kurven bestimmt, nämlich durch Transformation der Fläche mittels adjungierter Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnnng auf eine Normalform, deren ebene Schnitte die Ordnung p_2 und das Geschlecht p_1 besitzen, und durch deren Doppelkurve eine einzige Fläche von der Ordnung $p_2 - 5$ geht. Die Anzahl der nach Einführung dieser Bedingungen noch unbestimmt bleibenden Parameter der Normalform ist die ihrer Moduln und gleich $10(p+1) - 2p_2$.

Dem Abschluß der Arbeit im 8. Annalenband folgt eine Zeit (1874 bis 1876) wiederholten Ringens mit dem heikelen Problem der identisch verschwindenden *Hesseschen Determinante.* Gegen die Richtigkeit des von Hesse aufgestellten Satzes, daß eine Form von n Veränderlichen, deren Determinante identisch verschwindet, sich linear in eine solche mit weniger Veränderlichen überführen lasse, d. h. daß es zwischen ihren ersten Polaren eine homogene lineare Relation gebe, die für alle Werte der Veränderlichen erfüllt ist, waren mehrfach Bedenken erhoben worden. Wiederholt klagt Noether über die Sprödigkeit des Stoffes, glaubt bald den Satz bestätigen zu können, bald verwirft er seine Überlegung wieder, bis es schließlich den vereinten Anstrengungen von

Noether und Gordan gelingt — wie Noether in seinem Nachruf auf Gordan ausführt —, durch Umkehrung der Fragestellung, d. h. von der erwähnten Relation selbst ausgehend, einen Weg zu finden, der zum Ziele führt. Der Satz ist richtig bloß für Formen von 2, 3 und 4 Veränderlichen, darüber hinaus nicht mehr.

In die folgenden Jahre fallen neben anderen Arbeiten Ausführungen zu der Abhandlung Brill-Noether. Es handelt sich zunächst um das Erfassen beliebig *singulärer Punkte* einer ebenen Kurve hinsichtlich ihres Einflusses auf das Geschlecht und die Plückerschen Gleichungen. Man hatte zwar schon vorher quadratische Cremona-Transformationen zur Trennung der Zweige eines mehrfachen Punktes verwendet. Aber erst Noether benutzt dieses Hilfsmittel grundsätzlich, indem er es („Über die singulären Wertsysteme usw." Math. Ann. **9**, 1875) wechselweise in zwei verschiedenen Gestalten anwendet, und bewirkt so die völlige Auflösung jeder noch so hohen Singularität. Und zwar hat er hierbei sowie bei dem Nachweis, daß jede singuläre Stelle sich auffassen läßt als ein vielfacher Punkt, an den andere solche in Richtung seiner Elemente herangerückt sind, die Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches der Sätze der Abhandlung im 7. Band der Annalen auf beliebig singuläre Kurven im Auge, wozu in Ann. **23** (Rationale Ausführung ...) die nötigen algebraischen Entwicklungen gegeben werden. Dabei ist festzustellen, daß seine Transformationen die für eine Singularität gültigen Reihenentwicklungen gerade in dem Umfang liefern, wie sie für die oben erwähnten Zwecke nötig sind. In dem Aufsatz „Les combinaisons charactéristiques etc." (Rend. Circ. Mat. Palermo **4**, 1890) weist Noether die Stelle nach, wo die bekannten „kritischen" (charakteristischen) Exponenten der Reihenentwicklungen in seinen sukzessiven Transformationen auftreten.

In einer Programmschrift über den Riemann-Rochschen Satz (Leipzig 1879) hatte F. Lindemann die Aufgabe angegriffen, die Sätze der Abhandlung im 7. Annalenband auf den Fall von Punktgruppen auszudehnen, die auf der Grundkurve von *nichtadjungierten* Kurven ausgeschnitten werden, und sich dabei eines Beweisverfahrens von Roch bedient, das an Riemanns Darstellung der algebraischen Funktionen durch Summen von Abelschen Integralen 2. Gattung anknüpft. Alsbald (Math. Ann. **15**, 1879) unterzieht sich Noether der Aufgabe, Lindemanns Ergebnisse mit algebraischen Hilfsmitteln zu begründen bzw. richtigzustellen. Unter Verwendung von zwei neuen Begriffen, die mit der teilweisen Adjunktion der Schnittkurvenschar zusammenhängen, und von zwei neu definierten Zahlen, die an Stelle des Kurvengeschlechts treten, leitet Noether auf Grund bloß des „Fundamentalsatzes" Aussagen über Scharen von

Punktgruppen, die von nichtadjungierten Kurven ausgeschnitten werden, ab, die in gleichem Umfang gelten, wie die in Annalen 7 für adjungierte ausgesprochenen. Der Restsatz und der Riemann-Rochsche Satz spalten sich dabei je in zwei Sätze.

In einer Vorlesung, die Riemann 1861/62 über die „Theorie der Abelschen Funktionen für den Fall $p = 3$“ (Math. Werke Nr. XXX) gehalten hatte, und in der ebenso benannten Schrift von H. Weber (Berlin 1876) lagen Modelle vor für die Durchführung des kühnen Gedankengangs, den Riemann zur allgemeinen Theorie entworfen hatte, und luden zur Bearbeitung der dort gelösten Fragen auch für höhere Fälle ein. Namentlich hatte sich der Begriff der *Charakteristik* einer Thetafunktion als wichtig erwiesen, den geometrisch bereits Clebsch erfaßt und zur Abzählung von Systemen von solchen Kurven φ verwendet hatte, die überall, wo sie die Grundkurve treffen, sie berühren. Die Wurzel aus einer Funktion φ von dieser Beschaffenheit, „Abelsche“ oder „Wurzelfunktion“ genannt, wird als Quotient von zwei Thetafunktionen $\vartheta_\varepsilon(u_1, u_2, \ldots u_p) = \vartheta_\varepsilon(u)$, $\vartheta_\varepsilon(u)/\vartheta_\eta(u)$, dargestellt, deren p Argumente sich im allgemeinen je um Systeme von halben Perioden von den Argumenten der durch die bekannte Reihe dargestellten ϑ-Funktionen $\vartheta_0(u)$ unterscheiden. Zwei Systeme ε und η von je p Zahlen 0 und 1, paarweise einander zugeordnet, die Koeffizienten jener halben Perioden, bilden nun die „Charakteristik“, die jener Abelschen Funktion $\vartheta_\varepsilon/\vartheta_\eta$ zugehört. Hiernach sind alle Thetarelationen durch Beziehungen zwischen Charakteristiken-Systemen bedingt und somit an kombinatorische Prozesse angegliedert. Zu diesen Relationen gehört namentlich die Darstellung des ϑ-Produkts $\vartheta(u + v + w)\ \vartheta(u - v)$ durch Summen von Produkten der Form $\vartheta_\varepsilon(u + w)\,\vartheta_\varepsilon(u)$, mit Koeffizienten, die von u unabhängig sind: das „Additionstheorem“ der Thetafunktion.

In der Arbeit „Zur Theorie der Thetafunktion von vier Argumenten“ (Math. Ann. **14**, 1878) greift Noether, an das für den Fall $p = 3$ vorliegende Verfahren anschließend, das Problem der Charakteristiken-Gruppierungen auf, indem er der Anordnung der Charakteristiken in Siebener-Systeme, die Weber für $p = 3$ im Anschluß an die Theorie der Doppeltangenten der Kurven 4. Ordnung vorgenommen hatte, für $p = 4$ eine solche in Achter-Systeme an die Seite stellt, die eine einfache Gestalt des Additionstheorems der Thetafunktion liefert. In der Abhandlung: „Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten“ (Math. Ann. **16**, 1879) dehnt Noether die Untersuchung auf den allgemeinen Fall aus und stellt, unter Verwertung der Gesichtspunkte, die C. Jordan in seinem Traité des substitutions für die mit der Theorie der Charakteristiken zusammenhängenden Substitutionsgruppen entwickelt, indem er nur solche Beziehungen verfolgt, die bei den zugehörigen Substitutionen invariant bleiben, durch geschickte Zurückführung der p-reihigen auf die $(p-1)$-reihigen eine allgemeine Theorie der Charakteristiken auf, derzufolge neben den eigentlichen Charakteristiken „Gruppen-Charakteristiken" herzustellen sind, welche von gewissen die gleiche Summen ergebenden Charakteristikenpaaren gebildet werden. Und nun führt die Zuordnung der letzteren zu Systemen halber Perioden wieder zum Additionstheorem der Thetafunktion für allgemeine p „in äußerst einfacher und übersichtlicher Gestalt".

Unter Übergehung von zwei Arbeiten zur Theorie der Resolventen, Math. Ann. **15** und **46**, die grundsätzlich wichtige Fragen nicht betreffen, wende ich mich gleich zu der Abhandlung „Über die *invariante Darstellung* algebraischer Funktionen" (Math. Ann. **17**, 1880), die, wie die oben besprochene, auf eine Anregung von H. Weber zurückgeht. In einer Arbeit im 13. Annalenband hatte sich dieser mit solchen speziellen Klassen von algebraischen Funktionen beschäftigt, deren Thetafunktion das früher erwähnte identische Verschwinden zeigt.

Die im allgemeinen Fall endliche Anzahl von φ-Kurven, welche überall, wo sie die Grundkurve treffen, sie berühren (Abelschen Funktionen), geht alsdann in *Systeme* von solchen über, was sich durch quadratische Relationen zwischen den Funktionen φ ausdrückt. Ein junger Mathematiker, L. Kraus, hatte die letztere in den Fällen $p = 3, 4, 5$ geometrisch untersucht, indem er die p Funktionen φ als homogene Koordinaten in einem Raum von $p-1$ Dimensionen deutet. Für die auf diese Weise definierte „Überraumkurve", der später die Italiener den Namen „Normalkurve" beigelegt haben, stellen jene Relationen Gleichungen von „Überflächen" dar, auf denen die Kurve liegt.

In jenem Aufsatz nun macht Noether die Relationen selbst zum Gegenstand der Untersuchung, bestimmt die Anzahl der im allgemeinen Fall *zwischen den φ-Funktionen* bestehenden Relationen von der μ^{ten} Dimension und führt den grundsätzlich wichtigen Nachweis, daß die allgemeinste Form der μ^{ten} Dimension in den φ $\Phi^{(\mu)}$ durch ihr Verschwinden eine Vollschar auf dem Grundgebilde ausschneidet, daß also alle Sätze, die invariante Eigenschaften betreffen, einen ihrer Bedeutung entsprechenden Ausdruck erst durch das Verschwinden solcher Formen erhalten. Dies bezieht sich namentlich auch auf die „Abelschen" Funktionen. Noether gibt, wie Weber für $p = 3$, der Gleichung solcher Kurven, die die Grundkurve überall, wo sie sie treffen, einfach berühren, die Gestalt $\Phi^{(\mu)} = 0$ und zeigt, daß sich ihnen solche $\Phi^{(\nu)} = 0$ zuordnen lassen, deren Berührungspunkte mit denen der $\Phi^{(\mu)} = 0$ auf einer Kurve $\Phi^{\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = 0$

liegen. — Übrigens lassen sich die oben erwähnten Normalkurven, wie neuerdings in einer noch auf Anregung von M. Noether selbst unternommenen Arbeit (Math. Ann. 88, 1923) K. Petri nachweist, im allgemeinen durch den Schnitt von bloß quadratischen Überraum-Flächen darstellen.

In der Arbeit: „Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen" (Math. Ann. 37, 1890) führt Noether den Standpunkt durch, daß auch auf diesem Gebiete alle Bildungen, die den Charakter der Invarianz gegenüber birationalen Transformationen haben, bloß durch das System der p Funktionen φ (Formen 1. Gattung) und der aus ihnen abgeleiteten Formen $\Phi^{(\mu)}$ darzustellen sind, und errichtet auf dieser Grundlage eine Theorie der symmetrisch gebauten Differentialformen $\Phi^{(\mu+1)}(cx\,dx)/\Phi^{(\mu)}\,\Sigma c_i f_i$, gibt ihre Reduktion auf die Grundform der verschiedenen Gattungen an, die Normierung dieser Grundformen, der algebraischen Funktion, das Theorem der Vertauschung von Parameter und Argument bei den „Formen 2. Gattung", die Differentialform des Abelschen Theorems, kurz den ganzen Apparat, der einer Theorie der Algebraischen und Abelschen Funktionen zugrund zu legen ist, zwar im wesentlichen angelehnt an das Werk von Clebsch-Gordan, aber auf streng algebraischer Grundlage.

Ein zweiter Teil der umfangreichen Abhandlung, der denjenigen transzendenten Bildungen gewidmet ist, die bei Clebsch-Gordan der Thetafunktion voraufgehen, behandelt das Abelsche Theorem und das Jacobische *Umkehrproblem*, schließt aber hinsichtlich des letzteren (nicht etwa an die eigene frühere Abhandlung im 28. Annalenband der Math. Ann., sondern) an die von Weierstraß für den hyperelliptischen Fall definierte Funktion Al an. Clebsch-Gordan verwenden für diesen Zweck eine Funktion $T_{\xi\eta}\binom{x}{c}$, die Summe von p Integralen 3. Gattung mit den Grenzen $x_1, \ldots x_p$; $c_1, \ldots c_p$ und den Unstetigkeitsstellen ξ, η. Diese Funktion ist es, die in die Koeffizienten der Gleichung p^{ten} Grades eingeht, deren Wurzeln die gesuchten oberen Grenzen $x_1, \ldots x_p$ der Integralsummen des Umkehrproblems sind. Die notwendige Zerlegung der Funktion T, die von $2p+2$ Parametern abhängt, in solche von weniger Veränderlichen erfordert mühsame Rechnungen, welche die von p Argumenten abhängende Funktion $Al(V_1 V_2 \ldots V_p)$ nicht verlangt, deren Argumente V mit den Integralsummen u des Problems in hier nicht näher auszuführender Weise zusammenhängen. Und zwar stimmen die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\log Al(V)$ nach den V mit gewissen aus der Funktion T abgeleiteten Bildungen überein. Damit ist die Beziehung zwischen den beiden Lösungen, die das Umkehrproblem von Clebsch-Gordan und von Weierstraß erfährt, hergestellt.

Anfang 1882 schließt Noether die große Abhandlung „Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen *Raumkurven*“ ab, die er an frühere Untersuchungen anknüpfend Februar 1882 der Berliner Akademie in Bewerbung um den Steinerpreis einreicht. Indem er auf die Sätze der Arbeiten im 7. und 8. Band der Math. Annalen zurückgreift, wünscht Noether der Theorie der Raumkurven eine sichere Grundlage zu geben. Wie lückenhaft und zersplittert unsere Kenntnisse von den Raumkurven bis dahin waren, zeigt ein Blick auf das II. Kapitel des 2. Bandes der Raumgeometrie von Salmon-Fiedler 2. Auflage (Leipz. 1874), wo der einzige Satz von allgemeiner Bedeutung, die Erzeugung der Raumkurven durch Kegel und Monoid, die Cayley angegeben hat, in den Literaturnachweisen steht, und von weiteren Gesichtspunkten außer der Übertragung der für ebene Kurven geltenden Plückerschen Formeln auf Raumkurven nur noch die Sätze für vollständige Durchschnittskurven zur Verwendung kommen. In den beiden ersten Teilen der Noetherschen Abhandlung erhalten diese und einige später von Halphen, Sturm und Valentiner angegebenen Sätze eine feste Begründung und Umgrenzung. Noether selbst fügt eine Reihe neuer Gesichtspunkte zu, so durch Angabe der unteren Grenze μ für die Ordnung einer Fläche F_μ, die eben noch durch eine Raumkurve R_m^p der Ordnung m und vom Geschlecht p hindurchgeht, und der Zahl der Bedingungen, die diese Forderung ihr auferlegt, ebenso einer unteren Grenze für die Ordnung $\nu (\geqq \mu - 3)$ einer Fläche F_ν, die noch durch die auf F_μ gelegene Kurve $R_m^p (m \leqq \mu\nu)$ hindurchgeht, endlich auch gewisser Ungleichungen, denen die Konstantenzahl einer Raumkurve zu genügen hat. — Diese Sätze bereiten die Aufzählung aller Kurvenfamilien bis zur 17. Ordnung hinauf vor, die lückenlos im 3. Teil folgt, sowie die genaue Konstantenbestimmung der einzelnen Typen. Wer diesen dritten Teil zu benutzen Gelegenheit hatte, wird die Fülle der entwickelten Hilfsmittel, ihre umsichtige Verwendung und die Zuverlässigkeit der ebenso reichen wie gebräuchlichen Sammlung erkennen.

Zugleich mit Noethers Arbeit war eine solche von Halphen „Sur la classification des courbes algébriques“ mit dem Preise gekrönt worden. Verwendet Noether für die Ergänzung einer gegebenen Raumkurve zu vollständigen Durchschnitten seine „Restmethode“, so ist Halphens Hilfsmittel ein langwieriger Algorithmus, der schließlich zu einer geometrisch nicht erfaßbaren „courbe adjointe“ und damit zu den benötigten Ungleichungen führt. — Auch scheint es nicht, daß Halphen dem Ziel, das verwickelte und vielseitige Gebilde, das man algebraische Raumkurve nennt, nach Familien anzuordnen, näher gekommen ist. Erst in neuester Zeit ist, auf Grund der Andeutung einer Preisfrage der Dänischen Akademie der Wissenschaften, die Zeuthen veranlaßt hat

— nämlich als Einteilungsgrund die Art des Zerfallens einer Raumkurve in ein System von sich schneidenden geraden Linien zu verwenden — auch für Kurven in mehrdimensionalen Räumen, die Frage mit Erfolg von F. Severi aufgenommen und der Lösung zugeführt worden (Vorlesungen über algebraische Geometrie von Severi, übers. von Löffler, Teubner 1921, Anhang G).

Auf Raumkurven kommt Noether noch einmal zurück in der bedeutungsvollen Schrift „Über die reduktibelen algebraischen Kurven“ (Acta math. **8**, 1886), wo die Ergebnisse der Abhandlung Brill-Noether auf zerfallende Kurven angewendet werden.

Für die irreduktibele ebene Kurve stimmt der numerische Ausdruck für das Geschlecht, durch Grad und Singularitätenanzahl dargestellt, mit der Anzahl der zur Kurve gehörigen linear unabhängigen φ-Kurven überein. Für eine *zerfallende* Grundkurve aber erhöht sich, wie durch Untersuchungen an Integranden 1. Gattung Christoffel (Annali di mat (3) **9**, 1880) nachgewiesen hatte, die Zahl der letzteren. Noether drückt die Anzahl der linear unabhängigen φ-Kurven durch das numerische Geschlecht der Bestandteile aus, in die die Grundkurve zerfällt, und gewinnt so, immer bloß auf den Fundamentalsatz gestützt, den Geschlechtsbegriff für eine zerfallende Kurve zugleich mit einem Kriterium der Irreduktibilität einer Kurve. Bezüglich der zerfallenden Raumkurven erhält er durch Einführung der Begriffe der adjungierten Flächen φ und der Vollschar eine sichere Grundlage für seine Abzählungen, so die Bedingungen für eine Fläche φ, damit sie durch alle Schnittpunkte eines Systems von zerfallenden Raumkurven, die zusammen einen vollständigen Schnitt zweier Flächen bilden, hindurchgeht. Dabei kommt er zu dem eleganten Ergebnis, daß zwei Kurven einer Fläche zusammen nur dann als Zerfallprodukt einer Raumkurve gelten können, wenn sie mindestens noch in einem Punkte zusammenhängen, ein Satz, den später auf anderer Grundlage der Verfasser dieses Nachrufs bestätigt hat. (Math. Ann. **64**, 1907, S. 297.)

Zwei bemerkenswerte Noten im J. f. Math. **92** (1880) und **97** (1882) haben zum Ziel, den Ausgangspunkt, den Weierstraß für die Definition des Geschlechtsbegriffs wählt, und dessen sog. „Lückensatz“ an die Abhandlung Brill-Noether anzuschließen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Punkt einer Gruppe für die zugehörige lineare Schar zu einem festen wird (von N. später „Reduktionssatz“ genannt), wird zwar schon in der erwähnten Abhandlung bei der Bestimmung der Zahl der φ-Kurven (§ 4) als Beweisglied verwendet. Aber in J. f. M. **97** wird der Satz seiner Bedeutung nach selbstständig formuliert; und die kunstvolle Verwendung von Gruppen mit festen Punkten zeugt von der außergewöhnlichen Begabung Noethers für feine und abstrakte Schlußweisen.

Auch die strenge Fassung des Cayleyschen und verwandter Kurven-*Schnittpunktsätze,* die ein Schüler Noethers, Bacharach, zum Gegenstand seiner Dissertation gemacht hat, beruht auf dem Reduktionssatz.

Ein letzter Schritt blieb im Anschluß an die Abhandlung im 7. Annalenband zu tun noch übrig. Man hatte den Verfassern vorgeworfen, daß sie im Gegensatz zu den Theorien z. B. von Weierstraß, Christoffel u. a. durch Verwendung von Schnittpunktsätzen das Irrationale heranzögen. In der Arbeit Math. Ann. **23** (1883) „Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen“ stellt sich Noether die Aufgabe, diesem Einwand grundsätzlich — selbst für den Fall zerfallender Kurven (ohne Doppelzweige) — zu begegnen. Es handelt sich bei der Lösung des Problems der Doppel- und vielfachen Punkte, bei der Bildung von „adjungierten“ Kurven, von Punktgruppen u. a. immer nur um *rationale* (Eliminations-)Prozesse und Lösung von linearen Gleichungen, auch bei der Bestimmung der Multiplizität des Schnittpunktes zweier Kurven nur um wiederholte Verwendung gewisser von Noether bevorzugter quadratischer Ebenentransformationen, also um Resultantenbildungen, wobei auch die verwickeltsten Singularitäten erfaßt werden.

Mit dieser grundsätzlich wichtigen Abhandlung schließen Noethers Beiträge zur Theorie der algebraischen Funktionen wesentlich ab. Abgesehen von den bereits erwähnten Nachträgen zum Fundamentalsatz und den gleichfalls besprochenen Abhandlungen zur Flächentheorie und zur Theorie der Differentialausdrücke folgen einige Arbeiten, die der Ausführung früherer Ansätze gelten, bis dann der umfangreiche *Bericht:* „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit von A. Brill und M. Noether“ (Jahresberichte der Deutschen Math.-Vereinigung Band III, 1894) die produktive Tätigkeit der Beiden überhaupt für längere Zeit festlegt.

Die im Jahre 1890 gegründete Deutsche Mathematiker-Vereinigung hatte sich u. a. das Ziel gesetzt, Berichte über die geschichtliche Entwicklung einzelner Wissenszweige in ihrer Zeitschrift zu veröffentlichen (Gutzmer, Geschichte der D. M.-V. S. 6 Leipzig 1911). Auf der Tagung in Halle 1891 war ein solcher Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen Noether und Brill übertragen worden. Die in Aussicht genommene Beteiligung von Kronecker, vielleicht durch einen seiner Schüler, wurde durch das unerwartete Hinscheiden Kroneckers vereitelt. Nur widerstrebend und bloß auf Noethers bestimmte Erklärung hin, daß mein Rücktritt das ganze Unternehmen zu Fall bringen würde, erklärte ich mich zur Mitwirkung bereit, wohl wissend, daß es sich um ein mehrjähriges Festlegen unserer beiderseitigen ganzen Arbeitskraft handeln würde. — Unser Briefwechsel aus den Jahren 1891—94 redet von unabsehbaren geschichtlichen Studien, Entwürfen, gegenseitigen Ausgleichen, aber auch von einer erheblichen Erweiterung des Gesichtskreises von uns Beiden.

Wir hatten gleich zu Beginn den Stoff nach der Zeit verteilt: die ältere Zeit bis Riemann einschließlich fiel mir zu und bot bei der Reichhaltigkeit der Tübinger Bibliothek keine wesentlichen Schwierigkeiten. Wie aber war die Neuzeit zu behandeln, die Noether übernommen hatte, zumal da u. a. über Weierstraß' Theorie keine anderen Quellen als geschriebene Vorlesungshefte, darunter freilich die treffliche Ausarbeitung von O. Hölder, zur Verfügung standen? — Noether entschied sich für eine *vergleichende* Behandlung der bekannten Theorien, wobei jedoch von vornherein — um nicht ins Uferlose zu geraten — die auf arithmetischer Grundlage beruhenden von Kronecker und von Dedekind-Weber, sowie die junge Theorie der italienischen Mathematiker, die die algebraische Kurve im mehrdimensionalen Raum in den Mittelpunkt rückt, ausgeschlossen wurden.

Mit seiner ganzen Arbeitskraft und kritischen Veranlagung wendet sich Noether nun der Sichtung und Vergleichung des Übrigen zu, besonders der Theorie von Weierstraß in den verschiedenen Phasen ihrer Entwicklung, stellt sie hinsichtlich ihrer Ergebnisse und Beweismittel, den schwer zu überblickenden Gang sorgfältig gliedernd, denen von Riemann und Clebsch-Gordan gegenüber und durchdringt sie mit den eigenen Anschauungen und Bezeichnungsweisen, bis in die letzten Winkel hineinleuchtend, so gründlich, daß sich überall ein abschließendes, unangreifbares Urteil einstellt. Er wird der erfinderischen Kraft von Plücker und Clebsch, die er als einen notwendigen Durchgangspunkt zur strengen Theorie hoch bewertet, trotz der vielfach mangelnden Umgrenzung ihrer Sätze, ebenso gerecht, wie er den strengen Maßstab anerkennt, den Weierstraß an die seinige legt. Er gibt gegenüber der Weierstraßschen Residuentheorie dem Restsatz den Vorzug, verschweigt aber auch nicht eine gewisse Überlegenheit des Analytikers bezüglich der wirklichen Herstellung der algebraischen Funktionen. Besonders anregend ist der Abschnitt über die invarianten Bildungen, zu dem er die Theorien von Christoffel und von Klein heranzieht, abgefaßt. Aber seine ganze Liebe bilden der Bericht über die singulären Punkte und der über Wurzelfunktionen und Charakteristikensysteme, sein eigenstes Arbeitsgebiet, auf dem er den hervorragendsten Vertretern der Wissenschaft begegnet war; breiter angelegt, als es eine Geschichte der algebraischen Funktionen erfordert hätte, aber mit Meisterschaft kritisch vergleichend und klärend — nicht ohne Spitzen gegen unberechtigte Ansprüche — dargestellt. Dieser Bericht, eigentlich eine erschöpfende Darstellung der jungen vielverzweigten Theorie, zu der er selbst soviel beigetragen hat, wird wohl für längere Zeit ihr einen Abschluß gegeben haben.

Noethers Natur war es gemäß, einen Stoff nicht eher wieder loszulassen, als bis er ihn völlig und nach allen Seiten durchforscht und erledigt hatte. Seine Neigung zur Vertiefung und zum Grübeln wurde unterstützt durch den einfachen Verlauf seines äußeren Lebens. An den im Winter 70/71 in Heidelberg habilitierten Privatdozenten war 1875 der Ruf auf das Extraordinariat in Erlangen ergangen, das durch Ernennung von Gordan zum Ordinarius frei geworden war. 1888 wurde Noether dort Ordinarius und blieb, später zum Geheimen Hofrat ernannt, trotz seiner Emeritierung während der Kriegszeit als einziger Vertreter der Mathematik in Wirksamkeit, bis er 1919 durch Hrn. Tietze ersetzt wurde.

Seine Ferienzeit verbrachte Noether oft im elterlichen Hause arbeitend in Mannheim, das sich ihm erst mit dem im Jahre 1894 erfolgten Ableben seines Vaters verschloß. Im Jahre 1880 vermählte er sich mit Fräulein Ida Kaufmann aus Köln, die 1915 der Tod ihm wieder entrissen hat. Der Ehe sind vier Kinder entsprossen, von denen zwei, Fritz Noether in Breslau und Fräulein Emmy Noether in Göttingen, die Neigung des Vaters zur Mathematik geerbt und sich der Hochschullaufbahn gewidmet haben.

Unterdessen durfte sich Noether in hohem Maße der Anerkennung der gelehrten Welt des In- und Auslandes erfreuen, die in Ehrungen aller Art zum Ausdruck kam.

Zahlreiche Gesellschaften der Wissenschaften begehrten ihn zum Mitglied, darunter die Akademien von Berlin, München, Göttingen, von Paris und Rom (Lincei), die Mathematical Society in London. Sein Bildnis ziert den 26. Band (1904) des in Baltimore erscheinenden American Journal of Mathematics. Die Mathematischen Annalen nahmen ihn in ihre Schriftleitung auf; die Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo in ihren Ehrenrat.

Nur die ersehnte Berufung an eine größere Universität blieb aus.

Wir kehren zurück zu dem Zeitpunkt, als der Bericht über die Theorie algebraischer Funktionen abgeschlossen vorlag. Am 29. 12. 1894 schreibt Noether: „Von der gemeinsamen Arbeit dieser Jahre ist für mich das Hauptergebnis nicht das Resultat, das Buch, sondern einmal das angenehme Bewußtsein unseres Zusammenarbeitens, das mir viel wert war, dann das beruhigende Gefühl, daß, wenn die eigene Produktivität am Ende ist, es doch noch Arbeit gibt, die ich zu leisten imstande bin, und die sich auch lohnt."

Früher wohl und öfter, als er dachte, wurde die hier angedeutete Tätigkeit von ihm in Anspruch genommen. Im Februar 1895 erbat sich die Schriftleitung der Mathematischen Annalen von ihm einen Nachruf auf Cayley. Er freut sich der Aufgabe, die verschiedenen Züge des verehrten Mannes „zu sammeln und zu einem Gesamtbild zu vereinigen".

Hiermit beginnt die letzte Periode von Noethers Wirksamkeit, eingeleitet durch eine kurze Zeit der Niedergeschlagenheit wegen Mißerfolgs in Fragen, in deren Lösung jüngere Kräfte ihm zuvorgekommen waren. Wenn sich seine schriftstellerische Tätigkeit von jetzt ab vorzugsweise auf die Würdigung des Lebenswerkes von hervorragenden Fachgenossen richtet, die seinem Arbeitskreise irgendwie näher getreten waren, so hört er doch nicht auf, alle Erscheinungen, namentlich die auf dem eigenen Arbeitsgebiet, mit regster Teilnahme zu verfolgen und in brieflichem und mündlichem Austausch mit in- und ausländischen Fachgenossen auch weiterhin anregend und fördernd zu wirken. Daneben zeugen zahlreiche Besprechungen neuerer Erscheinungen der mathematischen Literatur von der Weite seines Gesichtskreises. Eine alte Liebe verbindet ihn mit der Astronomie, und die umfangreiche Würdigung von Poincarés Preisschrift über das Dreikörperproblem im 15. Jahrgang der V. J. S. der astronomischen Gesellschaft, 1890, redet von verständnisvollem Eingehen auf die keineswegs leicht geschriebene Abhandlung und ihre lichtverbreitenden Ergebnisse.

Und nun noch ein Wort zu den *Nachrufen.* Wie Noether in Cayley (Math. Ann. **46**, 1895), dem Schöpfer der Formentheorie, des Matrix-Algorithmus, der projektiven Maßbestimmung zugleich den einfachen, persönlich so liebenswürdigen Menschen, wie er den originellen, harten, ungeordneten Formentheoretiker und Algebraiker Sylvester (Math. Ann. **50**, 1897) schildert, zeugt von dem offenen Blick des Verfassers auch für die Persönlichkeit. Die wissenschaftlichen Leistungen des Einzelnen reiht er in das Gesamtbild ein, so daß beispielsweise die Beschreibung von Brioschis (Math. Ann. **50**, 1898) Beitrag zur Lösung der Gleichungen 5. Grades und seine Theorie der Jacobischen Gleichungen sich wie eine Geschichte dieses großen Problems liest; und die Biographie von Lie (Math. Ann. **53**, 1899), die ihn manchmal, wie er schreibt, zu erdrücken droht, erweitert sich zu einer Geschichte der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Lehre von den Transformationsgruppen.

Die bloß streifende Behandlung eines Gegenstandes lag Noethers Natur völlig fern. Jeden neuen wissenschaftlichen Gedanken stellt er in die Umgebung verwandter Gedankenketten, die ihm bei seiner großen Belesenheit immer zur Verfügung stehen, und mit denen vergleichend er ihn kritisch prüft. — Waren die bisher Genannten wesentlich Geometer, so zeigt die umfangreiche Würdigung der Arbeiten von Hermite, die er bis zur Auflösung der Gleichungen 5. Grades und dem Beweis der Transzendenz der Größe e verfolgt, Noether auch als Kenner der Theorie der Formen und ihrer Invarianten. In die gleiche Richtung drängt ihn später (Math. Ann. **75**, 1913) der Nachruf auf Gordan, eine in mehr als einer Beziehung für Noether heikele und entsagungsvolle Arbeit, die schon durch ihre Ausdehnung von tiefeindringenden Studien in ihm fremden Gebieten spricht, und doch, mit feinen persönlichen Zügen ausgestattet, gar erfreulich zu lesen ist. Der Nachruf auf Cremona (Math. Ann. **59**, 1904) führt ihn wieder zurück in vertraute Gedankenkreise, wie die Theorie der ein-eindeutigen Transformation in Ebene und Raum, ebenso die Würdigung Salmons (Math. Ann. **61**, 1905), und die in Gemeinschaft mit Brill verfaßte Besprechung der Arbeiten von Lüroth (Jahresberichte der D. Math.-Ver. **20**, 1911), von denen ihm die auf Analysis und Geometrie bezüglichen zufielen. Der letzte Nachruf, den Noether verfaßt hat, gilt dem vor Zeiten mitwirkenden und mitstreitenden befreundeten Zeuthen (Math. Ann. **83**, 1921), dessen Gabe der Intuition ihn mit Bewunderung erfüllt, und dessen Streben nach strenger Beweisführung anklingende Saiten bei ihm findet.

Eine Jubiläumsfeier (1901) der Universität Erlangen gibt Noether den Anlaß zu einem Rückblick auf seinen Vorgänger im Amt, v. Staudt, den gedankenreichen Schüler von Gauß, dessen „Geometrie der Lage“ er wiederum in die Geschichte der Geometrie einreiht.

Wie er so seinen durchdringenden Einblick in den Werdegang der zeitgenössischen Wissenschaft den „Mathematischen Annalen“[1]) als deren Mitherausgeber zur Verfügung stellt, findet er auch Zeit, seine Teilnahme an der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen, die seiner Feder so manchen wertvollen Beitrag verdankt, zu erweisen, indem er aus Anlaß der Feier ihres hundertjährigen Bestehens 1908 ihre Geschichte verfaßt.

Die wissenschaftliche Betätigung Noethers, so umfangreich sie ist,

1) Den 85. Band dieser Zeitschrift leitet ein Nachruf auf Noether ein, in dem seiner Mitwirkung mit lebhaftem Dank gedacht wird. — Derselben Zeitschrift wurde von italienischer Seite eine Würdigung der Tätigkeit Noethers zugesagt, die auch ein vollständiges Verzeichnis seiner Schriften enthalten wird.

läßt sich doch unschwer auf eine Formel bringen. Sie schließt wesentlich an an den Inhalt seiner frühesten Arbeiten, die von Clebschs geometrischen Abhandlungen und den „Abelschen Funktionen" von Riemann und von Clebsch-Gordan angeregt waren. In unaufhörlichem Ringen mit diesem ausgedehnten und verwickelten Stoff vertieft und erweitert er ihn von Arbeit zu Arbeit. Anderen Wissensgebieten hat er sich später nicht mehr zugewendet. Diese Selbstbeschränkung erklärt sich vor allem wohl aus seiner in sich selbst abgeschlossenen, zum Nachdenken hinneigenden Natur. Aber auch seine äußeren Lebensverhältnisse haben dazu beigetragen. Das Leiden, das schon seiner Erziehung eine besondere Wendung gegeben hatte, hat ihn sein ganzes Leben nicht verlassen und seine Bewegungsfreiheit gehemmt. Ohne daß er je darüber geklagt hätte, mag manche trübe Stunde ihn beschlichen und seinem Verhalten gegen Fernerstehende jenen herben Zug beigemischt haben, der Manchem ein falsches Bild von seiner Persönlichkeit gegeben hat. Als Lehrer der Jugend auf einen ungleichartigen, häufig wechselnden Zuhörerkreis angewiesen, erfuhr er nur selten die anregende Wirkung, die der verständnisvolle ältere Student auf den Dozenten ausübt, obgleich er dann wieder in den Prüfungen wegen seiner Vielseitigkeit, die ihm auf den Prüfling einzugehen gestattete, beliebt war. Auch ist ja die Jugend für jenen Grundzug von Noethers Wesen, die seinen Arbeiten erst den Stempel der Genialität aufgedrückt hat, wenig empfänglich. Ich meine sein Dringen auf Allgemeingültigkeit, den Scharfsinn und die Beharrlichkeit, mit der er jeden wertvollen Gedanken bis in seine letzten Ausläufer durchdenkt und verarbeitet, bis alle erreichbaren Folgerungen gezogen sind.

Hinter seiner kritischen Veranlagung tritt die künstlerische Gestaltungskraft merklich zurück. Auch seine bedeutendsten und folgenreichsten Arbeiten waren angeregt durch das Bedürfnis, Lücken, die dem scharf Prüfenden sich bemerkbar gemacht hatten, durch ein festes Gefüge von Schlüssen, die dann freilich auch zu gestalten waren, auszufüllen.

Dabei war er durchaus gerecht in der Anerkennuug der Leistungen anderer, auch wenn sie ihm unbequem in den Weg gekommen waren. Um so mehr konnte ihn das fahrlässige Verhalten Solcher aufbringen, die durch Vortäuschen von Unbekanntschaft mit den Arbeiten der Vorgänger ihren eigenen Ansprüchen den Weg zu bahnen hoffen; und mehr als einmal hat er in Schrift und Wort dagegen Verwahrung eingelegt.

An den Vorgängen der Universität, der er 46 Jahre angehörte, hat Noether zeitlebens den regsten Anteil genommen, wie Rektor und Dekan der philosophischen Fakultät an seinem Sarge bezeugt haben:

„Stets auf große Ziele gerichtet, hat er auch im Kleinen fast beispiellose Treue bewiesen. Voll Ehrfurcht für das geschichtlich Gewordene, das er mit zarten Händen pflegte, aber auch, wo es not tat, rücksichtslos durchgreifend, sichtend, ordnend, organisierend, mit der Genauigkeit, die ihm von seiner Wissenschaft her zur zweiten Natur geworden war, so hat er seines Amtes gewaltet.“ . . . bekundet sein Fakultätsgenosse Professor Dr. Gradmann.

Durch sein Leiden zu meist sitzender Lebensweise genötigt, hat er bei seiner raschen Fassungsgabe viel und gern gelesen, auch in Schriften, die seinem Arbeitskreise fern lagen, und sich einen Überblick über weite Zweige der Literatur, auch der nicht-mathematischen, angeeignet. So hat sich sein Wesen im Laufe der Zeit mehr und mehr verinnerlicht und vertieft und vielleicht glücklicher gestaltet, als den Leichtbeweglichen die Verarbeitung der fremden Eindrücke macht, die sich wahllos ihm aufdrängen. Übrigens brauchte Noether auf den Genuß der Außenwelt keineswegs zu verzichten. Man konnte ihn beim kennerischen Studium der Münchener Galerien antreffen; ich begegnete ihm, als er mit Gattin die Ostermesse in San Marco in Venedig anhörte. Er hat die Mathematiker-Kongresse in Heidelberg, Zürich und Rom mitgemacht und die Hauptvertreter der Mathematik in Berlin, Wien und Paris besucht. Mit zunehmendem Alter freilich nahm seine Unbeweglichkeit zu. Nie wird mir der schmerzliche Eindruck meiner letzten Begegnung 1916 in Freudenstadt mit dem an seinen Sitz festgebannten Mann aus dem Sinn kommen. Ein ungewöhnliches Maß nicht bloß von geistiger Kraft und Willensstärke, sondern auch von physischem Vermögen mußte in einem Menschen stecken, der diesen Zustand noch jahrelang wie selbstverständlich und ohne ein Wort der Klage gegenüber seinen Freunden ertrug. Die Feier seines siebenzigsten Geburtstages am 24. September 1914 fiel in die Kriegszeit, und auf manche Ehrung, die ihm von in- und ausländischen Körperschaften zugedacht war, mußte er verzichten.

Aber Eines hat das Leben unserem Noether doch gewährt, was es manchem verdienten Manne versagt hat: daß er die volle Auswirkung seiner Arbeit erlebt hat, sogar die Frucht aus zweiter Saat hat reifen sehen.

Tübingen, im April 1922.

(Eingegangen am 10. 5. 22.)